Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Funfzehnter Theil.

Mit zwölf lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Separat-Conto.

1850.

Inhaltsverzeichniss des funfzehnten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Mechanik.

Nautik.

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber die Stabilität der Schiffe.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Die für die Schiffsbaukunst so wichtige Lehre von der Stabilität der Schiffe ist mit der allgemeinen physikalischen oder mechanischen Lehre von der Stabilität schwimmender Körper im Ganzen einerlei, und daher, abgesehen von ihrer grossen praktischen Wichtigkeit, von so allgemeinem Interesse, dass eine auf einige Eigenthümlichkeit Anspruch machende Darstellung derselben an diesem Orte wohl gerechtfertigt erscheint. Was die im Folgenden gegebene Behandlung dieser wichtigen und interessanten Lehre betrifft, so weiss ich sehr wohl, dass sich dieselbe aus noch allgemeineren Gesichtspunkten, als hier geschehen ist, namentlich in analytischer Beziehung, auffassen lässt; ich hatte aber für jetzt die Absicht, mich möglichst dem Bedürfnisse der Praxis anzubequemen und mich eben nur auf das für den praktischen Gebrauch Wichtigste zu beschränken, wozu mir eine in höchster analytischer Allgemeinheit durchgeführte Behandlung weniger geeignet schien. Auch habe ich einiges Bekannte aus der allgemeinen analytischen Mechanik aufgenommen, um nichts weiter als die Lehren der Statik, namentlich die sechs allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, als bekannt vorauszusetzen. Bemerken will ich aber, dass bisher, namentlich von Bouguer im Traité du navire und von Euler in der Scientia navalis, wo wohl überhaupt die erste wissenschaftliche Begründung dieser wichtigen Lehre gegeben worden ist, immer bloss der eingeschränkte Fall unendlich kleiner Drehungs-

winkel in's Auge gefasst worden ist, was mir für den praktischen Gebrauch nicht ganz hinreichend zu sein scheint. Deshalb habe ich im Folgenden bei den allgemeinen Gesetzen diesen eingeschränkten Gesichtspunkt verlassen, und glaube gezeigt zu haben, dass diese Gesetze nur sehr wenig von ihrer Einfachheit verlieren, wenn man dem Drehungswinkel eine endliche bestimmte Grösse giebt, was mir namentlich für die Schiffsbaukunst wichtig zu sein scheint. Und wenn ich auch glaube, meine folgende analytische Entwicklung als eine mir ganz eigenthümliche beanspruchen zu dürfen, so darf ich doch auch nicht unbemerkt lassen, dass schon Atwood in einer, wie ich weiss, namentlich in England sehr geschätzten Abhandlung, die man in den Philosophical Transactions findet, den eingeschränkten Gesichtspunkt unendlich kleiner Drehungswinkel aufgegeben, und zu Drehungswinkeln von einer endlichen bestimmten Grösse sich erhoben hat. Seine Darstellung ist aber, wie dies in England früher fast immer gewöhnlich war, durchaus synthetisch, und gelangt nicht zu der Allgemeinheit der Betrachtung, welche die analytische Darstellungsweise zu gewähren im Stande ist, wenn auch das sonstige Verdienst solcher synthetischen Darstellungen von mir keineswegs in Frage gestellt werden soll. Um übrigens diese Abhandlung für jetzt nicht zu weit auszudehnen, habe ich mir verschiedene specielle Anwendungen der in derselben entwickelten allgemeinen Lehren für einige spätere Aufsätze vorbehalten müssen, und bemerke schliesslich nur noch, dass auch die unmittelbar mit der Stabilität zusammenhängende allgemeine Theorie des Rollens oder Schlingerns und Stampfens der Schiffe (le roulis et le tangage) in der vorliegenden Abhandlung gegeben worden ist, um in derselben auch hierfür eine theoretische Grundlage für einige später folgende specielle Anwendungen zu gewinnen. Eine noch allgemeinere analytische Behandlung behalte ich gleichfalls einer späteren Abhandlung vor.

---

§. 1.

Bevor wir zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung übergehen, wollen wir, um derselben eine möglichst allgemeine Verständlichkeit zu sichern, die allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern entwickeln, ohne dabei andere mechanische Sätze als die bei dieser Entwickelung nicht zu umgehenden Principien der Statik oder Gleichgewichtslehre vorauszusetzen, weil ohne die Kenntniss der in Rede stehenden allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern und einiger daraus abgeleiteter Sätze eine völlig deutliche und gehörig wissenschaftlich begründete Einsicht in das Folgende nicht erlangt werden kann, die Kenntniss dieser allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern aber auch

noch für verschiedene andere Gegenstände der nautischen Wissenschaften, die wir späterhin in besonderen Abhandlungen zu besprechen denken, von grosser Wichtigkeit ist.

§. 2.

Zu dem Ende wollen wir annehmen, dass die Schwerpunkte einer beliebigen Anzahl von Körpern zu einem Systeme mit einander verbunden seien, und wollen uns zugleich, was bekanntlich verstattet ist, die Massen dieser Körper, welche durch

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots\ldots$$

bezeichnet werden mögen, in ihren respectiven Schwerpunkten vereinigt denken, wodurch das in Rede stehende System von Körpern auf ein blosses System materieller Punkte reducirt wird.

Setzen wir nun, dass auf alle diese Punkte Kräfte wirken, welche denselben, wofern sie nicht unter einander verbunden wären, durch momentane Wirkungen nach gewissen bestimmten Richtungen respective die Geschwindigkeiten

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ldots$$

ertheilen würden; so werden dieselben wegen ihrer Verbindung unter einander sich nicht mit diesen Geschwindigkeiten nach den entsprechenden Richtungen, sondern nach gewissen anderen Richtungen mit gewissen anderen Geschwindigkeiten, die wir respective durch

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ldots$$

bezeichnen wollen, bewegen. Denken wir uns die Kräfte, welche nach ihren Richtungen, wenn man sich die in Rede stehenden Punkte nicht unter einander verbunden denkt, sondern jeden derselben als einen freien Punkt ansieht, die Geschwindigkeiten

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ldots$$

hervorbringen, aus den Kräften, welche nach ihren Richtungen die Geschwindigkeiten

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ldots$$

hervorbringen, und gewissen anderen Kräften, die nach gewissen Richtungen die Geschwindigkeiten

$$w,\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ \ldots\ldots$$

hervorbringen, zusammengesetzt, so können wir statt des ersten

Systems von Kräften die beiden anderen Systeme setzen. Da es sich hier nur um eine momentane Wirkung der Kräfte handelt, so sind

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4, \ldots;$$

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4, \ldots;$$

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4, \ldots$$

die Maasse der auf die einzelnen Punkte in den drei Systemen von Kräften wirkenden Kräfte, oder die sogenannten Quantitäten der Bewegung; und es bringen also unter allen Bedingungen, man mag sich die Punkte des Systems als frei oder als unter einander verbunden denken, die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4, \ldots;$$

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4, \ldots$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4, \ldots$$

Denkt man sich aber die Punkte als unter einander verbunden, so bringen die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4, \ldots$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4, \ldots$$

Also bringen, wenn man sich die Punkte des Systems unter einander verbunden denkt, die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4, \ldots$$

ganz dieselbe Wirkung hervor wie die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4, \ldots;$$

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4, \ldots;$$

woraus sich ergiebt, dass unter derselben Voraussetzung, wenn man sich nämlich die Punkte des Systems, wie es übrigens auch schon der Begriff eines Systems an sich fordert, unter einander verbunden denkt, die Kräfte

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4, \ldots$$

unter einander im Gleichgewichte sein müssen.

Hieraus ergiebt sich aber ferner auf der Stelle ganz von selbst, dass an den zu einem Systeme verbundenen Punkten auch sowohl die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots$$

und die, in Bezug auf ihre ursprünglichen Richtungen, nach entgegengesetzten Richtungen wirkend gedachten Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots;$$

als auch die, in Bezug auf ihre ursprünglichen Richtungen, nach entgegengesetzten Richtungen wirkend gedachten Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots$$

und die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots$$

unter einander im Gleichgewichte sein müssen.

Die Kräfte

$$mu,\ m_1u_1,\ m_2u_2,\ m_3u_3,\ m_4u_4,\ \ldots$$

pflegt man die **ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung** zu nennen; dagegen nennt man die Kräfte

$$mv,\ m_1v_1,\ m_2v_2,\ m_3v_3,\ m_4v_4,\ \ldots$$

die **wirklich Statt findenden Quantitäten der Bewegung**; endlich heissen die Kräfte

$$mw,\ m_1w_1,\ m_2w_2,\ m_3w_3,\ m_4w_4,\ \ldots$$

die **gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung.**

Mit Rücksicht hierauf lässt sich das Vorhergehende in dem folgenden Satze zusammenfassen:

1. **In jedem Systeme materieller Punkte, welche von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicitirt werden, findet zwischen den ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung und den, in Bezug auf ihre ursprünglichen Richtungen, nach entgegengesetzten Richtungen genommenen wirklich Statt findenden Quantitäten der Bewegung Gleichgewicht Statt.**

2. **In jedem Systeme materieller Punkte, welche von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicitirt werden, findet zwischen den, in Bezug auf ihre ursprünglichen Richtungen, nach entgegengesetzten Richtungen genommenen ursprünglich mitgetheilten Quantitäten der Bewegung und den wirklich Statt findenden Quantitäten der Bewegung Gleichgewicht Statt.**

3. **In jedem Systeme materieller Punkte, welc' von beliebigen momentan wirkenden Kräften sollicii**

werden, findet zwischen den gewonnenen und verlorenen Quantitäten der Bewegung Gleichgewicht Statt.

Dieses sehr wichtige allgemeine Princip, durch welches die Möglichkeit dargeboten wird, jede Frage über die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu einer blossen Aufgabe über das Gleichgewicht zu machen, oder überhaupt die Probleme der Bewegungslehre auf die Probleme der Gleichgewichtslehre zurückzuführen, wird nach seinem Erfinder, dem berühmten französischen Philosophen und Mathematiker d'Alembert, das d'Alembert'sche Princip in der Mechanik genannt. Wir wollen dasselbe nun zu der Entwickelung der allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern anwenden.

§. 3.

Die einzelnen Punkte des im Vorhergehenden betrachteten Systems wollen wir von jetzt an der Kürze wegen durch die entsprechenden Massen, also durch

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots.$$

bezeichnen, und wollen annehmen, dass am Ende einer gewissen Zeit t die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges Coordinatensystem respective

$$x,\ y,\ z;\ x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2;\ x_3,\ y_3,\ z_3;\ \ldots.$$

seien, indem wir alle diese Coordinaten als Functionen der Zeit t betrachten.

Von allen Punkten des Systems wollen wir jetzt als Repräsentanten der übrigen nur einen, etwa den Punkt m, in's Auge fassen, bemerken aber sogleich, dass die ganze folgende Betrachtung völlig in derselben Weise auf jeden anderen Punkt des Systems anwendbar sein wird. Am Ende der Zeit t, wo bekanntlich x, y, z die Coordinaten des Punktes m sind, sei v die in Folge der Bewegung des Systems wirklich Statt findende Geschwindigkeit des Punktes m, und s sei der Weg, welchen dieser Punkt bei der Bewegung des Systems in der Zeit t zurückgelegt hat. Lässt man die Zeit t um Δt wachsen, so wird s um Δs wachsen, und da man die Geschwindigkeit des Punktes m in dem Zeitintervalle Δt mit desto grösserer Genauigkeit als constant oder seine Bewegung in dem Zeitintervalle Δt mit desto grösserer Genauigkeit als gleichförmig betrachten kann, je kleiner Δt ist, so ist mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist,

$$\Delta s = v\Delta t \text{ oder } v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Also ist offenbar die Geschwindigkeit v selbst in aller Schärfe die Gränze, welcher der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sich nähert, wenn

Δt sich der Null nähert, d. h. nach den Begriffen der Differentialrechnung, es ist mit völliger Genauigkeit

$$v = \frac{\partial s}{\partial t},$$

wobei man nicht aus den Augen zu lassen hat, dass die vorhergehende ganz allgemeine Betrachtung durchaus keine besondere Beschaffenheit des Wegs s voraussetzt, und dass also die obige Differentialgleichung gilt, wie auch der Weg s beschaffen sein mag; dieselbe gilt folglich ganz allgemein, der Weg s mag eine gerade Linie oder eine beliebige Curve von einfacher oder doppelter Krümmung sein.

Bezeichnen wir ferner die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit v mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (xyz) gelegter, den primitiven Coordinatenaxen paralleler Axen einschliesst, durch φ, ψ, χ; so sind die parallel mit den drei primitiven Axen der x, y, z genommenen Composanten der Geschwindigkeit v mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen:

$$v\cos\varphi,\ v\cos\psi,\ v\cos\chi;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$\cos\varphi \cdot \frac{\partial s}{\partial t},\quad \cos\psi \cdot \frac{\partial s}{\partial t},\quad \cos\chi \cdot \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Nun ist aber offenbar mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δs ist, d. i. mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist:

$$\Delta x = \cos\varphi.\Delta s,\ \Delta y = \cos\psi.\Delta s,\ \Delta z = \cos\chi.\Delta s;$$

also mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δs oder Δt ist:

$$\cos\varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s},\quad \cos\psi = \frac{\Delta y}{\Delta s},\quad \cos\chi = \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Daher sind offenbar in völliger Schärfe

$$\cos\varphi,\ \cos\psi,\ \cos\chi$$

die Gränzen, denen respective die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta x}{\Delta s},\ \frac{\Delta y}{\Delta s},\ \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

sich nähern, wenn Δs oder, was dasselbe ist, wenn Δt sich der Null nähert; und nach den Begriffen der Differentialrechnung ist folglich mit völliger Genauigkeit:

$$\cos\varphi = \frac{\partial x}{\partial s},\quad \cos\psi = \frac{\partial y}{\partial s},\quad \cos\chi = \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Also sind nach dem Obigen

$$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t};$$

d. i. nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung

$$\frac{\partial x}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial t};$$

die parallel mit den drei Axen der x, y, z genommenen Composanten der Geschwindigkeit v, mit gehöriger Rücksicht auf die diesen Composanten zukommenden Vorzeichen.

Folglich sind am Ende der Zeit $t+\varDelta t$, welcher die Geschwindigkeit $v+\varDelta v$ des Punktes m entspricht, die parallel mit den Axen der x, y, z genommenen Composanten dieser Geschwindigkeit, immer mit gehöriger Rücksicht auf die diesen Composanten zukommenden Vorzeichen:

$$\frac{\partial x}{\partial t}+\varDelta\frac{\partial x}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t}+\varDelta\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial t}+\varDelta\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Wenn jetzt überhaupt P eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft bezeichnet, welche, auf die Masse M wirkend, in der Zeit T die Geschwindigkeit V hervorbringt, so sei p eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse 1 wirkend, in der Zeit 1 die Geschwindigkeit 1 hervorbringt. Um nun die Kräfte P und p mit einander zu vergleichen, bezeichne P_1 eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse M wirkend, in der Zeit T die Geschwindigkeit 1 hervorbringt, und P_2 bezeichne eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Masse 1 wirkend, in der Zeit T die Geschwindigkeit 1 hervorbringt. Dann hat man die folgende Zusammenstellung:

$$P,\ T,\ M,\ V;$$
$$P_1,\ T,\ M,\ 1;$$
$$P_2,\ T,\ 1,\ 1;$$
$$p,\ 1,\ 1,\ 1;$$

und es ist folglich, wie leicht erhellet:

$$P:P_1=V:1,$$
$$P_1:P_2=M:1,$$
$$P_2:p=1:T;$$

also durch Zusammensetzung dieser Proportionen:

$$P:p=MV:T,$$

und hieraus

$$PT=pMV,\ \text{also}\ V=\frac{PT}{pM}.$$

Setzt man aber $p=1$, d. h. nimmt man eine stetig wirkende, aber mit der Zeit sich nicht verändernde und insofern also constante Kraft, welche, auf die Einheit der Massen wirkend, in der Zeiteinheit eine der Längeneinheit gleiche Geschwindigkeit hervorbringt, als Krafteinheit an, so ist

$$V=\frac{PT}{M},$$

eine allgemeine Gleichung, von der wir sogleich weiteren Gebrauch machen wollen.

Denken wir uns nämlich alle auf den materiellen Punkt m am Ende der Zeit t wirkende Kräfte auf drei den angenommenen Coordinatenaxen der x, y, z parallele Kräfte X', Y', Z' gebracht, was bekanntlich immer möglich ist, so sind, weil man diese Kräfte während des Zeitintervalls Δt mit desto grösserer Genauigkeit als constant betrachten kann, je kleiner Δt ist, nach dem Vorhergehenden

$$\frac{X'\Delta t}{m},\quad \frac{Y'\Delta t}{m},\quad \frac{Z'\Delta t}{m}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$X=\frac{X'}{m},\quad Y=\frac{Y'}{m},\quad Z=\frac{Z'}{m}$$

setzen,

$$X\Delta t,\quad Y\Delta t,\quad Z\Delta t$$

die von den auf den materiellen Punkt m stetig wirkenden Kräften X', Y', Z' in der Zeit Δt hervorgebrachten Geschwindigkeiten, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist; und da nun der materielle Punkt m am Ende der Zeit t nach dem Obigen, parallel mit den Coordinatenaxen der x, y, z, schon die Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial x}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

als Anfangsgeschwindigkeiten hat, so sind, parallel mit den Coordinatenaxen der x, y, z, seine Geschwindigkeiten am Ende der Zeit $t+\Delta t$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + X\Delta t,\quad \frac{\partial y}{\partial t} + Y\Delta t,\quad \frac{\partial z}{\partial t} + Z\Delta t;$$

mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, wobei, wie wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, vom Ende der Zeit t an, und also auch am Ende der Zeit $t+\Delta t$, der materielle Punkt m offenbar als ein freier, nicht mehr mit den übrigen Punkten zu einem Systeme von Punkten verbundener Punkt betrachtet worden ist.

Nimmt man nun alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich auf der Stelle ohne alle Zweideutigkeit, dass am Ende der Zeit $t+\Delta t$, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, die den Coordinatenaxen der x, y, z parallelen, mit den gehörigen Vorzeichen genommenen, Composanten der gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung des Punktes m

$$m\left\{\frac{\partial x}{\partial t} + X\Delta t - \left(\frac{\partial x}{\partial t} + \Delta\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right\},$$

$$m\left\{\frac{\partial y}{\partial t} + Y\Delta t - \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \Delta\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right\},$$

$$m\left\{\frac{\partial z}{\partial t} + Z\Delta t - \left(\frac{\partial z}{\partial t} + \Delta\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right\};$$

d. i.

$$m(X\Delta t - \Delta\frac{\partial x}{\partial t}),\quad m(Y\Delta t - \Delta\frac{\partial y}{\partial t}),\quad m(Z\Delta t - \Delta\frac{\partial z}{\partial t})$$

sind.

Auf ganz ähnliche Art sind überhaupt für alle Punkte

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots.$$

des Systems am Ende der Zeit $t+\Delta t$, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, die den drei Coordinatenaxen der x, y, z parallelen, mit den gehörigen Vorzeichen genommenen, Composanten der gewonnenen oder verlorenen Quantitäten der Bewegung:

$$m(X\Delta t - \Delta\frac{\partial x}{\partial t}),\quad m(Y\Delta t - \Delta\frac{\partial y}{\partial t}),\quad m(Z\Delta t - \Delta\frac{\partial z}{\partial t});$$

$$m_1(X_1\Delta t - \Delta\frac{\partial x_1}{\partial t}),\quad m_1(Y_1\Delta t - \Delta\frac{\partial y_1}{\partial t}),\quad m_1(Z_1\Delta t - \Delta\frac{\partial z_1}{\partial t});$$

$$m_2(X_2\Delta t - \Delta\frac{\partial x_2}{\partial t}),\quad m_2(Y_2\Delta t - \Delta\frac{\partial y_2}{\partial t}),\quad m_2(Z_2\Delta t - \Delta\frac{\partial z_2}{\partial t});$$

$$m_3(X_3\Delta t - \Delta\frac{\partial x_3}{\partial t}),\quad m_3(Y_3\Delta t - \Delta\frac{\partial y_3}{\partial t}),\quad m_3(Z_3\Delta t - \Delta\frac{\partial z_3}{\partial t});$$

u. s. w.

und da nun in Folge von d'Alembert's Princip zwischen den gewonnenen und verlorenen Quantitäten der Bewegung aller Punkte des Systems stets Gleichgewicht Statt finden muss, so erhalten wir nach den allgemeinen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines völlig freien Systems, welche wir, wie schon in der Einleitung erwähnt worden ist, hier als bekannt voraussetzen, die folgenden, mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, geltenden Gleichungen:

$$\Sigma m(X\Delta t - \Delta\frac{\partial x}{\partial t}) = 0,\quad \Sigma m(Y\Delta t - \Delta\frac{\partial y}{\partial t}) = 0,\quad \Sigma m(Z\Delta t - \Delta\frac{\partial z}{\partial t}) = 0;$$

$$\Sigma m\{x(Y\Delta t - \Delta\frac{\partial y}{\partial t}) - y(X\Delta t - \Delta\frac{\partial x}{\partial t})\} = 0,$$

$$\Sigma m\{y(Z\Delta t - \Delta\frac{\partial z}{\partial t}) - z(Y\Delta t - \Delta\frac{\partial y}{\partial t})\} = 0,$$

$$\Sigma m\{z(X\Delta t - \Delta\frac{\partial x}{\partial t}) - x(Z\Delta t - \Delta\frac{\partial z}{\partial t})\} = 0;$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\Sigma m\left(X - \frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial t}}{\Delta t}\right) = 0,\quad \Sigma m\left(Y - \frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial t}}{\Delta t}\right) = 0,\quad \Sigma m\left(Z - \frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial t}}{\Delta t}\right) = 0;$$

$$\Sigma m\left\{x\left(Y - \frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial t}}{\Delta t}\right) - y\left(X - \frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial t}}{\Delta t}\right)\right\} = 0,$$

$$\Sigma m\left\{y\left(Z - \frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial t}}{\Delta t}\right) - z\left(Y - \frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial t}}{\Delta t}\right)\right\} = 0,$$

$$\Sigma m\left\{z\left(X - \frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial t}}{\Delta t}\right) - x\left(Z - \frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial t}}{\Delta t}\right)\right\} = 0.$$

Weil diese Gleichungen mit desto grösserer Genauigkeit gelten, je kleiner Δt ist, so erhält man die völlig genauen Gleichungen, wenn man in den vorhergehenden Gleichungen Δt sich der Null nähern lässt, und zu den Gränzen übergeht. Dadurch erhält man aber nach den bekannten Begriffen und Bezeichnungen der Differentialrechnung auf der Stelle die folgenden Gleichungen:

$$\Sigma m(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}) = 0,\quad \Sigma m(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}) = 0,\quad \Sigma m(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}) = 0;$$

$$\Sigma m\left\{x(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}) - y(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2})\right\} = 0,$$

$$\Sigma m \left\{ y\left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) - z\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \right\} = 0,$$

$$\Sigma m \left\{ z\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) - x\left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) \right\} = 0;$$

oder die Gleichungen:

$$\Sigma m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \Sigma m X, \quad \Sigma m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \Sigma m Y, \quad \Sigma m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Sigma m Z;$$

$$\Sigma m\left(x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = \Sigma m(xY - yX),$$

$$\Sigma m\left(y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \Sigma m(yZ - zY),$$

$$\Sigma m\left(z \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = \Sigma m(zX - xZ);$$

oder auch die Gleichungen:

$$\Sigma m\partial^2 x = \Sigma m X\partial t^2, \quad \Sigma m\partial^2 y = \Sigma m Y\partial t^2, \quad \Sigma m\partial^2 z = \Sigma m Z\partial t^2;$$

$$\Sigma m(x\partial^2 y - y\partial^2 x) = \Sigma m(xY - yX)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(y\partial^2 z - z\partial^2 y) = \Sigma m(yZ - zY)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(z\partial^2 x - x\partial^2 z) = \Sigma m(zX - xZ)\partial t^2.$$

Ist das System um einen festen Punkt drehbar, so erhält man nach der Lehre vom Gleichgewichte, wenn man den festen Punkt als Anfang der Coordinaten annimmt, für die Bewegung des Systems bloss die drei folgenden Gleichungen:

$$\Sigma m\left(x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = \Sigma m(xY - yX),$$

$$\Sigma m\left(y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = \Sigma m(yZ - zY),$$

$$\Sigma m\left(z \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = \Sigma m(zX - xZ)$$

oder

$$\Sigma m(x\partial^2 y - y\partial^2 x) = \Sigma m(xY - yX)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(y\partial^2 z - z\partial^2 y) = \Sigma m(yZ - zY)\partial t^2,$$

$$\Sigma m(z\partial^2 x - x\partial^2 z) = \Sigma m(zX - xZ)\partial t^2.$$

Ist das System um eine feste Axe drehbar, so erhält man nach der Lehre vom Gleichgewichte, wenn man diese feste Axe als Axe der z annimmt, wie leicht erhellen wird, für die Bewegung des Systems bloss die eine Gleichung:

$$\Sigma m(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma m(xY-yX)$$

oder

$$\Sigma m(x\partial^2 y-y\partial^2 x)=\Sigma m(xY-yX)\partial t^2.$$

Wenn das System bloss aus einem Punkte besteht, so werden die sechs obigen Gleichungen, wie leicht erhellet:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z;$$

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=xY-yX,$$

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=yZ-zY,$$

$$z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=zX-xZ.$$

Weil aber in diesem Falle die drei letzten Gleichungen offenbar eine unmittelbare Folge aus den drei ersten Gleichungen, und also jederzeit erfüllt sind, wenn die drei ersten Gleichungen erfüllt sind, so hat man in diesem Falle für die Bewegung des in Rede stehenden Punktes offenbar nur die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z;$$

oder, weil nach dem Obigen

$$X=\frac{X'}{m},\qquad Y=\frac{Y'}{m},\qquad Z=\frac{Z'}{m}$$

ist, die drei Gleichungen:

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X',\quad m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y',\quad m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z'.$$

§. 4.

Wenn am Ende der Zeit t die Coordinaten des Schwerpunkts des Systems der Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots$$

durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; und die Coordinaten dieser Massen in Bezug auf ein durch den Schwerpunkt des Systems als Anfang gelegtes, dem primitiven Coordinatensysteme paralleles Coordinatensystem respective durch

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z};\ \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{z}_1;\ \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{z}_2;\ \mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_3,\ \mathfrak{z}_3;\ \ldots.$$

bezeichnet werden; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in völliger Allgemeinheit:

$$x=\mathfrak{X}+\mathfrak{x},\quad y=\mathfrak{Y}+\mathfrak{y},\quad z=\mathfrak{Z}+\mathfrak{z};$$

$$x_1=\mathfrak{X}+\mathfrak{x}_1,\ y_1=\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}_1,\ z_1=\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}_1;$$

$$x_2=\mathfrak{X}+\mathfrak{x}_2,\ y_2=\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}_2,\ z_2=\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}_2;$$

$$x_3=\mathfrak{X}+\mathfrak{x}_3,\ y_3=\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}_3,\ z_3=\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}_3;$$

u. s. w.

Ferner ist nach der Lehre vom Schwerpunkte bekanntlich

$$\mathfrak{X}\Sigma m=\Sigma mx,\ \mathfrak{Y}\Sigma m=\Sigma my,\ \mathfrak{Z}\Sigma m=\Sigma mz;$$

also, wenn man nach t differentiirt, wie leicht erhellet:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\,\Sigma m=\Sigma m\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\,\Sigma m=\Sigma m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\,\Sigma m=\Sigma m\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Nach §. 3. ist aber

$$\Sigma m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\Sigma mX,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\Sigma mY,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\Sigma mZ;$$

also ist

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\,\Sigma m=\Sigma mX,\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\,\Sigma m=\Sigma mY,\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\,\Sigma m=\Sigma mZ;$$

oder

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m X}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m Y}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m Z}{\Sigma m}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$=(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)-(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

und

$$xY-yX=(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})Y-(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})X.$$

Also ist offenbar

$$\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

$$=\Sigma m\left\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)-(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\right\}$$

und

$$\Sigma m(xY-yX)=\Sigma m\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})Y-(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})X\}$$

Aber

$$\Sigma m\left\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)-(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\right\}$$

$$=\Sigma m\left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}\right)+\Sigma m\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$+\Sigma m\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}+\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$=\left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}\right)\Sigma m+\Sigma m\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}\Sigma m\mathfrak{x}-\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}\Sigma m\mathfrak{y}+\mathfrak{X}\Sigma m\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\Sigma m\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2},$$

und folglich, weil die Coordinaten

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z};\quad \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{z}_1;\quad \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{z}_2;\quad \mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_3,\ \mathfrak{z}_3;\ \ldots$$

sich auf den Schwerpunkt des Systems als Anfang beziehen, also nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\Sigma m\mathfrak{x}=0,\quad \Sigma m\mathfrak{y}=0,\quad \Sigma m\mathfrak{z}=0;$$

daher offenbar auch

$$\Sigma m\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}=0,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}=0,\quad \Sigma m\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}=0$$

ist:

$$\Sigma m\left\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)-(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\right\}$$
$$=(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2})\Sigma m+\Sigma m(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}).$$

Ferner ist

$$\Sigma m\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})Y-(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})X\}$$
$$=\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)+\Sigma m(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X)$$
$$=\mathfrak{X}\Sigma mY-\mathfrak{Y}\Sigma mX+\Sigma m(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X),$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Sigma m\{(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})Y-(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})X\}$$
$$=(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2})\Sigma m+\Sigma m(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X).$$

Weil nun nach §. 3.

$$\Sigma m(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma m(xY-yX)$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2})\Sigma m+\Sigma m(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2})$$
$$=(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2})\Sigma m+\Sigma m(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X),$$

also

$$\Sigma m(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2})=\Sigma m(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X),$$

und man hat daher offenbar überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$\Sigma m(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2})=\Sigma m(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z).$$

Fasst man alles Bisherige zusammen, so ergeben sich die sechs folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mX}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mY}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mZ}{\Sigma m};$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y),$$

$$\Sigma m\left(\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z).$$

Eine unmittelbare Folge aus den drei ersten dieser sechs Gleichungen sind, wie man leicht übersieht, die drei Gleichungen:

$$\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z)}{\Sigma m};$$

und für die Bewegung des Schwerpunkts $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ der Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots$$

bei der Bewegung des Systems dieser Massen hat man also die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mX}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mY}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mZ}{\Sigma m};$$

$$\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z)}{\Sigma m}.$$

Denken wir uns jetzt die sämmtlichen zu einem Systeme verbundenen Massen

$$m, m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots.$$

in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte, dessen Coordinaten wir im Allgemeinen wieder durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen wollen, mit einander vereinigt, und alle auf die einzelnen Massen im Systeme wirkenden Kräfte im gemeinschaftlichen Schwerpunkte der Massen nach Richtungen angebracht, die den ursprünglichen Richtungen dieser Kräfte parallel sind; so sind unter dieser Voraussetzung die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunkts, d. h. überhaupt des Punktes $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$, nach §. 3. offenbar:

$$\Sigma m\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\Sigma mX,\quad \Sigma m\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\Sigma mY,\quad \Sigma m\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\Sigma mZ;$$

$$\Sigma m(\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2})=\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X),$$

$$\Sigma m(\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2})=\Sigma m(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y),$$

$$\Sigma m(\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2})=\Sigma m(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z);$$

also, wie leicht erhellen wird:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mX,\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mY,\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\Sigma m=\Sigma mZ;$$

$$(\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2})\Sigma m=\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)$$

$$(\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2})\Sigma m=\Sigma m(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y),$$

$$(\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2})\Sigma m=\Sigma m(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z);$$

oder

$$\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mX}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mY}{\Sigma m},\quad \frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma mZ}{\Sigma m};$$

$$\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}-\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Y}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}-\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}=\frac{\Sigma m(\mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y)}{\Sigma m},$$

$$\mathfrak{Z}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}-\mathfrak{X}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}=\frac{m(\mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z)}{\Sigma m}.$$

Da diese Gleichungen mit den oben für die Bewegung des Schwerpunkts der Massen

$$m, m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$$

bei der Bewegung des Systems dieser Massen gefundenen Gleichungen völlig identisch sind, so ergiebt sich unmittelbar der folgende merkwürdige und in vielen Beziehungen wichtige Satz:

Der Schwerpunkt eines Systems von Massen, welches keinen festen Punkt hat, bewegt sich bei jeder Bewegung dieses Systems immer ganz auf dieselbe Weise, wie er sich bewegen würde, wenn in ihm die sämmtlichen das System bildenden Massen vereinigt, und alle auf die einzelnen Massen in dem Systeme wirkenden Kräfte nach ihren ursprünglichen Richtungen parallelen Richtungen angebracht wären.

§. 5.

Wenn wir in einer völlig zur Ruhe gekommenen Wassermasse uns einen beliebigen nach allen Seiten hin begränzten Theil derselben denken und uns vorstellen, dass dieser Theil einmal, ohne seine Gestalt zu verlieren, von der übrigen Wassermasse abgesondert wäre, so würde derselbe von einer seinem Gewichte gleichen, nach der durch seinen Schwerpunkt gehenden Vertikallinie abwärts wirkenden Kraft nach der Oberfläche der Erde hin getrieben werden. Betrachten wir aber diesen Wassertheil wieder als einen Bestandtheil der ganzen Wassermasse, so bleibt sein Bestreben, im Wasser zu sinken, natürlich noch ganz dasselbe wie vorher, wo wir ihn uns von der ganzen Wassermasse abgesondert vorstellten. Weil er nun aber, indem wir die ganze Wassermasse als vollkommen ruhend vorausgesetzt haben, nicht sinkt, sondern vielmehr sich selbst in vollkommener Ruhe befindet, so kann dieser Zustand der Ruhe offenbar nur durch den Druck der ihn umgebenden Wassermasse herbeigeführt werden, und da auch kein Steigen des in Rede stehenden Wassertheils, keine Seitenbewegung irgend einer Art desselben, sondern, wie gesagt, überhaupt der Zustand vollkommenster Ruhe Statt findet, so muss der Druck, welchen das diesen Wassertheil umgebende Wasser in seiner Gesammtheit auf denselben ausübt, nothwendig gerade eben so gross sein wie das Gewicht des in Rede stehenden Wassertheils, und die Richtung dieses Drucks muss mit der durch den Schwerpunkt des Wassertheils gehenden Vertikallinie zusammenfallen, natürlich auch dieser Druck nach oben hin gerichtet sein.

Stellen wir uns jetzt ferner ein Schiff in einer beliebigen Lage auf dem Wasser vor, so dass ein gewisser Theil desselben in das Wasser eingetaucht ist, welchen wir daher den eingetauch-

ten Theil des Schiffs*) nennen werden, und untersuchen nun die auf das Schiff wirkenden Kräfte. Die erste dieser Kräfte, welche sich sogleich ganz von selbst darbietet, ist das Gewicht des ganzen Schiffs, das man sich als eine durch den Schwerpunkt des ganzen Schiffs, alle zu demselben gehörenden Theile natürlich eingeschlossen, gehende, nach vertikaler Richtung abwärts wirkende Kraft vorzustellen, und als eine solche Kraft bei allen folgenden Untersuchungen in Rechnung zu bringen hat. Die zweite auf das Schiff wirkende Kraft ist aber der Druck, welchen das umgebende Wasser auf dasselbe ausübt, und da dieser Druck offenbar gar keine Veränderung erleiden würde, wenn man sich statt des eingetauchten Theils des Schiffs einen demselben der Grösse und Gestalt nach völlig gleichen Wasserkörper gesetzt dächte, so ergiebt sich aus der am Anfange dieses Paragraphen angestellten Betrachtung ganz von selbst und auf völlig unzweideutige Weise, dass der Druck des das Schiff umgebenden Wassers auf dasselbe als eine Kraft zu betrachten und bei allen Untersuchungen als eine solche Kraft in Rechnung zu bringen ist, welche dem Gewichte des den eingetauchten Theil des Schiffs vollständig ausfüllenden Wassers, oder, was dasselbe ist, dem Gewichte des von dem Schiffe verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wasserkörpers gleich ist, durch den Schwerpunkt dieses Wasserkörpers geht, und nach vertikaler Richtung aufwärts wirkt. Wir sehen hieraus, dass wir es im Folgenden immer mit diesen beiden Kräften zu thun haben werden, welche wir daher, weil sie die Hauptgrundlage bilden, von der wir bei unseren fol-

---

*) In deutschen Werken über die Schiffsbaukunst heisst der eingetauchte, d. h. der unter dem Wasser befiodliche Theil des Schiffs, der zwischen der Unterkante des Kiels und dem Wasserspiegel liegende Theil desselbeo, gewöholich der Wasserraum, worüber man z. B. Anfangsgründe der Schiffbaukunst oder practische Abhaodlung über den Schiffbau. Aus dem Französischen des Herrn Du Hamel de Moneeau nach der zweiten Ausgabe des Originals übersetzt von C. G. D. Müller. Berlin. 1791. 4. S. 410. nachsehen kann. Im Französischen heisst dieser Theil des Schiffs la carène. In der Encyclopédie méthodique. Marine. T. I. Paris. 1783. 4. p. 266. findet sich folgende Erklärung bei diesem Worte: *Carène*, s. f. c'est la partie submergée du bâtiment, lorsqu'il est à son point de charge, que l'on appelle aussi *oeuvre-vive*, par opposition à *l'oeuvre-morte*, qui est toute la partie du corps du navire au-dessus de la flottaison. Gleichbedeutend mit carène wird auch zuweilen déplacement de vaisseau genommen. A. a. O. p. 688. heisst es: *Déplacement de vaisseau*, s. m. on voit que les corps flottans plongent dans l'eau d'une partie de leur volume; cette partie de leur volume, ou, la quantité d'eau qu'elle deplace, s'appelle le déplacement. Streng genommen ist aber déplacement nur die von dem Schiffe verdrängte Wassermasse, und so sagt auch z. B. Chapman im Traité de la construction des vaisseaux par Frédéric Henri de Chapman. Traduit du Suédois et publié par M. Vial du Clairbois. Paris 1839. 4. p. 1. ganz bestimmt: Le Déplacement est le vuide que le Vaisseau fait dans l'eau tranquille par le volume de sa carène, en raison du poids qui l'y plonge.

genden Untersuchungen auszugehen haben, jetzt nochmals in der Kürze genau bestimmen wollen, indem wir jedoch dieser Bestimmung erst noch die folgenden Bemerkungen vorausschicken.

Was wir unter dem Schwerpunkte des Schiffs verstehen, bedarf natürlich eigentlich gar keiner weiteren Erläuterung; indess mag völliger Deutlichkeit und Bestimmtheit wegen in dieser Beziehung doch noch besonders bemerkt werden, dass wir darunter immer den Schwerpunkt des ganzen Schiffs und aller seiner einzelnen Theile, der Masten, der ganzen Takelasche, aller Rundhölzer, der Ladung, des Ballastes u. s. w. verstehen. Dagegen soll im Folgenden unter dem Schwerpunkte des eingetauchten Theils des Schiffs immer der Schwerpunkt eines diesem Theile des Schiffs der Grösse und Gestalt nach gleichen, aber, was wohl zu beachten und in der Folge stets festzuhalten ist, völlig homogenen Körpers, oder, mit anderen Worten, der Schwerpunkt des von dem Schiffe verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wasserkörpers verstanden werden. Euler in der Scientia navalis. P. I. Petropoli. 1749. 4. p. 14. Nr. 28. nennt den Punkt, welchen wir so eben den Schwerpunkt des eingetauchten Theils genannt und genau bestimmt haben, centrum magnitudinis partis submersae, indem er den Schwerpunkt des Schiffs wie gewöhnlich centrum gravitatis navis nennt, und sagt darüber a. a. O.: Centrum igitur magnitudinis partis submersae invenietur, si pars submersa tanquam ex materia homogenea constans consideretur, eiusque centrum gravitatis definiatur. Hoc itaque centrum magnitudinis partis submersae quoque erit centrum gravitatis aquae de suo loco depulsae. Auch in der Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux, mise à la portée de ceux qui s'appliquent à la navigation. Paris. 1776. 8. bedient sich Euler immer der den vorhergehenden entsprechenden Benennungen *centre de gravité* du vaisseau tout entier und *centre* de la partie submergée, ou bien simplement le *centre* de la carène. Ich halte jedoch den von Euler gemachten Unterschied zwischen Mittelpunkt der Schwere und Mittelpunkt der Grösse nicht für unbedingt nöthig, wenn man nur unter dem Schwerpunkte des eingetauchten Theils immer den vorher mit diesem Namen belegten, und zu bestimmen gelehrten Punkt versteht. Auch Bouguer im Traité du navire. Paris. 1746. 4. p. 249. nennt diesen Punkt Centre de gravité de la Carène und fügt hinzu: dans lequel se réunit la poussée verticale de l'eau.

Dies vorausgeschickt, kann nun der aus dem Obigen sich unmittelbar ergebende, für alle späteren Untersuchungen höchst wichtige Satz auf folgende Art ausgesprochen werden:

Jedes auf dem Wasser in irgend einer Lage befindliche Schiff wird von zwei nach vertikalen, also einander parallelen Richtungen wirkenden Kräften sollicitirt, nämlich von einer im Schwerpunkte des Schiffs nach unten hin wirkenden, dem Gewichte des ganzen

Schiffs gleichen, und von einer im Schwerpunkte des eingetauchten Theils nach oben hin wirkenden, dem Gewichte des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers gleichen Kraft.

Die Bewegungen, welche diese beiden das Schiff sollicitirenden, einander parallelen, aber nach entgegengesetzten Seiten hin wirkenden Kräfte dem Schiffe ertheilen, wollen wir jetzt etwas genauer betrachten. Nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen wichtigen Satze bewegt sich der Schwerpunkt eines völlig freien, d. h. keinen festen Punkt habenden Systems von Massen, — und als ein solches System ist ja natürlich jedes Schiff auf dem Wasser zu betrachten, — ganz eben so, als wenn die sämmtlichen Massen in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte vereinigt, und in demselben alle auf die einzelnen Massen des Systems wirkenden Kräfte nach ihren ursprünglichen Richtungen parallelen Richtungen angebracht wären. Wenden wir nun diesen Satz, wie es verstattet ist, auf unsern vorliegenden Fall an, so ist zuvörderst klar, dass die beiden das Schiff sollicitirenden Kräfte demselben eine solche Bewegung ertheilen werden, dass sein Schwerpunkt in einer vertikalen geraden Linie sich aufwärts oder abwärts bewegt, und diese in einer vertikalen geraden Linie aufwärts oder abwärts vor sich gehende Bewegung des Schwerpunkts des Schiffs wird nur dann nicht mehr Statt finden, wenn die beiden nach einander entgegengesetzten vertikalen Richtungen auf das Schiff wirkenden Kräfte einander gleich geworden sind, d. h. nach dem Obigen, wenn das Schiff sich so weit in das Wasser eingetaucht hat, dass sein Gewicht dem Gewichte des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers genau gleich ist. Nehmen wir nun der Einfachheit wegen jetzt an, dass dieser Zustand eingetreten sei, so muss sich nach dem obigen Satze bei der ferneren Bewegung des Schiffs, wobei wir aber ausdrücklich bemerken, dass wir diese Bewegung durchaus nur bei ihrem ersten Beginnen, gewissermassen nur im ersten Moment ihres Entstehens betrachten wollen, sein Schwerpunkt nothwendig in vollkommener Ruhe befinden, und man wird die fernere Bewegung des Schiffs als eine drehende Bewegung desselben um seinen als einen festen Drehpunkt gedachten Schwerpunkt zu betrachten haben, so dass also auch die fernere Drehung des Schiffs um seinen Schwerpunkt gar nicht mehr eine Wirkung der durch den Schwerpunkt des Schiffs gehenden, seinem Gewichte gleichen, nach vertikaler Richtung abwärts wirkenden Kraft, sondern nur eine Wirkung der durch den Schwerpunkt des eingetauchten Theils gehenden, dem Gewichte des verdrängten Wassers gleichen, nach vertikaler Richtung aufwärts wirkenden Kraft sein, und daher bei der Drehung des Schiffs um seinen als fest gedachten Schwerpunkt auch nur diese letztere Kraft in Betracht kommen kann. Geht zuvörderst auch die Richtung dieser letzteren Kraft durch den Schwerpunkt des Schiffs, oder mit anderen Worten, liegen der Schwerpunkt des Schiffs und der Schwerpunkt seines eingetauchten Theils in einer und derselben Vertikallinie, so wird natürlich gar keine Drehung des Schiffs um seinen Schwerpunkt erfolgen, und dasselbe wird daher unter den gemachten Voraussetzungen, d. h. wenn das Gewicht

des ganzen Schiffs dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist und der Schwerpunkt des Schiffs mit dem Schwerpunkte seines eingetauchten Theils in einer und derselben vertikalen geraden Linie liegt, in vollkommener Ruhe auf dem Wasser schwimmen. Wenn aber der Schwerpunkt des Schiffs und der Schwerpunkt seines eingetauchten Theils nicht in einer und derselben vertikalen geraden Linie liegen, so wird die durch den Schwerpunkt des eingetauchten Theils gehende, dem Gewichte des verdrängten Wassers gleiche, nach vertikaler Richtung aufwärts wirkende Kraft eine Drehung des Schiffs um seinen als ruhend gedachten Schwerpunkt hervorbringen, und da die vertikale Richtung dieser letzteren Kraft ganz in der durch den als ruhenden Drehpunkt gedachten Schwerpunkt des Schiffs und den Schwerpunkt des eingetauchten Theils gehenden Vertikalebene liegt, so braucht man bei der Drehung des Schiffs um seinen ruhenden Schwerpunkt offenbar auch nur diese Vertikalebene in's Auge zu fassen, indem man von dem Schiffskörper als solchen übrigens ganz abstrahirt, und wird sich daher hieraus nun auch sogleich überzeugen, dass die Drehung des Schiffs um seinen als fest gedachten Schwerpunkt nothwendig zugleich um eine durch denselben gehende, auf der in Rede stehenden Vertikalebene senkrechte, also horizontale gerade Linie als eine feste Drehungsaxe vor sich gehen muss. Ob aber diese so eben näher charakterisirte Drehung des Schiffs in einem solchen Sinne, dass dasselbe dadurch nach und nach in die Lage, in welcher es völlig ruhig auf dem Wasser schwimmt, gebracht wird, oder in entgegengesetztem Sinne, so dass das Schiff, wie man zu sagen pflegt, völlig umschlägt, vor sich geht, und welche Bedingungen nothwendig erfüllt sein müssen, wenn entweder das Erste oder das Zweite eintreten soll, wollen wir eben in der vorliegenden Abhandlung mit aller nur möglichen Genauigkeit untersuchen, indem durch diese Untersuchungen hauptsächlich die Bedingungen festgestellt werden sollen, welche erfüllt sein müssen, wenn das durch irgend welche Ursachen bis zu einem gewissen Grade aus seiner ruhigen Gleichgewichtslage auf dem Wasser gebrachte Schiff von selbst wieder in diese Lage zurückkehren, oder die ihm mitgetheilte Bewegung nach deren Richtung hin weiter fortsetzen und völlig umschlagen soll, d. h., wie man zu sagen pflegt, ob das Schiff eine gewisse Standfähigkeit oder Stabilität*) besitzt oder nicht, deren Grösse zugleich auch in allen Fällen nach einem gewissen Maasse bestimmt werden soll. Wie wichtig aber Untersuchungen dieser Art für den Bau der Schiffe sind, wenn dieselben bei ihrem Laufe auf der See in und durch sich selbst vor Unglücksfällen möglichst sicher gestellt sein sollen, leuchtet sogleich ein und braucht kaum noch besonders hervorgehoben zu werden.

Bevor wir zu diesen Untersuchungen übergehen, wollen wir dem Obigen nur noch hinzufügen, dass, wenn die oben gemachte Voraussetzung, welche wir auch im Folgenden festhalten werden,

---

*) Auch die Steife der Schiffe genannt. Ein Schiff, welches sich sehr leicht auf die Seite neigt, heisst rank.

dass nämlich das Schiff schon bis zu dem Grade der Einsenkung in's Wasser gelangt ist, dass sein Gewicht genau mit dem Gewichte des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers übereinstimmt, nicht erfüllt ist, so lange ein Aufsteigen und Niedersteigen des Schwerpunkts des Schiffs in vertikaler geradliniger Richtung und gleichzeitige Drehungen des Schiffs um durch seinen Schwerpunkt gehende horizontale Axen Statt finden werden, bis jener Zustand, wo das Gewicht des Schiffs dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist und demzufolge der Schwerpunkt des Schiffs zur Ruhe kommt, wie wir bei den obigen Betrachtungen angenommen haben, eingetreten ist; diese Bewegungen des Schiffs aber weiter zu verfolgen, scheint ihrer Complication wegen dem Zwecke der vorliegenden Abhandlung nicht angemessen zu sein, indem es namentlich für den praktischen Schiffsbau genügen wird, die Sache nur aus dem vorher festgehaltenen Gesichtspunkte zu betrachten, dass nämlich das Gewicht des Schiffs dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist, und ein Aufsteigen und Niedersteigen des Schwerpunkts des Schiffs nicht weiter Statt findet, sondern derselbe als ruhend angenommen werden kann, und die Drehung des Schiffs um eine durch den ruhenden Schwerpunkt desselben gehende horizontale Axe vor sich geht, welche letztere auf der durch den Schwerpunkt des Schiffs und den Schwerpunkt des eingetauchten Theils gehenden Vertikalebene senkrecht steht, wobei zugleich, wie auch schon oben bemerkt worden ist, diese Drehung des Schiffs immer nur bei ihrem ersten Beginnen, gewissermassen im ersten Momente ihres Entstehens betrachtet wird, welches Alles man im Folgenden stets vor Augen zu behalten hat, wenn die betreffenden Untersuchungen mit völliger Deutlichkeit und Bestimmtheit aufgefasst und verstanden werden sollen. Allgemeinere analytische Untersuchungen über die Stabilität schwimmender Körper überhaupt werden wir vielleicht später in einer anderen, weniger als die vorliegende das unmittelbare praktische Bedürfniss im Auge habenden Abhandlung veröffentlichen.

§. 6.

Wir wollen jetzt ganz im Allgemeinen das Schiff in zwei verschiedenen Lagen auf dem Wasser betrachten. Die erste dieser beiden Lagen sei die Lage, in welcher das Schiff völlig ruhig auf dem Wasser schwimmt, und die zweite Lage sei eine andere beliebige Lage desselben, in welche es aus der ersten Lage durch Drehung um eine gewisse Axe gelangt ist, wobei wir immer annehmen, dass, so wie natürlich in der ersten Lage, auch in der zweiten Lage das Gewicht des ganzen Schiffs dem Gewichte des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers gleich sei. Im Folgenden werden wir in der Kürze die beiden so eben näher bezeichneten Lagen des Schiffs respective seine erste und seine zweite Lage nennen, und wollen nun zuvörderst die folgenden Bezeichnungen einführen.

Das Volumen und das Gewicht des ganzen Schiffs sollen respective durch V und G bezeichnet werden.

Das Volumen des unter dem Wasser befindlichen Theils des Schiffs wollen wir bei der ersten Lage desselben durch $\mathfrak{V}'$, bei der zweiten Lage dagegen durch $\mathfrak{V}_1$ bezeichnen.

Bei der Drehung des Schiffs um eine gewisse Axe aus seiner ersten in seine zweite Lage wird ein Theil desselben, welcher bei der ersten Lage sich unter dem Wasser befand, über das Wasser kommen, ein anderer Theil dagegen, welcher bei der ersten Lage über dem Wasser war, wird unter das Wasser kommen. Diese beiden Theile des Schiffs sollen respective der aufgetauchte Theil und der untergetauchte Theil*) desselben genannt werden. Das Volumen des aufgetauchten Theils wollen wir durch V', das Volumen des untergetauchten Theils dagegen durch V_1 bezeichnen.

Bezeichnet man endlich das Volumen des Körpers, welcher übrig bleibt, wenn man entweder von dem unter Wasser befindlichen Theile des Schiffs bei seiner ersten Lage den aufgetauchten Theil, oder von dem unter Wasser befindlichen Theile desselben bei seiner zweiten Lage den untergetauchten Theil wegnimmt, durch $\mathfrak{V}$, so ist nach den vorher eingeführten Bezeichnungen

$$\mathfrak{V}=\mathfrak{V}'-V',\quad \mathfrak{V}=\mathfrak{V}_1-V_1;$$

und wir haben daher auch die folgende Gleichung:

$$\mathfrak{V}'-V'=\mathfrak{V}_1-V_1.$$

Weil aber in beiden Lagen des Schiffs das Gewicht des verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wassers dem Gewichte des ganzen Schiffs gleich ist, so muss offenbar

$$\mathfrak{V}'=\mathfrak{V}_1$$

sein, und wegen der obigen Gleichung ist also auch

$$V'=V_1.$$

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz annehmen, dessen Anfangspunkt durch O bezeichnet werden mag, und wollen die Coordinaten des Schwerpunkts des ganzen Schiffs V in seiner ersten und in seiner zweiten Lage in Bezug auf das zum Grunde gelegte Coordinatensystem der xyz respective durch X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 bezeichnen. Die Coordinaten der Schwerpunkte des aufgetauchten Theils V' und des untergetauchten Theils V_1 des Schiffs seyen respective x', y', z' und x_1, y_1, z_1; die Coordinaten der Schwerpunkte der

*) Natürlich zu unterscheiden von dem eingetauchten Theile des Schiffs; s. oben.

unter dem Wasser befindlichen Theile des Schiffs bei seiner ersten und bei seiner zweiten Lage, deren Volumina durch $\mathfrak{V}'$ und $\mathfrak{V}_1$ bezeichnet worden sind, seien respective $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$; und die Coordinaten des Schwerpunkts des Körpers, dessen Volumen wir oben durch $\mathfrak{V}$ bezeichnet haben, wollen wir durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen; natürlich auch alle diese Coordinaten in Bezug auf das zum Grunde gelegte System der xyz genommen. Endlich sollen in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem die Coordinaten des Schwerpunkts des Körpers, dessen Volumen wir oben durch $\mathfrak{V}'$ bezeichnet haben, nämlich des unter dem Wasser befindlichen Theils bei seiner ersten Lage, *insofern man sich, was wohl zu beachten ist, diesen Körper als der zweiten Lage des Schiffs angehörend, oder als einen Theil des Schiffskörpers bei seiner zweiten Lage denkt*, durch $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ bezeichnet werden.

Hierzu fügen wir nun aber noch die allgemeine Bemerkung, dass, wenn im Folgenden irgend ein Theil des Schiffskörpers als homogen betrachtet wird, oder wir uns für denselben eigentlich den äquivalenten, d. h. ihm dem Volumen nach gleichen Wasserkörper gesetzt denken, den diesem Theile des Schiffskörpers entsprechenden, im Vorhergehenden eingeführten Symbolen oberhalb noch das Zeichen oder der Index w beigefügt werden soll, was übrigens natürlich auf die sich immer gleich bleibenden Volumina keine Anwendung findet.

Das zum Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem der xyz wollen wir nun in der Weise specialisiren, dass wir die Axe der z als horizontal annehmen, und wollen zugleich, was nach den im vorhergehenden Paragraphen angestellten Betrachtungen verstattet ist, voraussetzen, dass die Drehung des Schiffs um diese horizontale Axe der z erfolgt sei, wobei wir übrigens diese Axe nicht unbedingt durch den Schwerpunkt des Schiffs gehen lassen, sondern dieselbe vielmehr als eine ganz beliebige horizontale Axe auffassen; die Axe der x kann dann auch als horizontal, also die Axe der y als vertikal angenommen werden, und alle der Axe der y parallelen Kräfte werden wir im Folgenden als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem sie nach der Seite der positiven oder nach der Seite der negativen y hin wirken. Endlich wollen wir annehmen, dass die Drehung des Schiffs um die horizontale Axe der z nach derselben Richtung hin erfolgt sei, nach welcher man sich bewegen muss, wenn man von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y gelangen will, und dass bei dieser Drehung jede von der Axe der z ausgehende Ebene den nach der in Rede stehenden Richtung hin von 0^0 bis 360^0 *) wachsenden Winkel ω beschrieben habe.

Bezeichnet nun ψ einen andern gewissen von 0^0 bis 360^0 wachsenden Winkel, dessen Bedeutung aus den folgenden Glei-

*) Den Winkel ω noch weiter wachsen zu lassen, ist bei dieser Theorie unnöthig.

chungen sogleich ganz von selbst erhellen wird, weshalb wir eine besondere Erläuterung darüber zu geben der Kürze wegen unterlassen; so kann

$$X = \cos\psi\sqrt{X^2+Y^2},\quad Y = \sin\psi\sqrt{X^2+Y^2}$$

und

$$X_1 = \cos(\psi+\omega)\sqrt{X^2+Y^2},\quad Y_1 = \sin(\psi+\omega)\sqrt{X^2+Y^2};$$

also

$$X_1 = \cos\psi\cos\omega\sqrt{X^2+Y^2} - \sin\psi\sin\omega\sqrt{X^2+Y^2},$$

$$Y_1 = \sin\psi\cos\omega\sqrt{X^2+Y^2} + \cos\psi\sin\omega\sqrt{X^2+Y^2};$$

folglich

$$X_1 = X\cos\omega - Y\sin\omega,$$

$$Y_1 = X\sin\omega + Y\cos\omega,$$

$$Z_1 = Z$$

gesetzt werden.

Weil das Schiff in seiner ersten Lage als auf dem Wasser ruhig schwimmend vorausgesetzt wird, so ist offenbar mit Rücksicht auf die oben eingeführte Bezeichnungsart nach den aus dem Vorhergehenden bekannten Gesetzen:

$$X = \overset{w}{\mathfrak{x}}',\quad Z = \overset{w}{\mathfrak{z}}';$$

also nach den obigen Gleichungen:

$$X_1 = \overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega - Y\sin\omega,$$

$$Y_1 = \overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega + Y\cos\omega,$$

$$Z_1 = \overset{w}{\mathfrak{z}}'.$$

In seiner zweiten Lage wird das Schiff bekanntlich von den beiden in den Punkten $(X_1 Y_1 Z_1)$ und $(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 \overset{w}{\mathfrak{y}}_1 \overset{w}{\mathfrak{z}}_1)$ nach entgegengesetzten Seiten hin wirkenden, der Axe der y parallelen einander gleichen Kräften G und G sollicitirt. Nehmen wir von jetzt an den positiven Theil der Axe der y nach oben, den negativen Theil dieser Axe nach unten hin, so ist die in dem Punkte $(X_1 Y_1 Z_1)$ wirkende Kraft $-G$, die in dem Punkte $(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 \overset{w}{\mathfrak{y}}_1 \overset{w}{\mathfrak{z}}_1)$ wirkende Kraft dagegen ist $+G$. Betrachten wir nun die Momente dieser beiden Kräfte in Bezug auf die durch die horizontale Drehungsaxe ge-

hende vertikale Ehene der yz, oder, wie wir der Kürze wegen im Folgenden immer sagen wollen, die Momente der beiden in Rede stehenden Kräfte in Bezug auf die angenommene horizontale Drehungsaxe, als positiv oder als negativ, jenachdem sie in demselben Sinne, in welchem die Drehung des Schiffs erfolgt ist, oder in entgegengesetztem Sinne wirken; so ist das Moment der Kraft $-G$ offenbar $-GX_1$, und das Moment der Kraft $+G$ ist $+G\overset{w}{\mathfrak{x}}_1$. Bezeichnen wir also die Summe dieser beiden Momente durch S, so ist

$$S = G(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 - X_1).$$

Bezeichnet man aber die Stabilität des Schiffs in Bezug auf die angenommene horizontale Drehungsaxe, indem man dieselbe als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem das Schiff von selbst wieder in die Lage des ruhigen Schwimmens auf dem Wasser zurückkehrt oder sich weiter von dieser Lage entfernt, durch $\mathfrak{S}$, so ist offenbar $\mathfrak{S} = -S$, also

$$\mathfrak{S} = G(X_1 - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1),$$

und folglich nach dem Obigen, da

$$X_1 = \overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega - Y\sin\omega$$

war:

$$\mathfrak{S} = G(\overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega - Y\sin\omega - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1).$$

Weil der Körper $\mathfrak{V}'$, insofern man sich denselben als der zweiten Lage des Schiffs angehörend denkt, aus den beiden Theilen $\mathfrak{V}$ und V' hesteht, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{X}' = \mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{x}} + V'\overset{w}{x}',$$

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{Y}}' = \mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{y}} + V'\overset{w}{y}',$$

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{Z}}' = \mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{z}} + V'\overset{w}{z}';$$

und weil der Körper $\mathfrak{V}_1$ aus den beiden Theilen $\mathfrak{V}$ und V_1 besteht, so ist eben so nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = \mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{x}} + V_1\overset{w}{x}_1,$$

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{y}}_1 = \mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{y}} + V_1\overset{w}{y}_1;$$

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{z}}_1 = \mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{z}} + V_1\overset{w}{z}_1.$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen ergiebt sich:

$$\mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{x}}=\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{X}}'-V'\overset{w}{x}'=\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{x}}_1-V_1\overset{w}{x}_1,$$

$$\mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{y}}=\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{Y}}'-V'\overset{w}{y}'=\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{y}}_1-V_1\overset{w}{y}_1,$$

$$\mathfrak{V}\overset{w}{\mathfrak{z}}=\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{Z}}'-V'\overset{w}{z}'=\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{z}}_1-V_1\overset{w}{z}_1;$$

oder

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{X}}'-\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{x}}_1=V'\overset{w}{x}'-V_1\overset{w}{x}_1,$$

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{Y}}'-\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{y}}_1=V'\overset{w}{y}'-V_1\overset{w}{y}_1,$$

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{Z}}'-\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{z}}_1=V'\overset{w}{z}'-V_1\overset{w}{z}_1.$$

Bezeichnet aber $\overset{w}{\varphi}$ einen gewissen von 0^0 bis 360^0 wachsenden Winkel, dessen Bedeutung aus den folgenden Gleichungen sogleich ganz von selbst erhellen wird, ohne dass darüber noch eine besondere Erläuterung nöthig ist, so ist offenbar

$$\overset{w}{\mathfrak{x}}'=\cos\overset{w}{\varphi}\sqrt{\overset{w}{\mathfrak{x}}'^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'^2},\quad \overset{w}{\mathfrak{y}}'=\sin\overset{w}{\varphi}\sqrt{\overset{w}{\mathfrak{x}}'^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'^2}$$

und

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}'=\cos(\overset{w}{\varphi}+\omega)\sqrt{\overset{w}{\mathfrak{x}}'^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'^2},\quad \overset{w}{\mathfrak{Y}}'=\sin(\overset{w}{\varphi}+\omega)\sqrt{\overset{w}{\mathfrak{x}}'^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'^2};$$

also

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}'=\cos\overset{w}{\varphi}\cos\omega\sqrt{\overset{w}{\mathfrak{x}}'^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'^2}-\sin\overset{w}{\varphi}\sin\omega\sqrt{\overset{w}{\mathfrak{x}}'^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'^2},$$

$$\overset{w}{\mathfrak{Y}}'=\sin\overset{w}{\varphi}\cos\omega\sqrt{\overset{w}{\mathfrak{x}}'^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'^2}+\cos\overset{w}{\varphi}\sin\omega\sqrt{\overset{w}{\mathfrak{x}}'^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'^2};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}'=\overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega-\overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega,$$

$$\overset{w}{\mathfrak{Y}}'=\overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega+\overset{w}{\mathfrak{y}}'\cos\omega,$$

$$\overset{w}{\mathfrak{Z}}'=\overset{w}{\mathfrak{z}}'.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{V}'(\overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega-\overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega)-\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{x}}_1=V'\overset{w}{x}'-V_1\overset{w}{x}_1,$$

$$\mathfrak{V}'(\overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega+\overset{w}{\mathfrak{y}}'\cos\omega)-\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{y}}_1=V'\overset{w}{y}'-V_1\overset{w}{y}_1,$$

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{z}}'-\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{z}}_1=V'\overset{w}{z}'-V_1\overset{w}{z}_1;$$

also

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{x}}_1=\mathfrak{V}'(\overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega-\overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega)-V'\overset{w}{x}'+V_1\overset{w}{x}_1,$$

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{y}}_1=\mathfrak{V}'(\overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega+\overset{w}{\mathfrak{y}}'\cos\omega)-V'\overset{w}{y}'+V_1\overset{w}{y}_1,$$

$$\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{z}}_1=\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{z}}'-V'\overset{w}{z}'+V_1\overset{w}{z}_1;$$

folglich

$$\mathfrak{S}=G\Big\{\frac{\mathfrak{V}_1-\mathfrak{V}'}{\mathfrak{V}_1}\overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega-\Big(Y-\frac{\mathfrak{V}'}{\mathfrak{V}_1}\overset{w}{\mathfrak{y}}'\Big)\sin\omega+\frac{V'}{\mathfrak{V}_1}\overset{w}{x}'-\frac{V_1}{\mathfrak{V}_1}\overset{w}{x}_1\Big\}.$$

Weil nun aber, wie wir oben gesehen haben,

$$\mathfrak{V}'=\mathfrak{V}_1 \text{ und } V'=V_1$$

ist, so ist

$$\mathfrak{S}=-G\Big\{(Y-\overset{w}{\mathfrak{y}}')\sin\omega-\frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1)\Big\}$$

oder

$$\mathfrak{S}=-G\Big\{(Y-\overset{w}{\mathfrak{y}}')\sin\omega-\frac{V_1}{\mathfrak{V}_1}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1)\Big\}.$$

Die ganze Figur im Raume wollen wir uns jetzt auf die Ebene der xy projicirt denken, und von nun an auch nur diese Projection auf der Ebene der xy, welche letztere bekanntlich auf der angenommenen Drehungsaxe senkrecht steht, in's Auge fassen. Legen wir nun durch den Punkt $(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1\overset{w}{\mathfrak{y}}_1)$ eine vertikale und durch den Punkt $(X_1 Y_1)$ eine auf der durch die Gleichung

$$y=x\tang\omega$$

charakterisirten geraden Linie senkrecht stehende gerade Linie, so ist die Gleichung der ersten dieser beiden geraden Linien

$$x=\overset{w}{\mathfrak{x}}_1,$$

und die Gleichung der zweiten Linie hat die Form

$$y-Y_1=A(x-X_1),$$

wo, weil diese Linie auf der durch die Gleichung

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\omega$$

charakterisirten geraden Linie senkrecht stehen soll,

$$1 + A\,\mathrm{tang}\,\omega = 0, \quad A = -\cot\omega;$$

folglich die Gleichung der zweiten der beiden in Rede stehenden geraden Linien

$$y - Y_1 = -(x - X_1)\cot\omega$$

ist.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden durch die Gleichungen

$$x = \overset{w}{\mathfrak{x}}_1 \text{ und } y - Y_1 = -(x - X_1)\cot\omega$$

charakterisirten geraden Linien durch x, y selbst, so müssen wir x, y aus den beiden vorstehenden Gleichungen mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination bestimmen, was sogleich

$$x = \overset{w}{\mathfrak{x}}_1, \quad y = Y_1 - (\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 - X_1)\cot\omega$$

giebt; und weil nun nach dem Obigen

$$\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}_1}(\overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega - \overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega) - \frac{V'}{\mathfrak{Y}_1}\overset{w}{x}' + \frac{V_1}{\mathfrak{Y}_1}x_1,$$

d. i.

$$\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = \overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega - \overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega - \frac{V'}{\mathfrak{Y}'}(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1),$$

und

$$X_1 = \overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega - Y\sin\omega,$$

$$Y_1 = \overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega + Y\cos\omega$$

ist; so ist

$$x = \overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega - \overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega - \frac{V'}{\mathfrak{Y}'}(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1),$$

$$y = \overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega + \overset{w}{\mathfrak{y}}'\cos\omega + \frac{V'}{\mathfrak{Y}'}(\overset{w}{x}' - \overset{w}{x}_1)\cot\omega.$$

Nehmen wir nun die von dem Anfange der xy ausgehende gerade Linie, welche mit dem positiven Theile der Axe der x nach der Seite des positiven Theils der Axe der y hin den Winkel ω einschliesst, als den positiven Theil der Axe der (x) eines

neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $(x)(y)$ an, in welchem der positive Theil der Axe der (y) so angenommen wird, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der (x) durch den rechten Winkel $((x)(y))$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der (y) zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, und bezeichnen die Coordinaten desselben Punktes, dessen Coordinaten in dem Systeme der xy vorher durch x, y bezeichnet worden sind, in dem Systeme der $(x)(y)$ durch (x), (y), einen gewissen von 0^0 bis 360^0 wachsenden Winkel, dessen Bedeutung sogleich aus den folgenden Gleichungen ganz von selbst erhellen wird, aber durch χ; so ist offenbar

$$(x)=\cos\chi\sqrt{x^2+y^2},\quad (y)=\sin\chi\sqrt{x^2+y^2}$$

und

$$x=\cos(\omega+\chi)\sqrt{x^2+y^2},\quad y=\sin(\omega+\chi)\sqrt{x^2+y^2};$$

also

$$x=\cos\omega\cos\chi\sqrt{x^2+y^2}-\sin\omega\sin\chi\sqrt{x^2+y^2},$$

$$y=\sin\omega\cos\chi\sqrt{x^2+y^2}+\cos\omega\sin\chi\sqrt{x^2+y^2};$$

d. i.

$$x=(x)\cos\omega-(y)\sin\omega,$$

$$y=(x)\sin\omega+(y)\cos\omega;$$

und folglich, wie man hieraus leicht findet:

$$(x)=\ \ x\cos\omega+y\sin\omega,$$

$$(y)=-x\sin\omega+y\cos\omega.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$(x)=\overset{w}{\mathfrak{x}}'\cos\omega^2-\overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega\cos\omega-\frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1)\cos\omega$$

$$+\overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega^2+\overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega\cos\omega+\frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1)\cos\omega,$$

$$(y)=-\overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega\cos\omega+\overset{w}{\mathfrak{y}}'\sin\omega^2+\frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1)\sin\omega$$

$$+\overset{w}{\mathfrak{x}}'\sin\omega\cos\omega+\overset{w}{\mathfrak{y}}'\cos\omega^2+\frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1)\cos\omega\cot\omega;$$

d. i.

$$(x)=\overset{w}{\mathfrak{x}}', \quad (y)=\overset{w}{\mathfrak{y}}'+\frac{V'}{\mathfrak{V}'}\cdot\frac{\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1}{\sin\omega}.$$

Folglich ist

$$Y-(y)=Y-\overset{w}{\mathfrak{y}}'-\frac{V'}{\mathfrak{V}'}\cdot\frac{\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1}{\sin\omega},$$

und daher

$$\{Y-(y)\}\sin\omega=(Y-\overset{w}{\mathfrak{y}}')\sin\omega-\frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1);$$

also nach dem Obigen

$$\mathfrak{S}=-G\{Y-(y)\}\sin\omega.$$

Denken wir uns das Schiff in seine erste Lage zurückgeführt, und bezeichnen die, jenachdem der durch die Coordinaten x, y, oder (x), (y) bestimmte Punkt in dieser Lage des Schiffs über oder unter der Projection seines Schwerpunkts auf der Ebene der xy oder $(x)(y)$ liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung des durch die Coordinaten x, y oder (x), (y) bestimmten Punktes von der Projection des Schwerpunkts des ganzen Schiffs auf der Ebene der xy oder $(x)(y)$ durch u; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar in völliger Allgemeinheit

$$(y)=Y+u,$$

also

$$u=(y)-Y, \quad -u=Y-(y);$$

folglich nach dem Obigen

$$\mathfrak{S}=Gu\sin\omega.$$

Bezeichnen wir die, jenachdem die Projection des Schwerpunkts des eingetauchten Theils $\mathfrak{V}'$ des Schiffs bei seiner ersten Lage, d. h. bekanntlich immer die Projection des Schwerpunkts des von dem Schiffe bei seiner ersten Lage verdrängten oder aus der Stelle vertriebenen Wasserkörpers, auf der Ebene der xy über oder unter der Projection des Schwerpunkts des ganzen Schiffs bei seiner ersten Lage auf der Ebene der xy liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung der Projection des Schwerpunkts des eingetauchten Theils $\mathfrak{V}'$ des Schiffs bei seiner ersten Lage auf der Ebene der xy von der Projection des Schwerpunkts des ganzen Schiffs bei seiner ersten Lage auf der Ebene der xy durch v; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

$$\overset{w}{y'} = Y + v,$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$(y) = Y + u$$

ist:

$$(y) - \overset{w}{y'} = u - v.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$(y) = \overset{w}{y'} + \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega},$$

d. i.

$$(y) - \overset{w}{y'} = u - v = \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega};$$

also

$$u = v + \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega},$$

und folglich, wenn man dies in den obigen Ausdruck der Stabilität einführt:

$$\mathfrak{S} = G\,(v + \frac{V'}{\mathfrak{V}'} \cdot \frac{\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}}{\sin\omega})\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + \frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1})\}.$$

Bezeichnet man endlich die mit dem gehörigen Zeichen genommene horizontale Entfernung der Projection des Schwerpunkts des als aus Wasser bestehend gedachten aufgetauchten Theils auf der Ebene der xy von der Projection des Schwerpunkts des als aus Wasser bestehend gedachten untergetauchten Theils auf der Ebene der xy durch $\mathfrak{v}$; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

$$\overset{w}{x'} = \overset{w}{x_1} + \mathfrak{v}, \quad \overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1} = \mathfrak{v};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{S} = G(\frac{V'}{\mathfrak{V}'}\mathfrak{v} + v\sin\omega).$$

Bezeichnen wir das Gewicht einer Volumeneinheit Wasser mit $\bar{\omega}$, so ist, da das Gewicht des ganzen Schiffs dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist,

$$G=\bar{\omega}\mathfrak{V}',$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\mathfrak{V}'u\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}(V'\mathfrak{v}+\mathfrak{V}'v\sin\omega).$$

Noch einen anderen bemerkenswerthen, und in manchen Fällen eine vortheilhafte Anwendung gestattenden Ausdruck für die Stabilität kann man auf folgende Art entwickeln.

Nach dem Obigen ist

$$\mathfrak{V}'\overset{w}{\mathfrak{X}'}-\mathfrak{V}_1\overset{w}{\mathfrak{x}_1}=V'\overset{w}{x'}-V_1\overset{w}{x_1},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\mathfrak{V}'=\mathfrak{V}_1,\quad V'=V_1$$

ist:

$$\mathfrak{V}'(\overset{w}{\mathfrak{X}'}-\overset{w}{\mathfrak{x}_1})=V'(\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1})$$

oder

$$\mathfrak{V}_1(\overset{w}{\mathfrak{X}'}-\overset{w}{\mathfrak{x}_1})=V_1(\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1}).$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{S}=G\{v\sin\omega+\frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1})\}$$

ist, so ist auch

$$\mathfrak{S}=G(\overset{w}{\mathfrak{X}'}-\overset{w}{\mathfrak{x}_1}+v\sin\omega).$$

Nach dem Obigen ist aber auch

$$\overset{w}{\mathfrak{X}'}=(\overset{w}{\mathfrak{X}'})\cos\omega-(\overset{w}{\mathfrak{Y}'})\sin\omega,$$

$$\overset{w}{\mathfrak{x}_1}=(\overset{w}{\mathfrak{x}_1})\cos\omega-(\overset{w}{\mathfrak{y}_1})\sin\omega;$$

wo die Coordinaten $(\overset{w}{\mathfrak{X}'})$, $(\overset{w}{\mathfrak{Y}'})$ und $(\overset{w}{\mathfrak{x}_1})$, $(\overset{w}{\mathfrak{y}_1})$ den durch die Coor-

dinaten $\overset{w}{\mathfrak{X}}'$, $\overset{w}{\mathfrak{Y}}'$ und $\overset{w}{\mathfrak{x}}_1$, $\overset{w}{\mathfrak{y}}_1$ im Systeme der xy bestimmten Punkten im Systeme der $(x)(y)$ angehören sollen; also ist

$$\overset{w}{\mathfrak{X}}'-\overset{w}{\mathfrak{x}}_1=[(\overset{w}{\mathfrak{X}}')-(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1)]\cos\omega-[(\overset{w}{\mathfrak{Y}}')-(\overset{w}{\mathfrak{y}}_1)]\sin\omega,$$

und folglich

$$\mathfrak{S}=G\{v\sin\omega+[(\overset{w}{\mathfrak{X}}')-(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1)]\cos\omega-[(\overset{w}{\mathfrak{Y}}')-(\overset{w}{\mathfrak{y}}_1)]\sin\omega\},$$

oder

$$\mathfrak{S}=\varpi\mathfrak{V}'\{v\sin\omega+[(\overset{w}{\mathfrak{X}}')-(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1)]\cos\omega-[(\overset{w}{\mathfrak{Y}}')-(\overset{w}{\mathfrak{y}}_1)]\sin\omega\}.$$

Weil bekanntlich

$$v=\overset{w}{x}'-\overset{w}{x}_1$$

ist, so ist auch

$$v=\frac{\mathfrak{V}'}{V'}(\overset{w}{\mathfrak{X}}'-\overset{w}{\mathfrak{x}}_1),$$

also

$$V'v=\mathfrak{V}'\{[(\overset{w}{\mathfrak{X}}')-(\overset{w}{\mathfrak{x}}_1)]\cos\omega-[(\overset{w}{\mathfrak{Y}}')-(\overset{w}{\mathfrak{y}}_1)]\sin\omega\}.$$

Wir werden späterhin von diesen Ausdrücken Anwendung zu machen Gelegenheit finden.

§. 7.

Weil wir die Drehungsaxe, d. h. die Axe der z, als horizontal angenommen haben, so ist klar, dass der aufgetauchte und der untergetauchte Theil in einer der Axe der z parallelen geraden Linie mit einander zusammenstossen müssen. Diese gerade Linie wollen wir jetzt als die Axe der ζ eines dem Systeme der xyz parallelen Coordinatensystems der $\xi\eta\zeta$ annehmen, indem wir zugleich den Anfang dieses neuen Coordinatensystems in den Endpunkt der in Rede stehenden geraden Linie, so weit dieselbe dem aufgetauchten und dem untergetauchten Theile gemeinschaftlich angehört, verlegen, von welchem aus dieselbe nach der Seite der positiven z oder ζ hin liegt; auch wollen wir die ihrer Länge nach bestimmte gerade Linie, in welcher der aufgetauchte und der untergetauchte Theil mit einander zusammenstossen, durch a bezeichnen. Von dem auf die vorher angegebene Weise bestimmten Anfangspunkte der $\xi\eta\zeta$ an theile man nun die Linie a in n einander gleiche Theile ein, deren jeder durch i bezeichnet wer-

den mag, und nehme an, dass in Bezug auf die Curve, in welcher die horizontale Wasserfläche von der Oberfläche des Schiffs bei seiner ersten Lage geschnitten wird, den Werthen

$$0,\ i,\ 2i,\ 3i,\ 4i, \ldots ni;$$

wo $ni = a$ ist, von ζ als Abscissen für den aufgetauchten und für den untergetauchten Theil, welche zwei Theile wir hier immer als homogen oder als aus Wasser bestehend betrachten, respective die Werthe

$$\overset{0}{\xi}',\ \overset{1}{\xi}',\ \overset{2}{\xi}',\ \overset{3}{\xi}',\ \overset{4}{\xi}', \ldots \overset{n}{\xi}'$$

und

$$\overset{0}{\xi}_1,\ \overset{1}{\xi}_1,\ \overset{2}{\xi}_1,\ \overset{3}{\xi}_1,\ \overset{4}{\xi}_1, \ldots \overset{n}{\xi}_1$$

von ξ als Ordinaten entsprechen. Setzen wir nun voraus, dass ω unendlich klein sei, und bezeichnen den diesen Winkel messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise durch (ω), so ergiebt sich, da wir die auf der Axe der ζ senkrecht stehenden Schnitte des aufgetauchten und des untergetauchten Theils mit desto grösserer Genauigkeit, je kleiner der Winkel ω ist, als Kreissectoren betrachten können, nach bekannten Sätzen aus der Lehre vom Kreise und aus der Lehre vom Schwerpunkte, dass, wenn wir die ξ der Schwerpunkte des aufgetauchten Theils V' und des untergetauchten Theils V_1 respective durch ξ' und ξ_1 bezeichnen, die Grössen

$$V'\xi' \text{ und } V_1\xi_1$$

die Gränzen sind, denen respective die Grössen

$$\frac{1}{2} i \overset{0}{\xi}'^2 (\omega) \cdot \frac{4\overset{0}{\xi}' \sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)} \cos\frac{1}{2}\omega$$

$$+ \frac{1}{2} i \overset{1}{\xi}'^2 (\omega) \cdot \frac{4\overset{1}{\xi}' \sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)} \cos\frac{1}{2}\omega$$

$$+ \frac{1}{2} i \overset{2}{\xi}'^2 (\omega) \cdot \frac{4\overset{2}{\xi}' \sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)} \cos\frac{1}{2}\omega$$

u. s. w.

$$+ \frac{1}{2} i \overset{n-1}{\xi}'^2 (\omega) \cdot \frac{4\overset{n-1}{\xi}' \sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)} \cos\frac{1}{2}\omega$$

und

$$\frac{1}{2}i\overset{0}{\xi_1}{}^2(\omega).\frac{4\overset{0}{\xi_1}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

$$+\frac{1}{2}i\overset{1}{\xi_1}{}^2(\omega).\frac{4\overset{1}{\xi_1}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

$$+\frac{1}{2}i\overset{2}{\xi_1}{}^2(\omega).\frac{4\overset{2}{\xi_1}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{2}i\overset{n-1}{\xi_1}{}^2(\omega).\frac{4\overset{n-1}{\xi_1}\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega,$$

d. i. respective die Grössen

$$\frac{1}{3}i(\overset{0}{\xi'}{}^3+\overset{1}{\xi'}{}^3+\overset{2}{\xi'}{}^3+\overset{3}{\xi'}{}^3+\ldots+\overset{n-1}{\xi'}{}^3)\sin\omega$$

und

$$\frac{1}{3}i(\overset{0}{\xi_1}{}^3+\overset{1}{\xi_1}{}^3+\overset{2}{\xi_1}{}^3+\overset{3}{\xi_1}{}^3+\ldots+\overset{n-1}{\xi_1}{}^3)\sin\omega$$

sich nähern, wenn n in's Unendliche wächst, oder, was dasselbe ist, wenn i in's Unendliche abnimmt oder sich der Null nähert.

Setzen wir aber allgemein für den aufgetauchten Theil

$$\xi=F(\zeta),$$

und für den untergetauchten Theil

$$\xi=f(\zeta);$$

so ist

$$\overset{0}{\xi'}=F(0),\quad \overset{1}{\xi'}=F(i),\quad \overset{2}{\xi'}=F(2i),\ldots\overset{n-1}{\xi'}=F((n-1)i);$$

$$\overset{0}{\xi_1}=f(0),\quad \overset{1}{\xi_1}=f(i),\quad \overset{2}{\xi_1}=f(2i),\ldots\overset{n-1}{\xi_1}=f((n-1)i);$$

und

$$V'\xi'\text{ und }V_1\xi_1$$

sind also die Gränzen, denen respective

$$\frac{1}{3}i\{(F(0))^3+(F(i))^3+(F(2i))^3+\ldots+(F((n-1)i))^3\}\sin\omega$$

und

$$\frac{1}{3}i\{(f(0))^3+(f(i))^3+(f(2i))^3+\ldots+(f((n-1)i))^3\}\sin\omega,$$

oder, was offenbar ganz dasselbe ist, respective

$$\frac{1}{3}i\{(F(0))^3+(F(i))^3+(F(2i))^3+\ldots+(F(ni))^3\}\sin\omega$$

und

$$\frac{1}{3}i\{(f(0))^3+(f(i))^3+(f(2i))^3+\ldots+(f(ni))^3\}\sin\omega$$

sich nähern, wenn i sich der Null nähert. Weil nun $ni=a$ ist, so sind nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen die Gränzen, denen die Grössen

$$\frac{1}{3}i\{(F(0))^3+(F(i))^3+(F(2i))^3+\ldots+(F(ni))^3\}.\sin\omega$$

und

$$\frac{1}{3}i\{(f(0))^3+(f(i))^3+(f(2i))^3+\ldots+(f(ni))^3\}\sin\omega$$

sich nähern, wenn i sich der Null nähert, respective die mit der hier natürlich als constant zu betrachtenden Grösse $\frac{1}{3}\sin\omega$ multiplicirten bestimmten Integrale

$$\int_0^a (F(\zeta))^3\partial\zeta \text{ und } \int_0^a (f(\zeta))^3\partial\zeta;$$

und es ist also

$$V'\xi'=\frac{1}{3}\sin\omega\int_0^a (F(\zeta))^3\partial\zeta,$$

$$V_1\xi_1=\frac{1}{3}\sin\omega\int_0^a (f(\zeta))^3\partial\zeta;$$

folglich, weil bekanntlich $V'=V_1$ ist:

$$V'(\xi'-\xi_1)=\frac{1}{3}\sin\omega\int_0^a \{(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3\}\partial\zeta$$

oder

$$V'.\frac{\xi'-\xi_1}{\sin\omega}=\frac{1}{3}\int_0^a\{(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3\}\partial\zeta.$$

Wegen der Parallelität der beiden Coordinatensysteme der xyz und $\xi\eta\zeta$ ist

$$\xi'-\xi_1=\overset{w}{x}{}'-\overset{w}{x}_1,$$

also

$$V'.\frac{\overset{w}{x}{}'-\overset{w}{x}_1}{\sin\omega}=\frac{1}{3}\int_0^a\{(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3\}\partial\zeta$$

oder, weil

$$\overset{w}{x}{}'-\overset{w}{x}_1=v$$

gesetzt worden ist:

$$V'.\frac{v}{\sin\omega}=\frac{1}{3}\int_0^a\{(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3\}\partial\zeta$$

oder

$$V'v=\frac{1}{3}\sin\omega\int_0^a\{(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3\}\partial\zeta.$$

Folglich ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$u=v+\frac{\int_0^a\{(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3\}\partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}$$

und

$$\mathfrak{S}=Gu\sin\omega=G\{v+\frac{\int_0^a[(F(\zeta))^3-(f(\zeta)^3)]\partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S}=\overline{\omega}\mathfrak{V}'u\sin\omega=\overline{\omega}\{\mathfrak{V}'v+\frac{1}{3}\int_0^a[(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3]\partial\zeta\}\sin\omega.$$

Weil ω als unendlich klein angenommen worden ist, so kann man auch

$$\mathfrak{S}=Gu(\omega)=G\{v+\frac{\int_0^a[(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3]\partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}(\omega)$$

oder

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\mathfrak{V}'u(\omega)=\bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v+\frac{1}{3}\int_0^a[(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3]\partial\zeta\}(\omega),$$

oder, wenn ω in Secunden ausgedrückt angenommen wird, folglich

$$(\omega)=\omega\,\mathrm{Arc}\,1''$$

ist:

$$\mathfrak{S}=Gu\omega\,\mathrm{Arc}1''=G\{v+\frac{\int_0^a[(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3]\partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}\omega\,\mathrm{Arc}\,1''$$

oder

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\mathfrak{V}'u\omega\,\mathrm{Arc}1''=\bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v+\frac{1}{3}\int_0^a[(F(\zeta))^3-(f(\zeta))^3]\partial\zeta\}\omega\,\mathrm{Arc}1''$$

setzen. Bekanntlich ist

$$\mathrm{Arc}1''=\frac{1}{206264,8}.$$

Wenn die Linie, in welcher die horizontale Wasserfläche von der Oberfläche des Schiffs in seiner ersten Lage geschnitten wird, von einer geraden Linie, gewissermassen als Axe, in zwei einander völlig gleiche und ähnliche Theile getheilt, und die Drehungsaxe oder die Axe der z dieser Linie parallel angenommen wird, so kann, wie leicht erhellet, immer unter Voraussetzung eines unendlich kleinen ω, nur dann, wie es erforderlich ist, $V'=V_1$ sein, wenn der aufgetauchte und untergetauchte Theil in der in Rede stehenden geraden Linie oder Axe mit einander zusammenstossen, d. h. wenn mit dieser Linie die Axe der ζ zusammenfällt, und folglich allgemein

$$F(\zeta)=-f(\zeta),\quad f(\zeta)=-F(\zeta)$$

ist. Also ist unter der gemachten Voraussetzung nach dem Obigen

$$u=v+\frac{2\int_0^a(F(\zeta))^3\partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}$$

$$=v-\frac{2\int_0^a(f(\zeta))^3\partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}$$

oder

$$u = v + \frac{\int_0^a (2F(\zeta))^3 \partial\zeta}{12\mathfrak{V}'}$$

$$= v - \frac{\int_0^a (2f(\zeta))^3 \partial\zeta}{12\mathfrak{V}'}$$

und

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega = G\{v + \frac{2\int_0^a (F(\zeta))^3 \partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}\sin\omega$$

$$= G\{v - \frac{2\int_0^a (f(\zeta))^3 \partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega = G\{v + \frac{\int_0^a (2F(\zeta))^3 \partial\zeta}{12\mathfrak{V}'}\}\sin\omega$$

$$= G\{v - \frac{\int_0^a (2f(\zeta))^3 \partial\zeta}{12\mathfrak{V}'}\}\sin\omega.$$

Auch ist

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\mathfrak{V}'u\sin\omega = \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v + \frac{2}{3}\int_0^a (F(\zeta))^3 \partial\zeta\}\sin\omega$$

$$= \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v - \frac{2}{3}\int_0^a (f(\zeta))^3 \partial\zeta\}\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega}\mathfrak{V}'u\sin\omega = \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v + \frac{1}{12}\int_0^a (2F(\zeta))^3 \partial\zeta\}\sin\omega$$

$$= \bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v - \frac{1}{12}\int_0^a (2f(\zeta))^3 \partial\zeta\}\sin\omega.$$

Endlich ist, wenn ω in Secunden ausgedrückt ist:

$$\mathfrak{S} = Gu\omega \operatorname{Arc} 1'' = G\{v + \frac{2\int_0^a (F(\zeta))^3 \partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}\omega \operatorname{Arc} 1''$$

$$= G\{v - \frac{2\int_0^a (f(\zeta))^3 \partial\zeta}{3\mathfrak{V}'}\}\omega \operatorname{Arc} 1''$$

oder

$$\mathfrak{S} = Gu\omega \operatorname{Arc} 1'' = G\{v + \frac{\int_0^a (2F(\zeta))^3 \partial\zeta}{12\mathfrak{V}'}\}\omega \operatorname{Arc} 1''$$

$$= G\{v - \frac{\int_0^a (2f(\zeta))^3 \partial\zeta}{12\mathfrak{V}'}\}\omega \operatorname{Arc} 1'',$$

und

$$\mathfrak{S} = \overline{\omega}\mathfrak{V}'u\omega \operatorname{Arc} 1'' = \overline{\omega}\{\mathfrak{V}'v + \frac{2}{3}\int_0^a (F(\zeta))^3 \partial\zeta\}\omega \operatorname{Arc} 1''$$

$$= \overline{\omega}\{\mathfrak{V}'v - \frac{2}{3}\int_0^a (f(\zeta))^3 \partial\zeta\}\omega \operatorname{Arc} 1''$$

oder

$$\mathfrak{S} = \overline{\omega}\mathfrak{V}'u\omega \operatorname{Arc} 1'' = \overline{\omega}\{\mathfrak{V}'v + \frac{1}{12}\int_0^a (2F(\zeta))^3 \partial\zeta\}\omega \operatorname{Arc} 1''$$

$$= \overline{\omega}\{\mathfrak{V}'v - \frac{1}{12}\int_0^a (2f(\zeta))^3 \partial\zeta\}\omega \operatorname{Arc} 1''.$$

§. 8.

Wenn alle auf der Drehungsaxe senkrecht stehenden Schnitte des Schiffs einander gleiche und ähnliche ebene Figuren sind, und diese Figuren auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit sämmtlich vollständig mit einander übereinstimmen, so kann man, wie aus den in §. 6. entwickelten allgemeinen Formeln und aus der Lehre vom Schwerpunkte sogleich erhellet, alle in diesen Formeln vorkommenden Grössen, natürlich mit Ausnahme der

immer das Gewicht des ganzen Schiffs bezeichnenden Grösse G, auf nur einen dieser einander gleichen und ähnlichen und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit vollständig mit einander übereinstimmenden Schnitte, als eine ebene Figur betrachtet, den wir unserer ferneren Betrachtung zum Grunde legen wollen, beziehen. Daher ist nach §. 6. unter dieser Voraussetzung

$$u = v + \frac{V'}{\mathfrak{V}'}\cdot\frac{\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1}}{\sin\omega} = v + \frac{V'}{\mathfrak{V}'}\cdot\frac{\mathfrak{v}}{\sin\omega}$$

und

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega$$
$$= G\{v\sin\omega + \frac{V'}{\mathfrak{V}'}(\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1})\} = G(\frac{V'}{\mathfrak{V}'}\mathfrak{v} + v\sin\omega),$$

so wie auch

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + [(\overset{w}{\mathfrak{X}'})-(\overset{w}{\mathfrak{x}_1})]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}'})-(\overset{w}{\mathfrak{y}_1})]\sin\omega\}.$$

Genügt nun zugleich der Schiffskörper der am Ende des vorhergehenden Paragraphen zum Grunde gelegten Bedingung, wird ferner wie dort die Drehungsaxe der geraden Linie, welche die Durchschnittslinie der Oberfläche des Schiffs in seiner ersten Lage mit der horizontalen Wasserfläche in zwei völlig gleiche und ähnliche Theile theilt, parallel angenommen, und bezeichnet, dies vorausgesetzt, ϱ die Länge der geraden Linie, in welcher von dem unserer Betrachtung zum Grunde gelegten Schnitte des Schiffs in dessen erster Lage die horizontale Wasserfläche geschnitten wird; so ist, weil immer angenommen worden ist, dass die Drehung des Schiffs um die Drehungsaxe in demselben Sinne erfolgt sei, in welchem man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y, welcher bekanntlich nach oben hin gerichtet angenommen worden ist, zu gelangen, also die positiven ersten Coordinaten, wenn man sie sich vom Mittelpunkte der in Rede stehenden geraden Linie ausgehend denkt, nach der Seite des aufgetauchten Theils hin genommen werden müssen, für ein unendlich kleines ω offenbar nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1}=\mathfrak{v}=\frac{2\varrho\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega-\{-\frac{2\varrho\sin\frac{1}{2}\omega}{3(\omega)}\cos\frac{1}{2}\omega\},$$

d. i.

$$\overset{w}{x'}-\overset{w}{x_1}=\mathfrak{v}=\frac{2\varrho\sin\omega}{3(\omega)}.$$

Nun ist aber

$$V' = \frac{1}{8}\varrho^2(\omega),$$

also

$$V'(\overset{w}{x'} - \overset{w}{x_1}) = V'v = \frac{1}{12}\varrho^3 \sin\omega,$$

folglich nach dem Obigen:

$$u = v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'},$$

also

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega = G\left(v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\right)\sin\omega,$$

oder

$$\mathfrak{S} = Gu(\omega) = G\left(v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\right)(\omega),$$

oder, wenn ω in Secunden ausgedrückt ist:

$$\mathfrak{S} = Gu\omega \operatorname{Arc}1'' = G\left(v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\right)\omega \operatorname{Arc}1''.$$

Der in der durch den Schwerpunkt des Schnitts in seiner ersten Lage gehenden Vertikale oder, was dasselbe ist, der in der durch die Schwerpunkte des Schnitts und seines eingetauchten Theils in der ersten Lage des Schnitts gehenden geraden Linie liegende Punkt, dessen nach dem Obigen gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung von dem Schwerpunkte des Schnitts die von ω, welches aber jetzt immer als unendlich klein betrachtet worden ist, so dass das Schiff nur eine unendlich kleine Drehung erlitten hat, ganz unabhängige völlig bestimmte Grösse

$$u = v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}$$

ist, ist zuerst von Bouguer in dem Traité du navire. Paris. 1746. 4. p. 257. das Metacentrum des Schnitts genannt worden, und da nun nach dem Obigen

$$\mathfrak{S} = Gu\sin\omega,$$

nach §. 6. aber u positiv oder negativ ist, jenachdem das Metacentrum des Schnitts über oder unter dessen Schwerpunkte liegt, so ist klar, dass unter allen vorher gemachten Voraussetzungen die Stabilität des Schiffs in Bezug auf die angenommene Drehungsaxe positiv oder negativ ist, d. h. dass dasselbe bei unendlich kleinen Drehungen von selbst wieder in die ursprüngliche

Lage des ruhigen Schwimmens zurückkehrt, oder die angefangene Drehung nach deren Richtung hin weiter fortsetzt, jenachdem das Metacentrum eines der einander gleichen und ähnlichen Schnitte des Schiffs, welche auf der Drehungsaxe senkrecht stehen, über oder unter dessen Schwerpunkte liegt, wobei man sich das Schiff in der Lage des ruhigen Schwimmens auf dem Wasser zu denken hat.

Von den in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln wollen wir nun einige Anwendungen auf specielle Fälle machen.

§. 9.

Aufgabe. Ein gerades dreiseitiges völlig gleichförmig dichtes Prisma, dessen Grundflächen gleichschenklige Dreiecke sind, schwimme so auf dem Wasser, dass in Taf. I. Fig. 1. die Grundfläche ABC, in welcher $AC=BC$ ist, sich in vertikaler Lage befindet und die Grundlinie AB des gleichschenkligen Dreiecks ABC horizontal, die Spitze C aber nach unten gekehrt ist; man soll die Stabilität dieses Prismas für auf seinen Grundflächen senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Sei $A'B'C$, wo $A'B'$ horizontal ist, der eingetauchte Theil des Dreiecks ABC, und werde, wenn CD die auf AB senkrecht stehende Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ABC ist, $AB=a$, $CD=b$ und $A'B'=x$, $CD'=y$ gesetzt. Bezeichnet dann μ das specifische Gewicht der Materie des Prismas, so ist aus bekannten Gründen

$$\Delta ABC : \Delta A'B'C = 1 : \mu,$$

also

$$\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}xy = ab : xy = 1 : \mu.$$

Nun ist aber

$$a : b = x : y,$$

also

$$y = \frac{b}{a}x, \quad x = \frac{a}{b}y;$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$ab : \frac{b}{a}x^2 = a^2 : x^2 = 1 : \mu,$$

$$ab:\frac{a}{b}y^2=b^2:y^2=1:\mu;$$

d. i.

$$x^2=\mu a^2, \quad y^2=\mu b^2;$$

also

$$x=a\sqrt{\mu}, \quad y=b\sqrt{\mu}.$$

Mit Rücksicht auf die aus dem Obigen bekannte Bedeutung von v ist aber nach einem bekannten Satze vom Schwerpunkte

$$v=-(\frac{2}{3}CD-\frac{2}{3}CD')=-\frac{2}{3}(b-y),$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$v=-\frac{2}{3}b(1-\sqrt{\mu}),$$

und folglich, weil

$$\varrho=x=a\sqrt{\mu}, \quad \mathfrak{V}'=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\mu ab$$

ist, wo wir die Bedeutung von ϱ und $\mathfrak{V}'$ aus dem vorhergehenden Paragraphen als bekannt voraussetzen, nach diesem Paragraphen

$$u=\frac{a^2\sqrt{\mu}}{6b}-\frac{2}{3}b(1-\sqrt{\mu})=\frac{a^2\sqrt{\mu}-4b^2(1-\sqrt{\mu})}{6b},$$

oder auch

$$u=\frac{(a^2+4b^2)\sqrt{\mu}-4b^2}{6b}.$$

Weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\mathfrak{S}=Gu\omega \operatorname{Arc}1''$$

ist, wo immer ω in Secunden ausgedrückt angenommen wird, so ist

$$\mathfrak{S}=G\frac{(a^2+4b^2)\sqrt{\mu}-4b^2}{6b}\omega \operatorname{Arc}1'',$$

oder, wenn man $a=2\alpha$, $b=\beta$ setzt:

$$\mathfrak{S}=2G\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu}-\beta^2}{3\beta}\omega \operatorname{Arc}1''.$$

Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, so ist $\beta^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2$, und folglich, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{S} = 2\alpha G \frac{4\sqrt{\mu}-3}{3\sqrt{3}} \omega \operatorname{Arc} 1''.$$

Wenn in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC der Winkel ACB ein rechter Winkel ist, so ist $\beta = \alpha$, und folglich, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{S} = \frac{2}{3} \alpha G (2\sqrt{\mu}-1) \omega \operatorname{Arc} 1''.$$

Für das gleichschenklige Dreieck im Allgemeinen ist nur dann $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$(\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{\mu} - \beta^2 > 0,$$

d. i.

$$\sqrt{\mu} > \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \text{ oder } \mu > \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2},$$

folglich, wenn wir jede der beiden gleichen Seiten des Dreiecks durch γ bezeichnen,

$$\mu > \frac{\beta^4}{\gamma^4} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta}{\gamma} < \sqrt[4]{\mu}$$

ist.

Für das gleichseitige Dreieck ist nur dann $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$4\sqrt{\mu} - 3 > 0, \quad \sqrt{\mu} > \frac{3}{4}, \quad \mu > \frac{9}{16}$$

ist.

Für das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ist nur dann $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$2\sqrt{\mu} - 1 > 0, \quad \sqrt{\mu} > \frac{1}{2}, \quad \mu > \frac{1}{4}$$

ist.

Anmerkung. Der Auflösung dieser Aufgabe füge ich nun noch die folgenden Bemerkungen über den Ausdruck der Stabilität bei unendlich kleinen Drehungen im Allgemeinen hinzu. Nämlich Bouguer, Euler, Chapman und andere Schriftsteller über diesen Gegenstand betrachten überhaupt nur die Stabilität unter Voraussetzung unendlich kleiner Drehungen, und bei allen diesen Schriftstellern erscheint der Ausdruck der Stabilität als von dem Drehungswinkel ω ganz unabhängig, so dass z. B. bei

Euler in der Scientia navalis. T. I. p. 99. im vorliegenden Falle der Ausdruck der Stabilität nicht wie oben

$$2G\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu}-\beta^2}{3\beta}\,\omega\,\mathrm{Arc}1''$$

oder eigentlich

$$2G\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu}-\beta^2}{3\beta}\sin\omega,$$

sondern

$$2G\frac{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\mu}-\beta^2}{3\beta}$$

ist. Wenn sich nun nach meiner Meinung dies auch durchaus nicht billigen lässt, da insbesondere die sämmtlichen obigen Ausdrücke für die Stabilität bei unendlich kleinen Drebungen nur Näherungsausdrücke sind, welche desto genauere Resultate liefern, je kleiner der Drehungswinkel ω ist, und also schon deshalb diese Ausdrücke nicht von ω unabhängig sein können, so ist doch auf der anderen Seite zu bemerken, dass die von den genannten und anderen Schriftstellern befolgte Methode darin ihre Rechtfertigung findet, dass es sich hierbei eigentlich nur um die Vergleichung verschiedener Stabilitäten handelt, und wenn man dann, um eben solche Vergleichungen mit Leichtigkeit anstellen zu können, immer denselben unendlich kleinen Drehungswinkel zum Grunde legt, und, wie jene Schriftsteller sämmtlich thun, überhaupt nur Stabilitäten für unendlich kleine Drehungswinkel betrachtet, so ist es allerdings verstattet, den Factor $\omega\mathrm{Arc}1''$ aus den Ausdrücken der Stabilität wegzulassen. Der erste Schriftsteller aber, welcher die Stabilität der Schiffe aus einem allgemeineren und allein wirklich sachgemässen Gesichtspunkte für endliche bestimmte Drehungswinkel, betrachtet hat, scheint, was hier als besonders verdienstlich hervorgehoben werden muss, Atwood zu sein, in einer in den Philosophical Transactions for the year 1798. Part. I. p. 201. unter dem Titel: A Disquisition on the Stability of Ships. By George Atwood erschienenen Abhandlung, die, wie ich aus einem der neuesten englischen Werke über die Schiffsbaukunst: Treatise on the Theory and Practice of Naval Architecture: beeing the Article „Ship-Building“ in the Encyclopaedia Britannica. By Augustin F. B. Creuze, Membre of the late School of Naval Arbitecture, President of the Portsmouth Philosophical Society. Ediuburgh. 1841. 4°. an verschiedenen Stellen desselben ersehe, namentlich auch in England mit Recht sehr geschätzt wird, so wie auch eine frühere Abhandlung desselben Verfassers, die in den Philosophical Transactions for the year 1796. Part I. p. 46. unter dem Titel: The Construction and Analysis of geometrical Propositions, determining the Positions assumed by

homogoneal Bodies which float freely, and at rest, on a Fluid's Surface; also determining the Stability of Ships, and of other floating Bodies. By George Atwood erschienen ist. Wenn man die Sache aus einem solchen allgemeineren Gesichtspunkte für Drehungswinkel von bestimmter endlicher Grösse betrachtet, sollte man nach meiner Ansicht auch aus den dem Falle eines unendlich kleinen Drehungswinkels entsprechenden Ausdrücken der Stabilität den Factor ωArc1″ nicht weglassen, weshalb wir denselben auch in dieser Abhandlung stets beibehalten werden.

§. 10.

Aufgabe. Ein gerades dreiseitiges völlig gleichförmig dichtes Prisma, dessen Grundflächen gleichschenklige Dreiecke sind, schwimme so auf dem Wasser, dass in Taf. I. Fig. 2. die Grundfläche ABC, in welcher $AC = BC$ ist, sich in vertikaler Lage befindet und die Grundlinie AB des gleichschenkligen Dreiecks horizontal, die Spitze C aber nach oben gekehrt ist; man soll die Stabilität dieses Prismas für auf seinen Grundflächen senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Sei $ABA'B'$, wo $A'B'$ horizontal und also mit AB parallel ist, der eingetauchte Theil des Dreiecks ABC, und werde, wenn CD die auf AB senkrecht stehende Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ABC ist, $AB = a$, $CD = b$ und $A'B' = x$, $CD' = y$ gesetzt. Bezeichnet dann μ das specifische Gewicht der Materie des Prismas, so ist aus bekannten Gründen

$$\Delta ABC : \mathrm{Trap} ABA'B' = 1 : \mu,$$

also

$$\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}(a+x)(b-y) = ab : (a+x)(b-y) = 1 : \mu.$$

Nun ist aber ganz wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$y = \frac{b}{a}x, \quad x = \frac{a}{b}y;$$

also

$$ab : (a+x)(b - \frac{b}{a}x) = a^2 : a^2 - x^2 = 1 : \mu,$$

$$ab : (a + \frac{a}{b}y)(b - y) = b^2 : b^2 - y^2 = 1 : \mu;$$

d. i

$$x^2=(1-\mu)a^2,\quad y^2=(1-\mu)b^2;$$

also

$$x=a\sqrt{1-\mu},\qquad y=b\sqrt{1-\mu}.$$

Mit Rücksicht auf die aus den früheren Paragraphen bekannte Bedeutung von v ist aber nach bekannten Sätzen vom Schwerpunkte des Dreiecks und des Trapeziums

$$v=\frac{a+2x}{3(a+x)}(b-y)-\frac{1}{3}b,$$

d. i., wie man leicht findet:

$$v=\frac{1}{3}b\{(1+2\sqrt{1-\mu})\frac{1-\sqrt{1-\mu}}{1+\sqrt{1-\mu}}-1\}$$

oder

$$v=-\frac{2}{3}b\frac{1-\mu}{1+\sqrt{1-\mu}}=-\frac{2}{3}b\frac{(1-\mu)(1-\sqrt{1-\mu})}{\mu},$$

und folglich, weil

$$\varrho=x=a\sqrt{1-\mu},$$

$$\mathfrak{V}'=\frac{1}{2}(a+x)(b-y)=\frac{1}{2}ab(1+\sqrt{1-\mu})(1-\sqrt{1-\mu});$$

d. i.

$$\varrho=a\sqrt{1-\mu},\quad \mathfrak{V}'=\frac{1}{2}\mu ab$$

ist:

$$u=\frac{(1-\mu)a^2\sqrt{1-\mu}}{6\mu b}-\frac{2}{3}b\frac{(1-\mu)(1-\sqrt{1-\mu})}{\mu},$$

also, wie man hieraus mittelst leichter Rechnung findet:

$$u=\frac{1-\mu}{6\mu b}\{(a^2+4b^2)\sqrt{1-\mu}-4b^2\}.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{S}=\frac{1-\mu}{6\mu b}G\{(a^2+4b^2)\sqrt{1-\mu}-4b^2\}\omega\text{Arc}1''.$$

Setzt man $a=2\alpha$, $b=\beta$, so ist

$$\mathfrak{S}=\frac{2(1-\mu)}{3\mu\beta}G\{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{1-\mu}-\beta^2\}\omega\text{Arc}1''.$$

Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, so ist $\beta^2=3\alpha^2$, und folglich, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{S}=\frac{2\alpha(1-\mu)}{3\mu\sqrt{3}}G(4\sqrt{1-\mu}-3)\omega\text{Arc}1''.$$

Wenn in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC der Winkel ACB ein rechter Winkel ist, so ist $\beta=\alpha$, also

$$\mathfrak{S}=\frac{2\alpha(1-\mu)}{3\mu}G(2\sqrt{1-\mu}-1)\omega\text{Arc}1''.$$

Für das gleichschenklige Dreieck im Allgemeinen ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{1-\mu}-\beta^2>0,$$

d. i., wie man hieraus leicht findet:

$$\mu<\frac{\alpha^2(\alpha^2+2\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\quad\text{oder}\quad\mu<\frac{1+2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right\}^2}$$

ist. Bezeichnet man die beiden einander gleichen Seiten des Dreiecks durch γ, so lässt sich, weil $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ ist, diese Bedingung leicht auf den Ausdruck

$$\mu<\frac{(\gamma^2-\beta^2)(\gamma^2+\beta^2)}{\gamma^4}\quad\text{oder}\quad\mu<1-\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^4$$

bringen.

Für das gleichseitige Dreieck ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$4\sqrt{1-\mu}-3>0,$$

d. i. wenn $\mu<\frac{7}{16}$ ist.

Für das rechtwinklige gleichschschenklige Dreieck ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$2\sqrt{1-\mu}-1>0,$$

d. i. wenn $\mu<\frac{3}{4}$ ist.

§. 11.

Soll das in den beiden vorhergehenden Paragraphen betrachtete Prisma sowohl in der in §. 9., als auch in der in §. 10. angenommenen Lage schwimmen können, ohne umzuschlagen, d. h. soll dieses Prisma in beiden Fällen mit einer gewissen positiven Stabilität auf dem Wasser schwimmen können, so muss

$$\frac{\beta^4}{\gamma^4} < \mu < 1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4}$$

sein, was offenbar nur dann der Fall sein kann, wenn

$$1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4} > \frac{\beta^4}{\gamma^4}, \quad 2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^4 < 1, \quad \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^4 < \frac{1}{2};$$

also

$$\frac{\beta}{\gamma} < \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{oder} \quad \gamma > \beta\sqrt[4]{2}$$

ist; und weil nun

$$\cos\frac{1}{2}ACB = \frac{\beta}{\gamma}$$

ist, so muss

$$\cos\frac{1}{2}ACB < \frac{1}{\sqrt[4]{2}},$$

also

$$\frac{1}{2}\angle ACB > 32^{\circ}.46', \quad \angle ACB > 65^{\circ}.32'$$

sein.

§. 12.

Aufgabe. Ein rechtwinkliges völlig gleichförmig dichtes Parallelepipedon schwimme so auf dem Wasser, dass in Taf. I. Fig. 3. seine Grundfläche *ABCD* sich in vertikaler Lage befindet, und deren einander parallele Seiten *AB* und *CD* horizontal sind; man soll die Stabilität dieses Parallelepipedons für auf der Grund-

fläche $ABCD$ senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Sei $ABA'B'$, wo $A'B'$ horizontal und also mit AB und CD parallel ist, der eingetauchte Theil des Rechtecks $ABCD$, und werde $AB=CD=a$, $AC=BD=b$ und $AA'=BB'=x$ gesetzt; so ist aus bekannten Gründen, wenn wieder μ das specifische Gewicht der Materie des Parallelepipedons bezeichnet,

$$ABCD:ABA'B'=1:\mu;$$

also

$$ab:ax=b:x=1:\mu,$$

folglich $x=\mu b$. Aber offenbar

$$v=\frac{1}{2}(x-b)=-\frac{1}{2}(1-\mu)b$$

und $\varrho=a$, $\mathfrak{V}'=ax=\mu ab$; also

$$u=\frac{a^2}{12\mu b}-\frac{1}{2}(1-\mu)b=\frac{a^2-6\mu(1-\mu)b^2}{12\mu b},$$

und folglich

$$\mathfrak{S}=\frac{a^2-6\mu(1-\mu)b^2}{12\mu b}\,G\omega\text{Arc}1''.$$

Es ist nur dann $\mathfrak{S}>0$, wenn

$$a^2-6\mu(1-\mu)b^2>0,\text{ d. i. }\frac{a}{b}>\sqrt{6\mu(1-\mu)}$$

ist.

Soll das Parallelepipedon sowohl wenn die Seite a, als auch wenn die Seite b horizontal ist, mit einer gewissen Stabilität schwimmen können, so müssen die beiden Bedingungen

$$\frac{a}{b}>\sqrt{6\mu(1-\mu)},\quad \frac{b}{a}>\sqrt{6\mu(1-\mu)}$$

zugleich erfüllt sein, d. h. es muss

$$\sqrt{6\mu(1-\mu)}<\frac{a}{b}<\frac{1}{\sqrt{6\mu(1-\mu)}}$$

sein, welches nur dann möglich ist, wenn

$$\sqrt{6\mu(1-\mu)}<\frac{1}{\sqrt{6\mu(1-\mu)}},$$

d. i. wenn

$$6\mu(1-\mu)<1,$$

oder, was Dasselbe ist, wenn

$$\mu^2-\mu>-\frac{1}{6},\ (\mu-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{12}$$

ist. Für $\mu=\frac{1}{2}$ ist dies offenbar nicht möglich. Jenachdem μ, welches natürlich immer kleiner als die Einheit sein muss, zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 oder zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt, ist die Bedingung

$$(\mu-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{12}$$

erfüllt, wenn

$$\mu-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\ \text{ oder }\ \frac{1}{2}-\mu>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}},$$

d. i.

$$\mu>\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{3}})\ \text{ oder }\ \mu<\frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{1}{3}}),$$

d. i.

$$\mu>\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\ \text{ oder }\ \mu<\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}},$$

d. i.

$$\mu>\frac{1}{3-\sqrt{3}}\ \text{ oder }\ \mu<\frac{1}{3+\sqrt{3}},$$

d. i.

$$\mu>\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\ \text{ oder }\ \mu<\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})$$

ist.

Dass

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})<1,\quad 0<\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})<\frac{1}{2}$$

ist, erhellet auf der Stelle.

Für $a=b$, d. h. im Falle eines Quadrats, ist

$$\mathfrak{S} = \frac{1-6\mu(1-\mu)}{12\mu}\, aG\omega \operatorname{Arc} 1'',$$

und es ist nur $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$6\mu(1-\mu) < 1$$

ist, d. h. nach dem Vorhergehenden für

$$\mu > \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) \text{ oder } \mu < \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}),$$

jenachdem μ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 oder zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt. Für $\mu = \frac{1}{2}$ ist

$$6\mu(1-\mu) = \frac{3}{2},$$

und folglich

$$6\mu(1-\mu) > 1.$$

§. 13.

Aufgabe. **Ein über einem Quadrate als Grundfläche errichtetes rechtwinkliges, völlig gleichförmig dichtes Parallelepipedon schwimme so auf dem Wasser, dass in Taf. I. Fig. 4. die quadratförmige Grundfläche *ABCD* und zugleich auch die Diagonale *AB* sich in vertikaler Lage befinden; man soll die Stabilität dieses rechtwinkligen Parallelepipedons für auf der Grundfläche *ABCD* senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.**

Auflösung. Das specifische Gewicht der Materie des Parallelepipedons sei μ, und die Seite des Quadrats $ABCD$ werde durch a bezeichnet.

Wenn $\mu < \frac{1}{2}$ ist, so sei BEF in Taf. I. Fig. 4. *a.*, wo EF horizontal ist, der eingetauchte Theil des Quadrats $ABCD$. Dann ist

$$ABCD : BEF = 1 : \mu.$$

und folglich, wenn wir $EF = x$, $BG = y$ setzen:

$$a^2 : \frac{1}{2}xy = 1 : \mu.$$

Offenbar ist aber $x=2y$, also

$$a^2:\frac{1}{4}x^2=1:\mu,$$

$$a^2:y^2=1:\mu;$$

folglich

$$x=2a\sqrt{\mu},\quad y=a\sqrt{\mu}.$$

Nach bekannten Sätzen ist

$$v=\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}a\sqrt{2}=a(\frac{2}{3}\sqrt{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{2}),$$

und weil nun

$$\varrho=x=2a\sqrt{\mu},\quad \mathfrak{V}'=\frac{1}{2}xy=\mu a^2$$

ist, so ist

$$u=\frac{2}{3}a\sqrt{\mu}+a(\frac{2}{3}\sqrt{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{2})=a(\frac{4}{3}\sqrt{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{2});$$

folglich

$$\mathfrak{S}=aG(\frac{4}{3}\sqrt{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{2})\omega\,\mathrm{Arc}1''=aG(\frac{4}{3}\sqrt{\mu}-\sqrt{\frac{1}{2}})\omega\,\mathrm{Arc}1''.$$

Wenn $\mu=\frac{1}{2}$ ist, so sei *BCD* in Taf. I. Fig. 4. *b.*, wo *CD* horizontal ist, der eingetauchte Theil des Quadrats *ABCD*. In diesem Falle ist nach dem vorhergehenden Ausdrucke der Stabilität, wenn man in demselben $\mu=\frac{1}{2}$ setzt:

$$\mathfrak{S}=aG.\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}.\,\omega\,\mathrm{Arc}1''.$$

Wenn $\mu>\frac{1}{2}$ ist, so sei *BCDEF* in Taf. I. Fig. 4. *c.*, wo *EF* horizontal ist, der eingetauchte Theil des Quadrats *ABCD*. Dann ist

$$ABCD:BCDEF=1:\mu,$$

und folglich, wenn wir $EF=x$, $AG=y$ setzen:

$$a^2:a^2-\frac{1}{2}xy=1:\mu,$$

also, weil $x=2y$ ist:

$$a^2 : a^2 - \frac{1}{4}x^2 = 1 : \mu,$$

$$a^2 : a^2 - y^2 = 1 : \mu$$

oder

$$a^2 : \frac{1}{4}x^2 = 1 : 1 - \mu,$$

$$a^2 : y^2 = 1 : 1 - \mu;$$

folglich

$$x = 2a\sqrt{1-\mu}, \quad y = a\sqrt{1-\mu}.$$

Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunkts des eingetauchten Theils *BCDEF* von dem Punkte *B* durch z, so hat man nach der Lehre vom Schwerpunkte die Gleichung

$$\frac{1}{2}a\sqrt{2}.ABCD = z.BCDEF + (a\sqrt{2} - \frac{2}{3}y).AEF,$$

d. i.

$$\frac{1}{2}a^3\sqrt{2} = (a^2 - \frac{1}{2}xy)z + \frac{1}{2}xy(a\sqrt{2} - \frac{2}{3}y),$$

und folglich, wenn man für x und y ihre Werthe aus dem Vorhergehenden einführt:

$$\frac{1}{2}a\sqrt{2} = \mu z + (1-\mu)(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu})a,$$

woraus sich

$$z = \frac{\sqrt{2} - 2(1-\mu)(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu})}{2\mu}a$$

ergiebt. Also ist

$$v = \frac{\sqrt{2} - 2(1-\mu)(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu})}{2\mu}a - \frac{1}{2}a\sqrt{2},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$v = -\frac{1-\mu}{\mu}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu}\right)a;$$

und weil nun

$$\varrho = x = 2a\sqrt{1-\mu},\ \mathfrak{V}' = a^2 - \frac{1}{2}xy = \mu a^2$$

ist, so ist

$$u = \frac{2(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}{3\mu}a - \frac{1-\mu}{\mu}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-\mu}\right)a,$$

also

$$u = \frac{1-\mu}{\mu}\left(\frac{4}{3}\sqrt{1-\mu} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)a.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{S} = \frac{1-\mu}{\mu}aG\left(\frac{4}{3}\sqrt{1-\mu} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\omega \operatorname{Arc}1''$$

oder

$$\mathfrak{S} = \frac{1-\mu}{\mu}aG\left(\frac{4}{3}\sqrt{1-\mu} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\omega \operatorname{Arc}1''.$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ ergiebt sich auch hieraus

$$\mathfrak{S} = aG.\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}.\omega \operatorname{Arc}1''.$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ ist jedenfalls $\mathfrak{S} > 0$.

Für $\mu < \frac{1}{2}$ ist $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$\frac{4}{3}\sqrt{\mu} > \sqrt{\frac{1}{2}},\quad \text{d. i. } \mu > \frac{9}{32}$$

ist.

Für $\mu > \frac{1}{2}$ ist $\mathfrak{S} > 0$, wenn

$$\frac{4}{3}\sqrt{1-\mu} > \sqrt{\frac{1}{2}}\quad \text{d. i. } 1-\mu > \frac{9}{32}\quad \text{oder}\quad \mu < \frac{23}{32}$$

ist.

§. 14.

Aufgabe. Ein über dem Parabelsegment ACB in Taf. I. Fig. 5., wo CD die Axe der Parabel ist und AB auf CD senkrecht steht, als Grundfläche beschriebener, völlig gleichförmig dichter gerader prismatischer Körper schwimme so auf dem Wasser, dass die parabolische Grundfläche ACB sich in vertikaler Lage befindet und AB horizontal ist; man soll die Stabilität dieses prismatischen Körpers für auf der Grundfläche senkrecht stehende horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Das specifische Gewicht der Materie des in Rede stehenden prismatischen Körpers sei μ, und CD und AB mögen respective durch a und b, der Parameter der parabolischen Grundfläche soll durch p bezeichnet werden. Ist nun $A'CB'$, wo $A'B'$ horizontal ist, der eingetauchte Theil der parabolischen Grundfläche, so ist

$$ACB:A'CB'=1:\mu,$$

also, wenn CD' und $A'B'$ respective durch x und y bezeichnet werden, nach einem bekannten Satze von der Quadratur der Parabel

$$\frac{2}{3}ab:\frac{2}{3}xy=ab:xy=1:\mu.$$

Nun ist aber ferner bekanntlich

$$b=2\sqrt{pa},\quad y=2\sqrt{px};$$

also

$$a\sqrt{a}:x\sqrt{x}=1:\mu,$$

oder

$$a^3:x^3=1:\mu^2,$$

folglich

$$x=a\sqrt[3]{\mu^2},\quad y=2\sqrt[3]{ap}\,.\sqrt{\mu}.$$

Nach einem bekannten Satze von dem Schwerpunkte der Parabel ist

$$v=\frac{3}{5}(x-a)=-\frac{3}{5}a(1-\sqrt[3]{\mu^2}),$$

und weil nun

$$\varrho = y = 2\sqrt{ap}.\sqrt[3]{\mu},\quad \mathfrak{V}' = \frac{2}{3}xy = \frac{4}{3}\mu a\sqrt{ap};$$

also

$$\frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'} = \frac{8\mu ap\sqrt{ap}}{16\mu a\sqrt{ap}} = \frac{1}{2}p$$

ist, so ist

$$u = \frac{1}{2}p - \frac{3}{5}a(1 - \sqrt[3]{\mu^2}),$$

folglich

$$\mathfrak{S} = \{\frac{1}{2}p - \frac{3}{5}a(1 - \sqrt[3]{\mu^2})\}\, G\omega \operatorname{Arc} 1''.$$

Soll $\mathfrak{S} > 0$ sein, so muss

$$\frac{1}{2}p - \frac{3}{5}a(1 - \sqrt[3]{\mu^2}) > 0,$$

d. i., wie man leicht findet:

$$\sqrt[3]{\mu^2} > 1 - \frac{5p}{6a}$$

sein.

§. 15.

Aufgabe. Ein gerades vierseitiges Prisma von völlig gleichförmiger Dichtigkeit, dessen eine Grundfläche in Taf. I. Fig. 6. des Trapezium *ABCD* ist, in welchem letzteren die Seiten *AC*, *BD* einander gleich und gegen die parallelen Seiten *AB*, *CD* unter gleichen Winkeln geneigt sind, schwimme so auf dem Wasser, dass die Grundfläche *ABCD* sich in vertikaler Lage befindet und ihre parallelen Seiten *AB*, *CD* horizontal sind; man soll die Stabilität dieses Prismas für auf seinen Grundflächen senkrechte horizontale Axen und unendlich kleine Drehungen bestimmen.

Auflösung. Sei $ABA'B'$, wo $A'B'$ horizontal und also den Linien AB, CD parallel ist, der eingetauchte Theil des Trapeziums $ABCD$, und werde $AB = a$, $CD = b$, $A'B' = x$ gesetzt, die Höhe des Trapeziums $ABCD$ aber durch h, die Höhe des Trapeziums $ABA'B'$ durch y bezeichnet. Ist dann μ das specifische Gewicht der Materie des Prismas, so ist aus bekannten Gründen

$$ABCD:ABA'B'=1:\mu,$$

also

$$\frac{1}{2}(a+b)h:\frac{1}{2}(a+x)y=(a+b)h:(a+x)y=1:\mu.$$

Nun ist aber, wie leicht erhellet, allgemein

$$a-b:a-x=h:y,$$

also

$$y=\frac{a-x}{a-b}h,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$a^2-b^2:a^2-x^2=1:\mu,$$

also

$$x=\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)},\quad y=\frac{h}{a-b}\left\{a-\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}\right\}.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist, wie man leicht findet:

$$v=\frac{1}{3}\left(\frac{a+2x}{a+x}y-\frac{a+2b}{a+b}h\right),$$

und weil nun

$$\varrho=x,\quad \mathfrak{V}'=\frac{1}{2}(a+x)y$$

ist, so ist

$$u=\frac{1}{3}\left(\frac{a+2x}{a+x}y-\frac{a+2b}{a+b}h\right)+\frac{x^3}{6(a+x)y},$$

also, weil

$$y=\frac{a-x}{a-b}h,\quad (a+x)y=\mu(a+b)h$$

ist:

$$u=\frac{1}{3}h\left\{\frac{a+2x}{a+x}\cdot\frac{a-x}{a-b}-\frac{a+2b}{a+b}\right\}+\frac{x^3}{6\mu(a+b)h}$$

oder

$$u=\frac{h}{3(a-b)}\left\{(a+2x)\frac{a-x}{a+x}-(a+2b)\frac{a-b}{a+b}\right\}+\frac{x^3}{6\mu(a+b)h}.$$

Führt man nun in diesen Ausdruck den aus dem Obigen bekannten Werth von x ein, so erhält man:

$$=\frac{h}{3(a-b)}\left\{(a+2\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)})\,\frac{a-\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}}{a+\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}}-(a+2b)\,\frac{a-b}{a+b}\right\}$$
$$+\frac{(a^2-\mu(a^2-b^2))\sqrt{a^2-\mu(a^2-b^2)}}{6\mu(a+b)h},$$

und für die Stabilität $\mathfrak{S}$ hat man den bekannten Ausdruck:

$$\mathfrak{S}=Gu\omega \text{Arc}1'',$$

wobei unendlich kleine Drehungen vorausgesetzt werden.

Die Möglichkeit der Aufgabe erfordert, dass

$$a^2-\mu(a^2-b^2)\geqq 0,\quad \text{d. i}\quad \mu(a^2-b^2)\leqq a^2$$

sei. Dies ist für $a\leqq b$ immer der Fall, für $a>b$ aber nur dann, wenn

$$\mu\leqq\frac{a^2}{a^2-b^2}\quad\text{oder}\quad \mu\leqq\frac{a}{(a-b)(a+b)}$$

ist.

Die Stabilität ist nur dann positiv, wenn u positiv ist, wofür wir der Kürze wegen die Bedingung nicht weiter entwickeln wollen.

Setzt man in dem obigen Ausdrucke von u die Seite $a=0$, so wird, wie man leicht findet,

$$u=\frac{b^2\sqrt{\mu}}{6h}-\frac{2h}{3}(1-\sqrt{\mu})$$

oder

$$u=\frac{(b^2+4h^2)\sqrt{\mu}-4h^2}{6h},$$

also

$$\mathfrak{S}=G\,\frac{(b^2+4h^2)\sqrt{\mu}-4h^2}{6h}\,\omega\,\text{Arc}\,1'',$$

was ganz mit dem in §. 9. gefundenen Ausdrucke der Stabilität übereinstimmt.

Setzt man in dem obigen allgemeinen Ausdrucke von u die Seite $b=0$, so erhält man:

$$u=\frac{a^2(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}{6\mu h}+\frac{1}{3}h\{(1+2\sqrt{1-\mu})\frac{1-\sqrt{1-\mu}}{1+\sqrt{1-\mu}}-1\}$$

$$=\frac{a^2(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}{6\mu h}-\frac{2}{3}h\frac{1-\mu}{1+\sqrt{1-\mu}}$$

$$=\frac{a^2(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}{6\mu h}-\frac{2h(1-\mu)(1-\sqrt{1-\mu})}{3\mu}$$

$$=\frac{1-\mu}{6\mu h}\{(a^2+4h^2)\sqrt{1-\mu}-4h^2\},$$

also

$$\mathfrak{S}=\frac{1-\mu}{6\mu h}G\{(a^2+4h^2)\sqrt{1-\mu}-4h^2\}\,\omega\text{Arc}1'',$$

was ganz mit dem in §. 10. gefundenen Ausdrucke der Stabilität übereinstimmt.

§. 16.

Bei den vorhergehenden Aufgaben nahmen wir immer das Schiff als einen homogenen oder völlig gleichförmig dichten Körper an, die auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden Schnitte des Schiffs wurden als unter einander völlig gleiche und ähnliche Figuren angenommen, und es wurden nur unendlich kleine Drehungen des Schiffs betrachtet. Jetzt wollen wir nun einige Aufgaben auflösen, bei denen wir den Drehungswinkel nicht unendlich klein, sondern von einer endlichen bestimmten Grösse, und das Schiff nicht als homogen oder als einen völlig gleichförmig dichten Körper annehmen, aber voraussetzen werden, dass die auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden Schnitte desselben sämmtlich gleiche und ähnliche Figuren sind, und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit vollkommen mit einander übereinstimmen. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir uns nun zuerst mit der folgenden Aufgabe beschäftigen.

§. 17.

Aufgabe. Einer der auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden, sämmtlich einander gleichen und ähnlichen, und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit völlig miteinander übereinstimmenden Schnitte des Schiffs sei in Taf. II. Fig. 7. die dreieckige ebene Figur *DCE*, und das Schiff schwimme so auf dem Wasser, dass die Ebene *DCE* und in derselben die den Winkel *DCE* halbirende Linie vertikal ist; man soll die Stabilität dieses Schiffs in Bezug auf die zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen für den beliebigen Drehungswinkel ω bestimmen.

Auflösung. Wenn wir annehmen, dass *ACB* der eingetauchte Theil des Schnitts *DCE* bei der ersten Lage des Schiffs, und also *AB* die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts *DCE* mit der Oberfläche des Wassers ist, auf welchem das Schiff schwimmt, so kommt es zunächst auf die Bestimmung des aufgetauchten und des untergetauchten Theils an. Nehmen wir nun ferner an, dass *A'CB'* der eingetauchte Theil des Schnitts *DCE* bei der zweiten Lage des Schiffs ist, und dass *AOA'* und *BOB'* respective der aufgetauchte und der untergetauchte Theil des Schnitts *DCE* sind, so müssen wir, weil der aufgetauchte und der untergetauchte Theil bekanntlich immer einander gleich sind, die Gleichheit dieser beiden Theile aber unter den gemachten Voraussetzungen augenscheinlich durch die Gleichheit der beiden Dreiecke *AOA'*, *BOB'* bedingt wird, offenbar die Lage der Linie *A'B'* so bestimmen, dass dieselbe in ihrem Durchschnittspunkte *O* mit der als gegeben zu betrachtenden Linie *AB* gegen diese letztere Linie unter dem gegebenen Winkel $AOA' = BOB' = \omega$ geneigt ist, und die beiden Dreiecke *AOA'*, *BOB'* einander gleich sind. Auf diese Weise wollen wir nun die Linie *A'B'* zu bestimmen suchen.

Zu dem Ende werde der als gegeben zu betrachtende Winkel *DCE* durch Θ bezeichnet; dann ist jeder der Winkel *CAB*, *CBA*, die offenbar einander gleich sind, weil unter den gemachten Voraussetzungen das Dreieck *ACB* jedenfalls ein gleichschenkliges Dreieck und *AB* seine Grundlinie ist, $=90^0-\frac{1}{2}\Theta$. Wegen der Gleichheit der beiden Dreiecke *AOA'*, *BOB'* ist aber

$$AO.A'O = BO.B'O,$$

und nach einem bekannten trigonometrischen Satze ist

$$AO:A'O = \sin(180^0-\omega-90^0+\frac{1}{2}\Theta):\ \sin(90^0-\frac{1}{2}\Theta),$$

$$BO:B'O = \sin(180^0-\omega-90^0-\frac{1}{2}\Theta):\ \sin(90^0+\frac{1}{2}\Theta);$$

d. i.

$$AO:A'O=\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta):\cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

$$BO:B'O=\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta):\cos\tfrac{1}{2}\Theta.$$

Setzen wir nun ferner die als bekannt zu betrachtende Linie $AB=\varrho$, so haben wir zwischen den vier unbekannten Grössen AO, BO, $A'O$, $B'O$ die vier folgenden Gleichungen:

$$AO+BO=\varrho,$$
$$AO.A'O=BO.B'O,$$
$$AO.\cos\tfrac{1}{2}\Theta=A'O.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta),$$
$$BO.\cos\tfrac{1}{2}\Theta=B'O.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta);$$

und es wird nun darauf ankommen, aus diesen vier Gleichungen die vier in Rede stehenden unbekannten Grössen zu bestimmen.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$AO=A'O.\frac{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\Theta},\quad BO=B'O.\frac{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\Theta};$$

also ist wegen der beiden ersten Gleichungen:

$$A'O.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)+B'O.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)=\varrho\cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

$$A'O^2.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)-B'O^2.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)=0.$$

Man setze

$$A'O.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)-B'O.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)=\tau,$$

so ist

$$A'O^2.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)^2-B'O^2.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)^2=\varrho\tau\cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

und wenn man nun die beiden Gleichungen

$$A'O^2.\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)^2-B'O^2.\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)^2=\varrho\tau\cos\tfrac{1}{2}\Theta,$$

$$A'O^2.\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)-B'O^2.\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)=0$$

mit einander verbindet, so erhält man:

$$A'O^2.\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)-\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)\}=\varrho\tau\cos\frac{1}{2}\Theta,$$

$$B'O^2.\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)\{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)-\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)\}=\varrho\tau\cos\frac{1}{2}\Theta;$$

d. i., wie man leicht findet:

$$A'O^2=\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}\tau,$$

$$B'O^2=\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\tau.$$

Nehmen wir nun an, dass ω nicht 90^0 und, wie sich schon von selbst versteht, Θ nicht 180^0 übersteigt, so kann offenbar der absolute Werth von $\omega-\frac{1}{2}\Theta$ nie 90^0 übersteigen, und $\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)$ ist also unter den gemachten Voraussetzungen immer positiv. Weil nun auch ϱ, $\sin\omega$, $\cot\frac{1}{2}\Theta$ positiv sind, so ist

$$\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}$$

positiv, und wegen der Gleichung

$$A'O^2=\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}\tau$$

muss folglich nothwendig τ eine positive Grösse sein. Also muss offenbar wegen der Gleichung

$$B'O^2=\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\tau$$

nothwendig $\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)$ positiv sein, wenn überhaupt die Aufgabe möglich sein soll, d. h. $\omega+\frac{1}{2}\Theta$, welches unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls 180° nicht übersteigt, darf 90° nicht übersteigen, wenn die Aufgabe überhaupt möglich sein soll.

Weil nun nach dem Bisherigen

$$\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)},\quad \frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}$$

und τ, sowie ihrer Natur nach auch $A'O$ und $B'O$ positiv sind, so erhalten wir aus dem Obigen die beiden folgenden Gleichungen:

$$A'O=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}}\cdot\sqrt{\tau},$$

$$B'O=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}\cdot\sqrt{\tau}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$M=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}},$$

$$N=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

setzen:

$$A'O=M\sqrt{\tau},\quad B'O=N\sqrt{\tau}.$$

Führt man diese Ausdrücke in die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$A'O.\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)+B'O.\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)=\varrho\cos\frac{1}{2}\Theta$$

ein, so erhält man

$$\{M\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)+N\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)\}\sqrt{\tau}=\varrho\cos\frac{1}{2}\Theta,$$

also

$$\sqrt{\tau}=\frac{\varrho\cos\frac{1}{2}\Theta}{M\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)+N\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)},$$

oder, wenn man

$$M'=M\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)=\sqrt{\frac{\varrho\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}},$$

$$N'=N\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)=\sqrt{\frac{\varrho\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}}$$

setzt:

$$\sqrt{\tau}=\frac{\varrho\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$A'O=\frac{\varrho M\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'},\quad B'O=\frac{\varrho N\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'};$$

also

$$A'B'=\varrho\frac{M+N}{M'+N'}\cos\frac{1}{2}\Theta.$$

In Bezug auf O als Anfang und OA' als den positiven Theil der Axe der Abscissen sind die Abscissen der Schwerpunkte der Dreiecke AOA' und BOB' nach der Lehre vom Schwerpunkte des Dreiecks respective:

$$\frac{1}{3}(AO.\cos\omega+A'O)\text{ und }-\frac{1}{3}(BO.\cos\omega+B'O);$$

folglich ist

$$v=\frac{1}{3}(AO.\cos\omega+A'O)+\frac{1}{3}(BO.\cos\omega+B'O),$$

d. i.

$$v=\frac{1}{3}\{(AO+BO)\cos\omega+(A'O+B'O)\}$$

oder

$$v=\frac{1}{3}(AB.\cos\omega+A'B'),$$

also nach dem Obigen

$$v=\frac{1}{3}\,\varrho\,(\cos\omega+\frac{M+N}{M'+N'}\cos\frac{1}{2}\Theta).$$

Weil nach dem Obigen

$$AO=A'O.\frac{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\Theta},\quad BO=B'O.\ \frac{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}{\cos\frac{1}{2}\Theta}$$

und

$$A'O=\frac{\varrho M\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'},\quad B'O=\frac{\varrho N\cos\frac{1}{2}\Theta}{M'+N'}$$

ist, so ist

$$AO=\frac{\varrho M\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{M'+N'},\quad BO=\frac{\varrho N\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}{M'+N'};$$

und weil nun

$$V'=\frac{1}{2}AO.A'O.\sin\omega$$

ist, so ist

$$V'=\frac{\varrho^2M^2\cos\frac{1}{2}\Theta\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{2(M'+N')^2}\sin\omega.$$

Endlich ist, als der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie ϱ, und dessen Winkel an der Spitze Θ ist, offenbar

$$\mathfrak{v}'=\frac{1}{2}\,\varrho.\,\frac{1}{2}\varrho\,\tang\,(90^0-\frac{1}{2}\Theta)=\frac{1}{4}\varrho^2\cot\frac{1}{2}\Theta.$$

Es ist nun

$$M+N=\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}}+\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$=\Big\{\sqrt{\sec(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\sec(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\Big\}\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}},$$

$$M'+N'=\sqrt{\frac{\varrho\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}}+\sqrt{\frac{\varrho\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}}$$

$$=\left\{\sqrt{\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\cos(\omega+\tfrac{1}{2}\Theta)}\right\}\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}};$$

also

$$\frac{M+N}{M'+N'}=\frac{\sqrt{\sec(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\sec(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$=\frac{\left\{\sqrt{\sec(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\sec(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\right\}\left\{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}-\sqrt{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\right\}}{\left\{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\right\}\left\{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}-\sqrt{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\right\}}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist

$$\sqrt{\frac{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}-\sqrt{\frac{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$=\frac{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)-\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$=\frac{2\sin\omega\sin\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}},$$

und der Nenner ist

$$\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)-\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)=2\sin\omega\sin\frac{1}{2}\Theta;$$

also ist

$$\frac{M+N}{M'+N'}=\frac{1}{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$=\sqrt{\sec(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\sec(\omega+\frac{1}{2}\Theta)};$$

folglich nach dem Obigen:

$$v=\frac{1}{3}\varrho\{\cos\omega+\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\sec(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\sec(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\}$$

$$=\frac{1}{3}\varrho\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta+\cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}.$$

Ferner ist

$$M=\frac{1}{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}}\sqrt{\frac{\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta}{2\sin\omega}},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{M}{M'+N'}=\frac{1}{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}\;\{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\}},$$

also

$$\frac{M^2\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}{(M'+N')^2}=\frac{1}{\{\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)}+\sqrt{\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\}^2}$$

$$=\frac{1}{2\{\cos\omega\cos\frac{1}{2}\Theta+\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\}},$$

daher nach dem Obigen

$$V'=\frac{\varrho^2\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\omega}{4\{\cos\omega\cos\frac{1}{2}\Theta+\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\}}.$$

Also ist

$$V'v=\frac{\varrho^3\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\omega}{12\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta+\cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}{\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\omega+\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\Theta + \cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}{\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\omega + \sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

mit

$$\cos\frac{1}{2}\Theta - \cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\Theta)},$$

so wird der Zähler.

$$\cos\frac{1}{2}\Theta^2 - \cos\omega^2\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)$$

$$= \cos\frac{1}{2}\Theta^2 - \cos\omega^2(\cos\omega^2\cos\frac{1}{2}\Theta^2 - \sin\omega^2\sin\frac{1}{2}\Theta^2)$$

$$= (1-\cos\omega^4)\cos\frac{1}{2}\Theta^2 + \sin\omega^2\cos\omega^2\sin\frac{1}{2}\Theta^2$$

$$= \sin\omega^2(\cos\omega^2 + \cos\frac{1}{2}\Theta^2),$$

und der Nenner wird:

$$\cos\omega\cos\frac{1}{2}\Theta^2 + \cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}$$

$$-\cos\omega^2\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)} - \cos\omega\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)$$

$$= \cos\omega\cos\frac{1}{2}\Theta^2 - \cos\omega^3\cos\frac{1}{2}\Theta^2 + \sin\omega^2\cos\omega\sin\frac{1}{2}\Theta^2$$

$$+ \sin\omega^2\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}$$

$$= \sin\omega^2\left\{\cos\omega + \cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}\right\}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$V'v = \frac{\varrho^3 \cos\frac{1}{2}\Theta \sin\omega}{12\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}} \cdot \frac{\cos\omega^2+\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{\cos\omega+\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$= \frac{\varrho^3 \cos\frac{1}{2}\Theta \sin\omega}{12} \cdot \frac{\cos\omega^2+\cos\frac{1}{2}\Theta^2}{\cos\frac{1}{2}\Theta\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)+\cos\omega\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}.$$

Multiplicirt man aber Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{1}{\cos\omega+\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

mit

$$\cos\omega - \cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)},$$

so wird der Nenner

$$\cos\omega^2 - \cos\frac{1}{2}\Theta^2\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)$$

$$=\cos\omega^2 - \cos\omega^2\cos\frac{1}{2}\Theta^4 + \sin\omega^2\sin\frac{1}{2}\Theta^2\cos\frac{1}{2}\Theta^2$$

$$=\cos\omega^2(1-\cos\frac{1}{2}\Theta^4) + \sin\omega^2\sin\frac{1}{2}\Theta^2\cos\frac{1}{2}\Theta^2$$

$$=\sin\frac{1}{2}\Theta^2(\cos\omega^2+\cos\frac{1}{2}\Theta^2),$$

also offenbar

$$V'v=$$

$$\frac{\varrho^3\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\omega}{12}\cdot\frac{\cos\omega-\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}{\sin\frac{1}{2}\Theta^2\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}$$

$$=\frac{\varrho^3\sin\omega}{12\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta^2}\left\{\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}-1\right\};$$

aber es ist auch

$$\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)$$

$$=\cos\omega^2\cos\frac{1}{2}\Theta^2-\sin\omega^2\sin\frac{1}{2}\Theta^2$$

$$=\cos\omega^2\cos\frac{1}{2}\Theta^2(1-\operatorname{tang}\omega^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta^2),$$

also

$$V'v=\frac{\varrho^3\sin\omega}{12\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta^2}\left\{\frac{\sec\frac{1}{2}\Theta^2}{\sqrt{1-\operatorname{tang}\omega^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta^2}}-1\right\}.$$

Daher ist

$$\frac{V'}{\mathfrak{V}'}v=\frac{1}{3}\varrho\sin\omega\cot\frac{1}{2}\Theta\left\{\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\varrho\sin\omega\cot\frac{1}{2}\Theta\left\{\frac{\sec\frac{1}{2}\Theta^2}{\sqrt{1-\tang\omega^2\tang\frac{1}{2}\Theta^2}}-1\right\}.$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\mathfrak{S}=G\left\{\frac{V'}{\mathfrak{V}'}v+v\sin\omega\right\}$$

ist:

$$\mathfrak{S}=G\left\{v+\frac{1}{3}\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\cos(\omega-\frac{1}{2}\Theta)\cos(\omega+\frac{1}{2}\Theta)}}-1\right)\right\}\sin\alpha$$

$$=G\left\{v+\frac{1}{3}\varrho\cot\frac{1}{2}\Theta\left(\frac{\sec\frac{1}{2}\Theta^2}{\sqrt{1-\tang\omega^2\tang\frac{1}{2}\Theta^2}}-1\right)\right\}\sin\omega.$$

Weil nach dem Obigen

$$\cot\frac{1}{2}\Theta=\frac{4\mathfrak{V}'}{\varrho^2},\quad \tang\frac{1}{2}\Theta=\frac{\varrho^2}{4\mathfrak{V}'}$$

ist, so ist

$$\sec\frac{1}{2}\Theta^2=1+\frac{\varrho^4}{16\mathfrak{V}'^2}=\frac{16\mathfrak{V}'^2+\varrho^4}{16\mathfrak{V}'}$$

und

$$1-\tang\omega^2\tang\frac{1}{2}\Theta^2$$

$$=1-\frac{\varrho^4}{16\mathfrak{V}'^2}\tang\omega^2=\frac{16\mathfrak{V}'^2-\varrho^4\tang\omega^2}{16\mathfrak{V}'^2};$$

also

$$\frac{\sec\frac{1}{2}\Theta^2}{\sqrt{1-\tang\omega^2\tang\frac{1}{2}\Theta^2}}=\frac{16\mathfrak{V}'^2+\varrho^4}{4\mathfrak{V}'\sqrt{16\mathfrak{V}'^2-\varrho^4\tang\omega^2}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{S}=G\left\{v+\frac{4\mathfrak{V}'}{2\varrho}\left(\frac{16\mathfrak{V}'^2+\varrho^4}{4\mathfrak{V}'\sqrt{16\mathfrak{V}'^2-\varrho^4\operatorname{tang}\omega^2}}-1\right)\right\}\sin\omega$$

oder

$$\mathfrak{S}=G\left\{v+\frac{1}{3\varrho}\left(\frac{16\mathfrak{V}'^2+\varrho^4}{\sqrt{16\mathfrak{V}'^2-\varrho^4\operatorname{tang}\omega^2}}-4\mathfrak{V}'\right)\right\}\sin\omega.$$

Wenn der Winkel ω unendlich klein ist, und $\operatorname{tang}\omega^2$ als eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung als verschwindend betrachtet wird, so ist, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{S}=G\left(v+\frac{\varrho^2}{12\mathfrak{V}'}\right)\sin\omega,$$

was ganz mit §. 8. übereinstimmt.

Wie die Grösse v, deren Bedeutung aus dem Obigen bekannt ist, in jedem einzelnen Falle mittelst der bekannten Sätze vom Schwerpunkte bestimmt werden muss, bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

§. 18.

Der folgenden Aufgabe wollen wir einige allgemeine Betrachtungen über die Parabel vorausschicken.

In Taf. II. Fig. 8. sei MSN eine Parabel, deren Scheitel S und deren Axe SH ist. Die beiden beliebigen Punkte A und A' dieser Parabel seien durch die Sehne AA' mit einander verbunden, und von A und A' seien auf die Axe SH die Perpendikel AB und $A'B'$ gefällt. Man setze

$$SB=x,\ AB=y;\ SB'=x',\ A'B'=y';$$

die Linie $SC=z$, und das parabolische Flächenstück $ASA'=F$.

Bezeichnet man wie gewöhnlich den Parameter der Parabel durch p, so ist

$$y^2=px,\ y'^2=px'.$$

Ferner ist

$$BC:B'C=y:y',\ BC+B'C=BB'=x'-x;$$

also

$$BC+\frac{y'}{y}BC=\frac{y'+y}{y}BC=x'-x,\ BC=\frac{x'-x}{y'+y}y;$$

$$B'C+\frac{y}{y'}B'C=\frac{y'+y}{y'}B'C=x'-x,\ B'C=\frac{x'-x}{y'+y}y'.$$

Folglich ist wie leicht erhellen wird, nach bekannten Sätzen von der Parabel und vom Dreieck:

$$F=\frac{2}{3}xy+\frac{2}{3}x'y'+\frac{1}{2}\cdot\frac{x'-x}{y'+y}y^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{x'-x}{y'+y}y'^2$$

$$=\frac{2}{3}xy+\frac{2}{3}x'y'-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x'-x)(y'^2-y^2)}{y'+y}$$

$$=\frac{2}{3}xy+\frac{2}{3}x'y'-\frac{1}{2}(x'-x)(y'-y)$$

$$=\frac{1}{6}(xy+x'y')+\frac{1}{2}(xy'+x'y)$$

$$=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}y+y'\right)+\frac{1}{2}x'\left(\frac{1}{3}y'+y\right)$$

$$=\frac{1}{2}y\left(\frac{1}{3}x+x'\right)+\frac{1}{2}y'\left(\frac{1}{3}x'+x\right),$$

also

$$2pF=px\left(\frac{1}{3}y+y'\right)+px'\left(\frac{1}{3}y'+y\right)$$

$$=y^2\left(\frac{1}{3}y+y'\right)+y'^2\left(\frac{1}{3}y'+y\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(y^3+y'^3)+yy'(y+y')$$

$$=\frac{1}{3}(y+y')(y^2-yy'+y'^2+3yy')$$

$$=3\,(y+y')(y^2+2yy'+y'^2)=3(y+y')^3$$

oder

$$6pF=(y+y')^3,\ y+y'=\sqrt[3]{6pF}.$$

Bezeichnet man jetzt den Winkel ACB oder $A'CB'$ durch Θ, so ist

$$y=BC.\text{tang}\,\Theta=\frac{x'-x}{y'+y}y\,\text{tang}\,\Theta,$$

$$y'=B'C'.\,\text{tang}\,\Theta=\frac{x'-x}{y'+y}y'\,\text{tang}\Theta;$$

also

$$\tang\Theta=\frac{y'+y}{x'-x},\quad \cot\Theta=\frac{x'-x}{y'+y};$$

folglich

$$\cot\Theta=\frac{1}{p}\cdot\frac{y'^2-y^2}{y'+y}=\frac{1}{p}(y'-y);$$

und wir haben daher jetzt die beiden Gleichungen:

$$y'+y=\sqrt[3]{6pF},\quad y'-y=p\cot\Theta;$$

aus denen

$$y=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta),\quad y'=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)$$

und folglich

$$x=\frac{(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta)^2}{4p},\quad x'=\frac{(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)^2}{4p}$$

sich ergiebt.

Also ist auch

$$BB'=x'-x=\frac{y'^2-y^2}{p}=\frac{(y'-y)(y'+y)}{p}=\cot\Theta\sqrt[3]{6pF}$$

und

$$BC=y\cot\Theta=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta)\cot\Theta,$$

$$B'C=y'\cot\Theta=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)\cot\Theta;$$

so wie

$$AC=y\,\mathrm{cosec}\,\Theta=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta)\,\mathrm{cosec}\,\Theta,$$

$$A'C=y'\,\mathrm{cosec}\,\Theta=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)\,\mathrm{cosec}\,\Theta.$$

Endlich ist

$$z=SB+BC=x+\frac{x'-x}{y'+y}y=\frac{xy'+x'y}{y'+y}$$

$$=\frac{pxy'+px'y}{p(y'+y)}=\frac{y^2y'+y'^2y}{p(y'+y)}=\frac{yy'}{p},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$z=\frac{(\sqrt[3]{6pF}-p\cot\Theta)(\sqrt[3]{6pF}+p\cot\Theta)}{4p},$$

also, wie man leicht findet:

$$z=\frac{\sqrt[3]{36F^2}-p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2}{4\sqrt[3]{p}}.$$

Auf diese Weise sind jetzt die Linien x, y, x', y', z, AC, $A'C$, BC, $B'C$, BB' bloss durch die Grössen p, F, Θ ausgedrückt.

Wir wollen nun die Coordinaten des Schwerpunkts des parabolischen Flächenstücks ASA' bestimmen, indem wir diese Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnen, und $\mathfrak{y}$ als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Schwerpunkt des parabolischen Flächenstücks ASA' auf der linken oder auf der rechten Seite der Axe der Parabel liegt. Zu dem Ende haben wir nach der Lehre vom Schwerpunkte die folgenden Gleichungen:

$$F\mathfrak{x}=\frac{3}{5}x.\frac{2}{3}xy+\frac{3}{5}x'.\frac{2}{3}x'y'$$

$$+\frac{1}{3}(2x+z).\frac{1}{2}(z-x)y-\frac{1}{3}(2x'+z).\frac{1}{2}(x'-z)y',$$

$$F\mathfrak{y}=\frac{3}{8}y.\frac{2}{3}xy-\frac{3}{8}y'.\frac{2}{3}x'y'$$

$$+\frac{1}{3}y.\frac{1}{2}(z-x)y+\frac{1}{3}y'.\frac{1}{2}(x'-z)y'.$$

Nach dem Vorhergehenden ist:

$$2x+z=2x+\frac{yy'}{p}=\frac{2px+yy'}{p}=\frac{y(2y+y')}{p},$$

$$2x'+z=2x'+\frac{yy'}{p}=\frac{2px'+yy'}{p}=\frac{y'(2y'+y)}{p}$$

und

$$z-x=\frac{yy'}{p}-x=\frac{yy'-px}{p}=\frac{y(y'-y)}{p},$$

$$x'-z=x'-\frac{yy'}{p}=\frac{px'-yy'}{p}=\frac{y'(y'-y)}{p};$$

und weil nun

$$x^2 = \frac{y^4}{p^2}, \quad x'^2 = \frac{y'^4}{p^2}$$

ist, so ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{x} = \frac{2y^5}{5p^2} + \frac{2y'^5}{5p^2} + \frac{y^3(y'-y)(2y+y')}{6p^2} - \frac{y'^3(y'-y)(2y'+y)}{6p^2},$$

$$\mathfrak{F}\mathfrak{y} = \frac{y^4}{4p} - \frac{y'^4}{4p} + \frac{y^3(y'-y)}{6p} + \frac{y'^3(y'-y)}{6p};$$

oder

$$\mathfrak{F}\mathfrak{x} = \frac{2(y^5+y'^5)}{5p^2} + \frac{(y'-y)\{2(y^4-y'^4)+yy'(y^2-y'^2)\}}{6p^2},$$

$$\mathfrak{F}\mathfrak{y} = \frac{y^4-y'^4}{4p} + \frac{(y'-y)(y^3+y'^3)}{6p};$$

oder

$$\mathfrak{F}\mathfrak{x} = \frac{2(y^5+y'^5)}{5p^2} - \frac{(y-y')(y^2-y'^2)\{2(y^2+y'^2)+yy'\}}{6p^2},$$

$$\mathfrak{F}\mathfrak{y} = \frac{y^4-y'^4}{4p} - \frac{(y-y')(y^3+y'^3)}{6p};$$

oder

$$\mathfrak{F}\mathfrak{x} = \frac{2(y^5+y'^5)}{5p^2} - \frac{(y+y')(y-y')^2\{2(y^2+y'^2)+yy'\}}{6p^2},$$

$$\mathfrak{F}\mathfrak{y} = \frac{y^4-y'^4}{4p} - \frac{(y-y')(y^3+y'^3)}{6p}.$$

Nun ist aber

$$y^5+y'^5 = (y+y')(y^4-y^3y'+y^2y'^2-yy'^3+y'^4)$$

und

$$(y-y')^2\{2(y^2+y'^2)+yy'\}$$
$$= 2y^4-3y^3y'+2y^2y'^2-3yy'^3+2y'^4;$$

also ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{x} = \frac{(y+y')(2y^4+3y^3y'+2y^2y'^2+3yy'^3+2y'^4)}{30p^2},$$

oder, weil

$$2y^4+3y^3y'+2y^2y'^2+3yy'^3+2y'^4$$
$$=(y+y')^2\{2(y^2+y'^2)-yy'\}$$

ist:

$$F\mathfrak{x}=\frac{(y+y')^3\{2(y^2+y'^2)-yy'\}}{30p^2}$$
$$=\frac{(y+y')^3}{6p}\cdot\frac{2(y^2+y'^2)-yy'}{5p},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$F=\frac{(y+y')^3}{6p}$$

ist:

$$\mathfrak{x}=\frac{2(y^2+y'^2)-yy'}{5p}.$$

Ferner ist

$$y^4-y'^4=(y^2-y'^2)(y^2+y'^2),$$
$$y^3+y'^3=(y+y')(y^2-yy'+y'^2);$$

also nach dem Obigen:

$$F\mathfrak{y}=\frac{(y^2-y'^2)(y^2+y'^2)}{4p}-\frac{(y^2-y'^2)(y^2-yy'+y'^2)}{6p}$$
$$=\frac{(y^2-y'^2)(y^2+2yy'+y'^2)}{12p}=\frac{(y+y')^3}{6p}\cdot\frac{y-y'}{2},$$

d. i.

$$\mathfrak{y}=\frac{y-y'}{2}.$$

Zur Bestimmung der beiden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ des Schwerpunkts des parabolischen Flächenstücks ASA' haben wir daher die Formeln:

$$\mathfrak{x}=\frac{2(y^2+y'^2)-yy'}{5p},\quad \mathfrak{y}=\frac{y-y'}{2}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$4(y^2+y'^2)=2\sqrt[3]{36p^2F^2}+2p^2\cot\Theta^2,$$
$$4yy'=\sqrt[3]{36p^2F^2}-p^2\cot\Theta^2;$$

also

$$8(y^2+y'^2)-4yy'=3\sqrt[3]{36p^2F^2}+5p^2\cot\Theta^2$$

oder

$$2(y^2+y'^2)-yy'=\frac{3\sqrt[3]{36p^2F^2}+5p^2\cot\Theta^2}{4}.$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$y-y'=-p\cot\Theta;$$

also

$$\mathfrak{x}=\frac{3\sqrt[3]{36p^2F^2}+5p^2\cot\Theta^2}{20p},\ \mathfrak{y}=-\frac{1}{2}p\cot\Theta$$

oder

$$\mathfrak{x}=\frac{3\sqrt[3]{36F^2}+5p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2}{20\sqrt[3]{p}},\ \mathfrak{y}=-\frac{1}{2}p\cot\Theta.$$

Nach dem Obigen ist auch

$$p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2=\sqrt[3]{36F^2}-4z\sqrt[3]{p},$$

also

$$\mathfrak{x}=\frac{8\sqrt[3]{36F^2}-20z\sqrt[3]{p}}{20\sqrt[3]{p}}=\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{36F^2}{p}}-z.$$

Endlich ist auch

$$\sqrt[3]{36F^2}=p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2+4z\sqrt[3]{p},$$

folglich

$$\mathfrak{x}=\frac{8p\sqrt[3]{p}.\cot\Theta^2+12z\sqrt[3]{p}}{20\sqrt[3]{p}}=\frac{2}{5}p\cot\Theta^2+\frac{3}{5}z.$$

Also hat man zur Bestimmung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ auch die folgenden Ausdrücke:

$$\mathfrak{x}=\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{36F^2}{p}}-z,\ \mathfrak{y}=-\frac{1}{2}p\cot\Theta;$$

oder

$$\mathfrak{x}=\frac{2}{5}p\cot\Theta^2+\frac{3}{5}\mathfrak{z},\ \mathfrak{y}=-\frac{1}{2}p\cot\Theta;$$

oder auch

$$\mathfrak{x}=\frac{3}{5}\mathfrak{z}-\frac{4}{5}\mathfrak{y}\cot\Theta,\ \mathfrak{y}=-\frac{1}{2}p\cot\Theta.$$

§. 19.

Aufgabe. Einer der auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden, sämmtlich unter einander gleichen und ähnlichen, und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit völlig mit einander übereinstimmenden Schnitte des Schiffs sei in Taf. II. Fig. 9. die parabolische ebene Figur *MSN* mit dem Parameter *p*, deren Axe *SH* ist, und das Schiff schwimme so auf dem Wasser, dass die Ebene *MSN* und die Axe *SH* vertikal sind; man soll die Stabilität des Schiffs in Bezug auf die zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen für den beliebigen Drehungswinkel ω bestimmen.

Auflösung. Der eingetauchte Theil des Schnitts *MSN* bei der ersten Lage des Schiffs sei *ASB*, so dass also $AB=\varrho$ die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts *MSN* mit der Oberfläche des Wassers ist, auf welchem das Schiff schwimmt. Ist nun grösserer Deutlichkeit wegen *A'SB'* in Taf. II. Fig. 10. der eingetauchte Theil des Schnitts *MSN* bei der zweiten Lage des Schiffs, also *A'B'* die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts *MSN* mit der Oberfläche des Wassers, so erhellet leicht, dass im vorhergehenden Paragraphen $\Theta=90^0-\omega$ zu setzen ist, so wie auch auf der Stelle erhellet, dass man in demselben Paragraphen $F=\mathfrak{Y}'$ zu setzen hat.

Nimmt man nun, was jedenfalls verstattet ist, *S* als Anfang der Coordinaten an, so erhellet leicht aus der Lehre vom Schwerpunkte der Parabel, dass

$$\overset{\omega}{(\mathfrak{X}')}=0,\ \overset{\omega}{(\mathfrak{Y}')}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\varrho\right)^2}{p}=\frac{3\varrho^2}{20p}$$

ist. Ferner ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\overset{\omega}{(\mathfrak{x}_1)}=-\frac{1}{2}p\cot(90^0-\omega)=-\frac{1}{2}p\tang\omega,$$

$$\overset{\omega}{(\mathfrak{y}_1)}=\frac{3\sqrt[3]{36p^2\mathfrak{Y}'^2}+5p^2\cot(90^0-\omega)^2}{20p}$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{36p^2\mathfrak{V}'^2}+5p^2\operatorname{tang}\omega^2}{20p};$$

oder, weil

$$\mathfrak{V}'=\frac{4}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\varrho\right)^2}{p}\cdot\frac{1}{2}\varrho=\frac{\varrho^3}{6p},\ \mathfrak{V}'^2=\frac{\varrho^6}{36p^2}$$

ist:

$$\overset{w}{(x_1)}=-\frac{1}{2}p\operatorname{tang}\omega,\ \overset{w}{(y_1)}=\frac{3\varrho^2+5p^2\operatorname{tang}\omega^2}{20p}.$$

Also ist, wie man leicht findet:

$$\overset{w}{(\mathfrak{X}')}-\overset{w}{(x_1)}=\frac{1}{2}p\operatorname{tang}\omega,\ \overset{w}{(\mathfrak{Y}')}-\overset{w}{(y_1)}=-\frac{1}{4}p\operatorname{tang}\omega^2;$$

folglich

$$[\overset{w}{(\mathfrak{X}')}-\overset{w}{(x_1)}]\cos\omega-[\overset{w}{(\mathfrak{Y}')}-\overset{w}{(y_1)}]\sin\omega$$

$$=\frac{1}{4}p\,(2+\operatorname{tang}\omega^2)\sin\omega=\frac{1}{4}p\,(1+\sec\omega^2)\sin\omega.$$

Weil nun nach §. 8. bekanntlich

$$\mathfrak{S}=G\{v\sin\omega+[\overset{w}{(\mathfrak{X}')}-\overset{w}{(x_1)}]\cos\omega-[\overset{w}{(\mathfrak{Y}')}-\overset{w}{(y_1)}]\sin\omega\}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{S}=G\{v+\frac{1}{4}p\,(1+\sec\omega^2)\}\sin\omega,$$

oder auch, weil

$$(1+\sec\omega^2)\sin\omega$$

$$=\frac{\sin\omega}{\cos\omega}(\cos\omega+\cos\omega\sec\omega^2)=\operatorname{tang}\omega(\cos\omega+\sec\omega)$$

ist:

$$\mathfrak{S}=G\{v\sin\omega+\frac{1}{4}p\operatorname{tang}\omega\,(\cos\omega+\sec\omega)\}.$$

Da nach dem Obigen

$$p=\frac{\varrho^3}{6\mathfrak{V}'}$$

ist, so ist auch

$$\mathfrak{S} = G\{v \sin\omega + \frac{\varrho^3}{24\mathfrak{V}'} \operatorname{tang}\omega (\cos\omega + \sec\omega)\}$$

oder

$$\mathfrak{S} = \frac{G}{\mathfrak{V}'}\{v\mathfrak{V}' \sin\omega + \frac{1}{24}\varrho^3 \operatorname{tang}\omega (\cos\omega + \sec\omega)\}.$$

Wie v in jedem einzelnen Falle zu bestimmen ist, wird keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

§. 20

Aufgabe. Einer der auf den zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen senkrecht stehenden, sämmtlich einander gleichen und ähnlichen, und auch rücksichtlich ihrer materiellen Beschaffenheit völlig mit einander überstimmenden Schnitte des Schiffs sei in Taf. II. Fig. 11. die kreisförmige ebene Figur MSN, und das Schiff schwimme so auf dem Wasser, das die Ebene MSN und der Durchmesser SH des Kreises, von welchem der Schnitt MSN ein Theil ist, sich in vertikaler Lage befinden; man soll die Stabilität des Schiffs in Bezug auf die zum Grunde gelegten horizontalen Drehungsaxen und den beliebigen Drehungswinkel ω bestimmen.

Auflösung. Der eingetauchte Theil des Schnitts MSN bei der ersten Lage des Schiffs sei ASB, so dass also $AB = \varrho$ die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts MSN mit der Oberfläche des Wassers ist, auf welchem das Schiff schwimmt. Ist nun grösserer Deutlichkeit wegen $A'SB'$ in Taf. II. Fig. 12. der eingetauchte Theil des Schnitts MSN bei der zweiten Lage des Schiffs, also $A'B'$ die horizontale Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts mit der Oberfläche des Wassers bei der zweiten Lage des Schiffs, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar, wenn wir, was jedenfalls verstattet ist, den Mittelpunkt des Kreises, von welchem der Schnitt MSN ein Theil ist, als Anfang der Coordinaten annehmen:

$$(\overset{w}{\mathfrak{X}'}) = 0,\quad (\overset{w}{\mathfrak{Y}'}) = -\frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}$$

und

$$\overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = 0,\quad \overset{w}{\mathfrak{y}}_1 = -\frac{\varrho^2}{12\mathfrak{V}'}.$$

Weil nun aber bekanntlich nach §. 6. allgemein

$$(\overset{w}{x_1}) = \overset{w}{x_1}\cos\omega + \overset{w}{y_1}\sin\omega,$$
$$(\overset{w}{y_1}) = -\overset{w}{x_1}\sin\omega + \overset{w}{y_1}\cos\omega$$

ist, so ist

$$(\overset{w}{x_1}) = -\frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\sin\omega,\ (\overset{w}{y_1}) = -\frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\cos\omega;$$

folglich

$$[(\overset{w}{\mathfrak{X}'}) - (\overset{w}{x_1})]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}'}) - (\overset{w}{y_1})]\sin\omega$$
$$= \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\sin\omega\cos\omega + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}(1-\cos\omega)\sin\omega$$
$$= \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\sin\omega.$$

Nach §. 8. ist aber

$$\mathfrak{S} = G\{v\sin\omega + [(\overset{w}{\mathfrak{X}'}) - (\overset{w}{x_1})]\cos\omega - [(\overset{w}{\mathfrak{Y}'}) - (\overset{w}{y_1})]\sin\omega\},$$

also

$$\mathfrak{S} = G\left(v + \frac{\varrho^3}{12\mathfrak{V}'}\right)\sin\omega.$$

Diese Formel, welche mit der aus dem Obigen bekannten allgemeinen Näherungsformel für unendlich kleine Drehungswinkel völlig identisch ist, gilt also im vorliegenden Falle unter den gemachten Voraussetzungen in völliger Strenge für jeden endlichen bestimmten Drehungswinkel.

Wenn r der Halbmesser des Kreises ist, welchem der Schnitt MSN angehört, so lässt sich $\mathfrak{V}'$ aus r und ϱ bestimmen, was hier, als aus der Geometrie hinreichend bekannt, nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 21.

Bei wirklichen für praktische Zwecke bestimmten Stabilitätsbestimmungen von Schiffen wird man sich, um nicht in zu weitläufige Untersuchungen und Rechnungen verwickelt zu werden, damit begnügen müssen, die Stabilität nur unter Annahme unendlich kleiner Drehungswinkel und zugleich unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Curve, in welcher die horizontale Oberfläche des Wassers von der Oberfläche des auf demselben ruhig schwimmenden Schiffs geschnitten wird, die sogenannte **Wasserlinie**, von einer gewissen geraden Linie in zwei einander völlig gleiche und ähnliche Theile getheilt wird.

Hauptsächlich unterscheidet und betrachtet man nur zwei Arten von Drehungen des Schiffs um horizontale Axen, die wir hier bekanntlich allein in's Auge fassen. Das Rollen oder Schlingern, auch wohl Schwanken*), des Schiffs ist die Bewegung desselben nach der Richtung der Breite von einer Seite zur andern; das Stampfen**) dagegen ist seine Bewegung nach der Richtung der Länge vom Achterschiff zum Vorderschiff oder umgekehrt. In Bezug auf das Schlingern oder Rollen ist die Voraussetzung, dass die Wasserlinie von einer gewissen geraden Linie in zwei einander völlig gleiche und ähnliche Theile getheilt werde, immer in völliger Strenge erfüllt, und dieser geraden Linie, welche wir die Längenaxe der Wasserlinie nennen wollen, können die horizontalen Drehungsaxen des Schiffs bekanntlich parallel angenommen werden. In Bezug auf das Stampfen ist dagegen die Voraussetzung, dass die Wasserlinie durch eine gewisse gerade Linie, welche wir die Breitenaxe der Wasserlinie nennen wollen, und der wieder die horizontalen Drehungsaxen des Schiffs parallel angenommen werden sollen, in zwei einander völlig gleiche und ähnliche Theile getheilt wird, nur als näherungsweise erfüllt anzusehen. Uebrigens werden wir aber späterhin sehen, dass die Stabilität des Schiffs in Bezug auf das Stampfen im Allgemeinen grösser ist als die Stabilität in Bezug auf das Schlingern oder Rollen, so dass also, wenn nur in Bezug auf das Schlingern oder Rollen das Schiff hinreichende Stabilität besitzt, dies um so mehr rücksichtlich des Stampfens der Fall sein wird, und man sich daher meistens damit wird begnügen können, die Stabilität nur rücksichtlich des Schlingerns oder Rollens, wo die in Rede stehende Voraussetzung in völliger Strenge erfüllt ist, zu bestimmen.

Dies vorausgesetzt, sind nun aber bei Stabilitätsbestimmungen eigentlich zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem man nämlich bloss aus vorliegenden Plänen oder Rissen die Stabilität des erst zu bauenden Schiffs ermitteln soll, oder bei dieser Ermittelung das schon fertige Schiff mit völliger Ausrüstung und Ladung auf dem Wasser schwimmend annimmt. Jedoch kommen, wie man leicht übersieht, beide Fälle auf einen zurück. Auf jedem Plane oder Risse eines zu bauenden Schiffs soll nämlich wenigstens die Ladewasserlinie, d. h. diejenige Wasserlinie, bis zu welcher das völlig ausgerüstete und beladene Schiff sich in's Wasser einsenkt, angegeben sein, und bei jeder Prüfung eines Risses wird die Richtigkeit dieser Linie sorgfältig geprüft werden müssen. Wie diese Prüfung anzustellen ist, kann für Keinen, der die Grundlehren der Hydrostatik kennt, im Geringsten zweifelhaft sein, und gehört gar nicht hierher, wo wir bloss von der Stabilität der Schiffe zu handeln beabsichtigen. Ist aber auf dem Risse die Ladewasserlinie richtig befunden worden, so kann man dann offenbar die Bestimmung der Stabilität des Schiffs nach dem vorliegenden Risse ganz eben so vornehmen, als wenn man das völlig ausgerüstete und beladene Schiff auf dem Wasser schwimmend vor sich hätte, weshalb wir auch von nun an im

*) Französisch: roulis.

**) Französisch: tangage.

Folgenden diesen letzteren Fall allein stets im Auge behalten wollen.

Unter allen vorhergehenden Voraussetzungen bedient man sich zur Bestimmung der Stabilität des Schiffs am besten der aus §. 7. bekannten Formel:

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v+\frac{1}{12}\int_0^a(2F(\zeta))^3\partial\zeta\}\,\omega\,\text{Arc}\,1'',$$

wo ω in Secunden ausgedrückt ist, und $F(\zeta)$, welches nach §. 7. eigentlich als dem aufgetauchten Theile angehörend betrachtet werden muss, unter den wegen des Coordinatensystems immer festgehaltenen Voraussetzungen, natürlich als positiv anzusehen ist. Setzen wir grösserer Einfachheit wegen

$$\mathfrak{F}(\zeta)=2F(\zeta),$$

so hat man zur Bestimmung der Stabilität die Formel:

$$\mathfrak{S}=\bar{\omega}\{\mathfrak{V}'v+\frac{1}{12}\int_0^a(\mathfrak{F}(\zeta))^3\partial\zeta\}\,\omega\,\text{Arc}\,1''.$$

Diese Formel wollen wir nun im Folgenden genau zergliedern, und untersuchen, welche Grössen bei dem Gebrauche derselben zur Bestimmung der Stabilität einzeln zur Berechnung kommen müssen.

I. Nach der schon vorher gemachten Bemerkung muss der sehr kleine Drehungswinkel ω in Secunden ausgedrückt sein. Ferner ist

$$\text{Arc}\,1''=\frac{1}{206264,8},\quad \log\text{Arc}\,1''=0,6855749-6.$$

II. Das Symbol $\bar{\omega}$ bezeichnet bekanntlich das Gewicht einer Volumeneinheit Seewasser. Der preussische Cubikfuss destillirten Wassers wiegt bei einer Temperatur von 15° der 80theiligen Scale 66 preussische Pfund. Das specifische Gewicht des Seewassers ist nicht überall gleich und variirt von 1,02 bis 1,04. Eine sehr ausführliche Uebersicht der specifischen Gewichte des Seewassers nach den verschiedenen Meeren und Breiten findet man im Artikel „Meer" im Gehler'schen physikalischen Wörterbuche. N. A. Thl. VI. Abth. 3. S. 1628. Für den atlantischen Ocean kann man nach Horner's Bestimmungen des specifischen Gewichts des Seewassers für dasselbe im Mittel 1,02875 annehmen; für die Südsee ist dagegen das specifische Gewicht des Seewassers im Mittel 1,02692, woraus sich leicht nach dem Obigen das Gewicht eines preussischen Cubikfusses Seewasser in diesen Meeren berechnen lässt. Brommy (Die Marine. Berlin. 1848. 8. S. 9.) sagt: „Gewöhnlich nimmt man 70 Pfund Gewicht für den Cubikfuss Seewasser an", wobei aber nicht angegeben ist, was für Fusse und Pfunde gemeint sind. Nach der Encyclopédie méthodique. Marine. T.

II. p. 746. soll ein französischer Cubikfuss Seewasser ungefähr 72 livres wiegen, nach Du Hamel de Monceau (Anfangsgründe der Schiffsbaukunst. Berlin. 1791 4. Vorrede S. LXVIII.) dagegen 74. Meiner obigen Angabe nach preussischen Fussen und Pfunden und des specifischen Gewichts des Seewassers wird man sich in der Praxis am besten zur Bestimmung des Werthes von $\bar{\omega}$ bedienen.

III. Hauptsächlich kommt es nun auf die Berechnung des Werths des bestimmten Integrals

$$\int_0^a (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta$$

in dem Ausdrucke der Stabilität an.

Die horizontale oder wasserpasse Axe der Wasserlinie ist die Axe der ζ, eine auf derselben senkrecht stehende horizontale gerade Linie ist die Axe der ξ, und eine auf diesen beiden Axen senkrecht stehende vertikale gerade Linie die Axe der η. Den Anfangspunkt der $\xi\eta\zeta$ verlegen wir in einen der beiden Endpunkte der Axe der Wasserlinie, und a ist die jederzeit zu messende und als positiv zu betrachtende Länge der Axe der Wasserlinie. Die positiven η werden nach oben hin angenommen.

Ist die Wasserlinie eine nach einem bestimmten, durch eine Gleichung auszudrückenden Gesetze gekrümmte Curve, so lässt sich natürlich das Integral

$$\int_0^a (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta$$

nach den bekannten Regeln der Integralrechnung entwickeln, welchen Fall wir zunächst durch einige leichte Beispiele erläutern wollen.

1. Die Wasserlinie sei der Umfang des Rechtecks *ABCD* in Taf. II. Fig. 13. Die Längenaxe sei a, die Breitenaxe dagegen b.

Für die Stabilität in Bezug auf die Längenaxe ist

$$\mathfrak{S}(\zeta) = b,$$

also

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = b^3 \partial\zeta, \int (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = b^3 \zeta$$

und folglich

$$\int_0^a (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = ab^3.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt des Rechtecks *ABCD* durch J, so ist $J = ab$, und folglich für die Längenaxe:

$$\int_0^a (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = b^2 J.$$

Für die Bereitenaxe ist eben so:

$$\int_0^b (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = a^2 J.$$

Insofern $a > b$ ist, ist das letztere Integral grösser als das erstere.

2. Die Wasserlinie sei der Umfang des Rhombus *ABCD* in Taf. II. Fig. 14. Die Längenaxe sei a, die Breitenaxe dagegen b.

Für die Langenaxe ist, wenn man zuvörderst bloss eine der beiden Hälften betrachtet, in welche der Rhombus *ABCD* durch die Breitenaxe getheilt wird:

$$\zeta : \mathfrak{S}(\zeta) = \frac{1}{2} a : b,$$

also

$$\mathfrak{S}(\zeta) = \frac{2b}{a} \zeta,$$

und folglich

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{8b^3}{a^3} \zeta^3, \int (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{2b^3}{a^3} \zeta^4;$$

woraus

$$\int_0^{\frac{1}{2}a} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{8} ab^3.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt des Rhombus *ABCD* durch J, so ist bekanntlich $J = \frac{1}{2} ab$, also

$$\int_0^{\frac{1}{2}a} (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{4} b^2 J,$$

und folglich für die Längenaxe:

$$\int_0^a (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{2} b^2 J.$$

Für die Breitenaxe ist eben so:

$$\int_0^b (\mathfrak{S}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{1}{2} a^2 J.$$

Insofern $a > b$ ist, ist das letztere Integral grösser als das erstere.

3. Die Wasserlinie sei der Umfang der aus den beiden gleichen parabolischen Segmenten *ABC* und *ADC* in Taf. II. Fig. 15., deren Scheitel *B* und *D* sind, zusammengesetzten Figur *ABCD*.

Der Parameter der betreffenden Parabel sei p, die Längenaxe und die Breitenaxe seien respective a und b.

Für die Längenaxe ist, wenn wir zuvörderst bloss eine der beiden Hälften betrachten, in welche die Figur *ABCD* durch die Breitenaxe getheilt wird, nach der Lehre von der Parabel:

$$\left(\frac{1}{2}a-\zeta\right)^2=p\left\{\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\mathfrak{S}(\zeta)\right\}=\frac{1}{2}p\{b-\mathfrak{S}(\zeta)\},$$

oder, wenn wir $\frac{1}{2}a-\zeta=z$ setzen:

$$2z^2=p\{b-\mathfrak{S}(\zeta)\}=p\{b-\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}a-z\right)\};$$

also

$$\mathfrak{S}(\zeta)=\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}a-z\right)=b-\frac{2}{p}z^2.$$

Folglich ist

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=-(b-\frac{2}{p}z^2)^3\partial z$$

oder

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\left(\frac{2}{p}z^2-b\right)^3\partial z,$$

d. i.

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\left(\frac{8}{p^3}z^6-\frac{12b}{p^2}z^4+\frac{6b^2}{p}z^2-b^3\right)\partial z,$$

woraus

$$\int_0^{\frac{1}{2}a}(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta$$

$$=\int_{\frac{1}{2}a}\left(\frac{8}{p^3}z^6-\frac{12b}{p^2}z^4+\frac{6b^2}{p}z^2-b^3\right)\partial z$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}a}(b^3-\frac{6b^2}{p}z^2+\frac{12b}{p^2}z^4-\frac{8}{p^3}z^6)\partial z$$

$$=\frac{1}{2}ab^3-\frac{a^3b^2}{4p}+\frac{3a^5b}{40p^2}-\frac{a^7}{112p^3}$$

folgt. Weil nun aber

$$\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}pb,\quad p=\frac{a^2}{2b},\quad \frac{1}{p}=\frac{2b}{a^2}$$

ist, so ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}a}(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\frac{1}{2}ab^3-\frac{1}{2}ab^3+\frac{3}{10}ab^3-\frac{1}{14}ab^3=\frac{8}{35}ab^3.$$

Bezeichnen wir den Flächeninhalt der Figur *ABCD* durch *J*, so ist bekanntlich $J=4.\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}b=\frac{2}{3}ab$, also

$$\int_0^{\frac{1}{2}a}(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\frac{12}{35}b^2J,$$

und folglich für die Längenaxe:

$$\int_0^{a}(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\frac{24}{35}b^2J.$$

Für die Breitenaxe ist, wenn wir wieder zuvörderst bloss eine der beiden Hälften betrachten, in welche die Figur *ABCD* durch die Längenaxe getheilt wird, nach der Lehre von der Parabel:

$$\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}(\zeta)\right)^2=p\zeta,\quad \mathfrak{S}(\zeta)=2p^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}};$$

folglich

$$(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=8p^{\frac{3}{2}}\zeta^{\frac{3}{2}},\int(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\frac{16}{5}p^{\frac{3}{2}}\zeta^{\frac{5}{2}};$$

also, wie man leicht findet:

$$\int_0^{\frac{1}{2}b}(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\frac{2\sqrt{2}}{5}pb^2\sqrt{pb}.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$p=\frac{a^2}{2b},\quad J=\frac{2}{3}ab$$

ist, so ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}b}(\mathfrak{S}(\zeta))^3\partial\zeta=\frac{1}{5}a^3b=\frac{3}{10}a^2J,$$

und folglich für die Breitenaxe:

$$\int_0^b (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta = \frac{3}{5} a^2 J.$$

Insofern

$$\frac{3}{5} a^2 > \frac{24}{35} b^2, \quad a^2 > \frac{8}{7} b^2, \quad a > b\sqrt{\frac{8}{7}}$$

ist, ist das letztere Integral grösser als das erstere.

4. Die Wasserlinie sei der Umfang der Ellipse *ABCD* in Taf. II. Fig. 16. Die Längenaxe und die Breitenaxe seien respective $2a$ und $2b$.

Für die Längenaxe ist, wenn wir zuvörderst bloss eine der beiden Hälften betrachten, in welche die Ellipse *ABCD* durch die Breitenaxe getheilt wird:

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - (a-\zeta)^2}$$

oder, wenn wir $a - \zeta = z$ setzen:

$$\mathfrak{F}(\zeta) = \mathfrak{F}(a-z) = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - z^2},$$

also

$$(\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta = -\frac{8b^3}{a^3}(a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z,$$

und folglich

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta = -\frac{8b^3}{a^3}\int_a^0 (a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z = \frac{8b^3}{a^3}\int_0^a (a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z.$$

Nach einer bekannten Reductionsformel ist

$$\int (a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z$$

$$= \frac{5a^2 - 2z^2}{8} z\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{3}{8} a^4 \int \frac{\partial z}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}},$$

d. i.

$$\int (a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z$$

$$= \frac{5a^2 - 2z^2}{8} z\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{3}{8} a^4 \operatorname{Arctang} \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

also

$$\int_0^a (a^2-z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z = \frac{3}{8} a^4 . \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{16} a^4 \pi;$$

folglich

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta = \frac{3}{2} a b^3 \pi,$$

oder, weil der Flächeninhalt E der ganzen Ellipse durch die Formel $E = ab\pi$ dargestellt wird,

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta = \frac{3}{2} b^2 E.$$

Daher ist für die Längenaxe:

$$\int_0^{2a} (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta = 3b^2 E = \frac{3}{4}(2b)^2 E.$$

Ganz eben so ist für die Breitenaxe:

$$\int_0^{2b} (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta = 3a^2 E = \frac{3}{4}(2a)^2 E.$$

Insofern $2a > 2b$ ist, ist das letztere Integral grösser als das erstere.

Wir wollen uns mit den vorhergehenden Beispielen begnügen, weil diese schon für unsern Zweck hinreichen. Weil man nämlich die Wasserlinie eines Schiffs in den meisten Fällen mit dem Umfange einer der vorher betrachteten Figuren wenigstens annähernd als zusammenfallend zu betrachten sich berechtigt halten darf, so geht mittelst des Vorhergehenden aus einer einigermassen sorgfältigen Betrachtung der Formel

$$\mathfrak{S} = \bar{\omega} \{ \mathfrak{V}' v + \frac{1}{12} \int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial \zeta \} \, \omega \, \text{Arc}\, 1''$$

auf der Stelle die Richtigkeit der schon oben ausgesprochenen Behauptung hervor, dass im Allgemeinen die Stabilität der Schiffe in Bezug auf die Breitenaxe, oder die Stabilität bei'm Stampfen, grösser ist als die Stabilität der Schiffe in Bezug auf die Längenaxe, oder die Stabilität bei'm Rollen oder Schlingern, alle sonstigen Umstände natürlich in beiden Fällen als gleich vorausgesetzt, und dass es daher nur darauf ankommt, den Schiffen eine, um sie vor Unfällen möglichst sicher zu stellen, hinreichende Stabilität in Bezug auf die Längenaxe zu verschaffen, weil dann die Stabilität in Bezug auf die Breitenaxe schon von selbst eine hinlängliche Grösse haben wird.

Wenn die Wasserlinie nach keinem bestimmten durch eine Gleichung ausdrückbaren Gesetze gekrümmt ist, welches der in der Praxis eigentlich nur allein vorkommende Fall ist, so lässt sich der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta$$

nur näherungsweise bestimmen. Zu dem Ende theile man die Axe *a* der Wasserlinie in eine grössere oder geringere Anzahl von Theilen, und messe sowohl die Abstände der einzelnen Theilpunkte von dem Anfangspunkte der Axe der Wasserlinie, als auch die den einzelnen Theilpunkten entsprechenden Werthe von $\mathfrak{F}(\zeta)$. Dann kann man nach einer der in der Abhandlung Nr. XX. im Archiv der Mathematik und Physik. Thl. XIV. entwickelten Methoden zur näherungsweisen Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale den Werth des Integrals

$$\int_0^a (\mathfrak{F}(\zeta))^3 \partial\zeta$$

berechnen, und wird denselben im Allgemeinen desto genauer erhalten, je grösser die Anzahl der in der Axe der Wasserlinie angenommenen Theilpunkte ist. Ueber diese Methoden hier uns weiter zu verbreiten, ist völlig überflüssig, weil in der angeführten Abhandlung schon alles Nöthige über dieselben gesagt worden ist; und wir bemerken daher nur noch, dass man sich nach unserer Meinung bei wirklichen Anwendungen am vortheilhaftesten der Cotesischen Formeln bedienen, und also die Axe der Wasserlinie in eine grössere oder geringere Anzahl gleicher Theile eintheilen wird; je grösser die Anzahl dieser gleichen Theile ist, desto genauer erhält man im Allgemeinen das gesuchte Resultat, und will man dann mit den Cotesischen Näherungsformeln noch die aus der angeführten Abhandlung gleichfalls bekannten Stirling'schen Correctionsformeln verbinden, so wird dies zur Erhöhung der Genauigkeit der gewonnenen Resultate noch wesentlich beitragen. Dass man aber auch die Gauss'ischen, aus der angeführten Abhandlung gleichfalls ihren Grundzügen nach bekannten Näherungsformeln in Anwendung bringen könnte, versteht sich von selbst; jedoch würde dies nicht so einfach sein, wie die Anwendung der vorher genannten Formeln. Die allgemein bekannte sogenannte Simpson'sche Näherungsformel (a. a. O. S. 291.) ist früher meistens bei dergleichen Rechnungen in der Schiffsbaukunst in Anwendung gebracht, und namentlich von Chapman (Traité de la construction des vaisseaux. Paris. 1839. 4. p. 1. etc.) dazu empfohlen worden; jedoch scheint mir dies weder so einfach, noch so genau zu sein, als die directe Anwendung der Cotesichen Näherungsformeln, wenn man namentlich mit denselben noch die wichtigen Stirling'schen Correctionsformeln verbindet.

IV. Ferner kommt es jetzt auf die Bestimmung des Volumens $\mathfrak{V}'$ an, und wir wollen daher im Allgemeinen zeigen, wie sich das Volumen eines beliebigen Körpers am besten annähernd bestimmen lässt, wovon dann unmittelbar die Anwendung auf die Bestimmung des Volumens $\mathfrak{V}'$ gemacht werden kann, ohne dass wir darüber noch besondere Erläuterungen den allgemeinen Entwickelungen hinzuzufügen brauchen werden.

Durch den gegebenen Körper, dessen Volumen wir*) überhaupt durch V bezeichnen wollen, lege man eine gerade Linie hindurch, die wir die x-Axe nennen wollen. Die Länge des auf dieser Axe von der Oberfläche des Körpers V abgeschnittenen Theils werde durch a bezeichnet, und in den einen der beiden Endpunkte dieses Theils lege man den Anfang der x, indem man zugleich die auf a selbst liegenden x als positiv betrachtet. Wird dann der Flächeninhalt des im Allgemeinen dem Endpunkte der Abscisse x entsprechenden, auf der x-Axe senkrecht stehenden Schnitts des Körpers V durch F_x bezeichnet, so ist, was hier keiner weiteren Erläuterung bedürfen wird:

$$V = \int_0^a F_x \partial x.$$

Theilt man also a in eine grössere oder geringere Anzahl von Theilen, und bestimmt sowohl die Entfernungen der einzelnen Theilpunkte von dem Anfangspunkte der x, als auch die diesen Theilpunkten entsprechenden Werthe von F_x, d. h. die Flächenräume der denselben entsprechenden, auf der x-Axe senkrecht stehenden Schnitte des Körpers V, so kann man mittelst der bekannten Näherungsformeln zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale das Volumen

$$V = \int_0^a F_x \partial x$$

näherungsweise berechnen, im Allgemeinen mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser die Anzahl der auf der Linie a angenommenen Theilpunkte ist.

Um nun aber überhaupt den Flächeninhalt F_x eines beliebigen der in Rede stehenden Schnitte des Körpers V zu bestimmen, lege man durch diesen Schnitt eine beliebige gerade Linie hindurch, welche wir die y-Axe nennen wollen, bezeichne den auf dieser Axe von dem Umfange des Schnitts F_x abgeschnittenen Theil durch b, lege den Anfang der y in den einen der beiden Endpunkte dieses Theils, und betrachte die auf b selbst liegenden y als positiv. Bezeichnen wir dann die Länge der im Allgemeinen dem Endpunkte der Abscisse y entsprechenden, auf

*) Ohne alle Beziehung auf die früher gebrauchten Bezeichnungen.

der y-Axe senkrecht stehenden Sehne oder Chorde des Schnitts F_x durch f_y, so ist, was hier keiner weiteren Erläuterung bedürfen wird:

$$F_x = \int_0^b f_y \partial y,$$

und wenn man nun wieder die Linie b in eine grössere oder geringere Anzahl von Theilen theilt, und sowohl die Entfernungen der einzelnen Theilpunkte von dem Anfangspunkte der y, als auch die diesen Theilpunkten entsprechenden Werthe von f_y, d. h. die Längen der denselben entsprechenden, auf der y-Axe senkrecht stehenden Sehnen oder Chorden von F_x bestimmt, so kann man mittelst der bekannten Näherungsformeln zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale den Flächenraum

$$F_x = \int_0^b f_y \partial y$$

berechnen, im Allgemeinen mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser die Anzahl der auf der Linie b angenommenen Theilpunkte ist.

Hieraus sieht man also, wie man sich im Allgemeinen bei der näherungsweisen Bestimmung des Volumens V zu verhalten hat, was nun auch unmittelbar auf die Bestimmung des Volumens $\mathfrak{V}'$ angewandt werden kann.

V. Endlich kommt es nun noch auf die Bestimmung der Grösse

$$v = \overset{w}{y}' - Y$$

an, wo $\overset{w}{y}'$ und Y sich auf das System der $\xi\eta\zeta$ oder ein anderes beliebiges demselben paralleles Coordinatensystem beziehen können. Weil diese Grösse aus den zwei Theilen $\overset{w}{y}'$ und Y besteht, so haben wir uns mit der Bestimmung eines jeden dieser beiden Theile besonders zu beschäftigen.

Was zuerst die Grösse $\overset{w}{y}'$ betrifft, so wird dieselbe durch die Bestimmung des Schwerpunkts des homogenen Körpers $\mathfrak{V}'$ erhalten, und wir wollen daher im Allgemeinen zeigen, wie der Schwerpunkt eines beliebigen homogenen Körpers am besten durch Näherung bestimmt werden kann, was dann unmittelbar auf die Bestimmung des Schwerpunkts von $\mathfrak{V}'$ und demnach der Grösse $\overset{w}{y}'$ angewandt werden kann, und hier nach den gegebenen allgemeinen Entwickelungen einer besonderen Erläuterung nicht weiter bedürfen wird.

Durch den gegebenen Körper, dessen Volumen wir im Allgemeinen durch V bezeichnen wollen, lege man drei auf einander senkrecht stehende Axen der x, y, z, und bezeichne die ersten Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte der Axe der x mit der Oberfläche des gegebenen Körpers durch a und b, indem zugleich angenommen wird, dass a kleiner als b sei. Die Coordinaten des gesuchten Schwerpunkts des gegebenen homogenen Körpers in dem angenommenen Systeme seien X, Y, Z, wobei eine Beziehung dieser Bezeichnungen zu den früher gebrauchten Bezeichnungen nicht Statt findet, indem die vorliegende Untersuchung ganz allein steht, und von uns möglichst allgemein gehalten werden wird. Den Flächeninhalt des im Allgemeinen dem Endpunkte der Coordinate x entsprechenden, auf der Axe der x senkrecht stehenden Schnitts des Körpers V, indem derselbe als Function von x betrachtet wird, bezeichne man durch F_x, und denke sich das Intervall $b-a$ in n einander gleiche Theile getheilt, deren jeden wir durch i bezeichnen wollen, so dass also

$$i=\frac{b-a}{n}$$

ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\mathfrak{Y}=iF_a+iF_{a+i}+iF_{a+2i}+\ldots+iF_{a+(n-1)i}$$

und

$$\mathfrak{X}=i(a+\frac{1}{2}i)F_a+i(a+\frac{3}{2}i)F_{a+i}+i(a+\frac{5}{2}i)F_{a+2i}+\ldots$$
$$\ldots\ldots+i(a+\frac{2n-1}{2}i)F_{a+(n-1)i},$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte, indem man im Folgenden bei allen Gränzen voraussetzt, dass n sich dem Unendlichen oder, was Dasselbe ist, i sich der Null nähere, offenbar:

$$X=\text{Lim}\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}}=\frac{\text{Lim}\mathfrak{X}}{\text{Lim}\mathfrak{Y}}.$$

Augenscheinlich ist aber

$$\begin{aligned}V&=\text{Lim}\mathfrak{Y}\\&=\text{Lim}.i\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+\ldots+F_{a+(n-1)i}\}\\&=\text{Lim}.i\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+\ldots+F_{a+ni}\}-\text{Lim}.iF_b,\end{aligned}$$

folglich, weil nach einem bekannten Satze

$$\int_a^b F_x\partial x=\text{Lim}.i\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+\ldots+F_{a+ni}\}$$

und offenbar

$$\mathrm{Lim}.iF_b=0$$

ist:

$$V=\int_a^b F_x\partial x.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{X}=$$

$$i\{aF_a+(a+i)F_{a+i}+(a+2i)F_{a+2i}+\ldots+(a+(n-1)i)F_{a+(n-1)i}\}$$
$$+\frac{1}{2}i^2\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+\ldots+F_{a+(n-1)i}\}$$
$$=i\{aF_a+(a+i)F_{a+i}+(a+2i)F_{a+2i}+\ldots+(a+ni)F_{a+ni}\}$$
$$-ibF_b$$
$$+\frac{1}{2}i.i\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+\ldots+F_{a+(n-1)i}\},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\mathrm{Lim}\,\mathfrak{X}=$$
$$\mathrm{Lim}.i\{aF_a+(a+i)F_{a+i}+(a+2i)F_{a+2i}+\ldots+(a+ni)F_{a+ni}\}$$
$$-\mathrm{Lim}.ibF_b+\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.iV,$$

folglich nach einem bekannten Satze, und weil offenbar

$$\mathrm{Lim}.ibF_b=0,\quad \mathrm{Lim}.iV=0$$

ist:

$$\mathrm{Lim}\,\mathfrak{X}=\int_a^b xF_x\partial x.$$

Also ist nach dem Obigen

$$X=\frac{\int_a^b xF_x\partial x}{\int_a^b F_x\partial x}$$

oder

$$X=\frac{\int_a^b xF_x\partial x}{V}.$$

Bezeichnen wir jetzt den gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Abstand des Schwerpunkts des Schnitts F_x von der Ebene der xz durch f_x, und setzen der Kürze wegen

$$\mathfrak{Y}=if_aF_a+if_{a+i}F_{a+i}+if_{a+2i}F_{a+2}+\ldots+if_{a+(n-1)i}F_{a+(n-1)i},$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$Y=\text{Lim}\,\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{V}}=\frac{\text{Lim}\mathfrak{Y}}{\text{Lim}\mathfrak{V}}\,.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{Y}=i\{f_aF_a+f_{a+i}F_{a+i}+f_{a+2i}F_{a+2i}+\ldots+f_{a+ni}F_{a+ni}\}$$
$$-if_bF_b,$$

also

$$\text{Lim}\mathfrak{Y}=$$
$$\text{Lim}.i\{f_aF_a+f_{a+i}F_{a+i}+f_{a+2i}F_{a+2i}+\ldots+f_{a+ni}F_{a+ni}\}$$
$$-\text{Lim}.if_bF_b,$$

folglich nach einem bekannten Satze, und weil offenbar

$$\text{Lim}.if_bF_b=0$$

ist:

$$\text{Lim}\mathfrak{Y}=\int_a^b f_xF_x\partial x.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$Y=\frac{\int_a^b f_xF_x\partial x,}{\int_a^b F_x\partial x}$$

oder

$$Y=\frac{\int_a^b f_xF_x\partial x}{V}\,.$$

Bezeichnet nun φ_x den gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Abstand des Schwerpunkts des Schnitts F_x von der Ebene der xy, so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher:

$$Z=\frac{\int_a^b \varphi_x F_x \partial x}{\int_a^b F_x \partial x}$$

oder

$$Z=\frac{\int_a^b \varphi_x F_x \partial x}{V}.$$

Also haben wir zur Bestimmung der gesuchten Coordinaten X, Y, Z des Schwerpunkts des homogenen Körpers V die folgenden Formeln:

$$X=\frac{\int_a^b xF_x\partial x}{\int_a^b F_x\partial x},\quad Y=\frac{\int_a^b f_xF_x\partial x}{\int_a^b F_x\partial x},\quad Z=\frac{\int_a^b \varphi_xF_x\partial x}{\int_a^b F_x\partial x};$$

oder

$$X=\frac{\int_a^b xF_x\partial x}{V},\quad Y=\frac{\int_a^b f_xF_x\partial x}{V},\quad Z=\frac{\int_a^b \varphi_xF_x\partial x}{V}.$$

Setzen wir

$$y=f_x,\quad z=\varphi_x;$$

wo also y, z die als Functionen von x betrachtete zweite und dritte Coordinate des Schwerpunkts des Schnitts F_x bezeichnen, so ist:

$$X=\frac{\int_a^b xF\,\partial x}{\int_a^b F_x\partial x},\quad Y=\frac{\int_a^b yF_x\partial x}{\int_a^b F_x\partial x},\quad Z=\frac{\int_a^b zF_x\partial x}{\int_a^b F_x\partial x};$$

oder

$$X=\frac{\int_a^b xF_x\partial x}{V},\quad Y=\frac{\int_a^b yF_x\partial x}{V},\quad Z=\frac{\int_a^b zF_x\partial x}{V}.$$

Wegen der in diesen Formeln vorkommenden Grössen

$$y=f_x,\quad z=\varphi_x$$

haben wir nun noch zu zeigen, wie überhaupt die Coordinaten des Schwerpunkts einer ebenen Figur bestimmt werden können.

Zu dem Ende lege man durch die gegebene Figur, deren Flächeninhalt durch F bezeichnet werden mag, zwei auf einander senkrecht stehende Axen der x und y hindurch, so dass die Axe der x die Figur F in zwei Theile theilt, welche wir, jenachdem in ihnen die positiven oder die negativen y liegen, respective den positiven und den negativen Theil der Figur F nennen wollen. Ueberhaupt mag der Abscisse x in dem positiven Theile die Ordinate y_x, in dem negativen Theile die gleichfalls als positiv betrachtete Ordinate y'_x entsprechen. Die gesuchten Coordinaten des Schwerpunkts der Figur F seien X, Y, und die Abscissen der beiden Durchschnittspunkte des Umfangs der Figur F mit der Axe der x seien a und b, so dass a kleiner als b ist. Das Intervall $b-a$ theile man wieder in n gleiche Theile ein, und setze

$$\frac{b-a}{n}=i,$$

wo i eine positive Grösse ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}= \; & iy_a+iy_{a+i}+iy_{a+2i}+\dots+iy_{a+(n-1)i}\\ & +iy'_a+iy'_{a+i}+iy'_{a+2i}+\dots+iy'_{a+(n-1)i}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}= \; & i(a+\tfrac{1}{2}i)y_a+i(a+\tfrac{3}{2}i)y_{a+i}+i(a+\tfrac{5}{2}i)y_{a+2i}+\dots\\ & \dots+i(a+\tfrac{2n-1}{2}i)y_{a+(n-1)i}\\ & +i(a+\tfrac{1}{2}i)y'_a+i(a+\tfrac{3}{2}i)y'_{a+i}+i(a+\tfrac{5}{2}i)y'_{a+2i}+\dots\\ & \dots+i(a+\tfrac{2n-1}{2}i)y'_{a+(n-1)i},\end{aligned}$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$X=\text{Lim}\,\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{S}}=\frac{\text{Lim}\,\mathfrak{X}}{\text{Lim}\,\mathfrak{S}}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}F &= \mathrm{Lim}\,\mathfrak{F}\\
&= \mathrm{Lim}\,.\,i(y_a+y_{a+i}+y_{a+2i}+\ldots+y_{a+(n-1)i})\\
&\quad+\mathrm{Lim}\,.\,i(y'_a+y'_{a+i}+y'_{a+2i}+\ldots+y'_{a+(n-1)i})\\
&= \mathrm{Lim}\,.\,i(y_a+y_{a+i}+y_{a+2i}+\ldots+y_{a+ni})\\
&\quad+\mathrm{Lim}\,.\,i(y'_a+y'_{a+i}+y'_{a+2i}+\ldots+y'_{a+ni})\\
&\quad-\mathrm{Lim}\,.\,iy_b-\mathrm{Lim}\,.\,iy'_b,\end{aligned}$$

also nach einem bekannten Satze und weil offenbar

$$\mathrm{Lim}\,.\,iy_b=0,\quad \mathrm{Lim}\,.\,iy'_b=0$$

ist:

$$F=\mathrm{Lim}\,\mathfrak{F}=\int_a^b y_x\partial x+\int_a^b y'_x\partial x=\int_a^b(y_x+y'_x)\partial x\,.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}&=i\{ay_a+(a+i)y_{a+i}+(a+2i)y_{a+2i}+\ldots+(a+ni)y_{a+ni}\}\\
&\quad+i\{ay'_a+(a+i)y'_{a+i}+(a+2i)y'_{a+2i}+\ldots+(a+ni)y'_{a+ni}\}\\
&\quad+\frac{1}{2}i\,.\,i\{y_a+y_{a+i}+y_{a+2i}+\ldots+y_{a+(n-1)i}\}\\
&\quad+\frac{1}{2}i\,.\,i\{y'_a+y'_{a+i}+y'_{a+2i}+\ldots+y'_{a+(n-1)i}\}\\
&\quad-iby_b-iby'_b,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&\mathrm{Lim}\,\mathfrak{X}=\\
&\mathrm{Lim}\,i\,.\{ay_a+(a+i)y_{a+i}+(a+2i)y_{a+2i}+\ldots+(a+ni)y_{a+ni}\}\\
&+\mathrm{Lim}.i\{ay'_a+(a+i)y'_{a+i}+(a+2i)y'_{a+2i}+\ldots+(a+ni)y'_{a+ni}\}\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{Lim}.iF-\mathrm{Lim}.ib(y_b+y'_b),\end{aligned}$$

d. i. nach einem bekannten Satze, und weil offenbar

$$\mathrm{Lim}\,.iF=0,\ \mathrm{Lim}\,.\,ib(y_b+y'_b)=0$$

ist:

$$\mathrm{Lim}\,\mathfrak{X}=\int_a^b xy_x\partial x+\int_a^b xy'_x\partial x=\int_a^b x(y_x+y'_x)\partial x\,.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$X = \frac{\int_a^b x(y_x + y'_x)\partial x}{\int_a^b (y_x + y'_x)\partial x}$$

oder

$$X = \frac{\int_a^b x(y^x + y'_x)\partial x}{F}.$$

Setzen wir ferner der Kürze wegen

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y} = \; & \frac{1}{2} iy^2{}_a + \frac{1}{2} iy^2{}_{a+i} + \frac{1}{2} iy^2{}_{a+2i} + \ldots + \frac{1}{2} iy^2{}_{a+(n-1)i} \\ & - \frac{1}{2} iy'^2{}_a - \frac{1}{2} iy'^2{}_{a+i} - \frac{1}{2} iy'^2{}_{a+2i} - \ldots - \frac{1}{2} iy'^2{}_{a+(n-1)i},\end{aligned}$$

so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte offenbar

$$Y = \text{Lim}\, \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{F}} = \frac{\text{Lim}\mathfrak{Y}}{\text{Lim}\mathfrak{F}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & \text{Lim}\mathfrak{Y} \\ = \; & \frac{1}{2}\text{Lim}.\, i\{y^2{}_a + y^2{}_{a+i} + y^2{}_{a+2i} + \ldots + y^2{}_{a+ni}\} \\ & - \frac{1}{2}\text{Lim}.\, i\{y'^2{}_a + y'^2{}_{a+i} + y'^2{}_{a+2i} + \ldots + y'^2{}_{a+ni}\} \\ & + \frac{1}{2}\text{Lim}.\, iy^2{}_b - \frac{1}{2}\text{Lim}.\, iy'^2{}_b,\end{aligned}$$

d. i., wie sogleich erhellet,

$$\text{Lim}\mathfrak{Y} = \frac{1}{2}\int_a^b y^2{}_x\,\partial x - \frac{1}{2}\int_a^b y'^2{}_x\partial x = \frac{1}{2}\int_a^b (y^2{}_x - y'^2{}_x)\partial x,$$

folglich

$$Y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\int_a^b (y^2{}_x - y'^2{}_x)\,\partial x}{\int_a^b (y_x + y'_x)\,\partial x}$$

oder

$$Y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_a^b (y^2{}_x-y'^2{}_x)\partial x}{F}.$$

Man hat also jetzt zur Bestimmung der gesuchten Coordinaten X, Y des Schwerpunkts der ebenen Figur F die folgenden Formeln:

$$X=\frac{\int_a^b x(y_x+y'_x)\partial x}{\int_a^b (y_x+y'_x)\partial x}, \quad Y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_a^b (y^2{}_x-y'^2{}_x)\partial x}{\int_a^b (y_x+y'_x)\partial x}$$

oder

$$X=\frac{\int_a^b x(y_x+y'_x)\partial x}{F}, \quad Y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_a^b (y^2{}_x-y'^2{}_x)\partial x}{F}.$$

Bei der Einrichtung, welche wir allen vorhergehenden Formeln hier gegeben haben, kann es nicht dem geringsten Zweifel unterliegen, wie man dieselben zur Bestimmung des Schwerpunkts des homogenen Körpers $\mathfrak{V}'$ mit Hülfe der bekannten Formeln zur annähernden Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale, und also auch zur Bestimmung der Grösse $\overset{w}{y}'$, anzuwenden hat. Weitere Erläuterungen hierüber würden an diesem Orte unnütze Weitläufigkeit sein, da man, wie gesagt, den einzuschlagenden Weg auf der Stelle übersieht.

Endlich ist nun noch die Bestimmung der in dem obigen Ausdruck von v vorkommenden Grösse Y übrig. Diese Bestimmung erfordert die Ermittelung des Schwerpunkts des ganzen als ein ungleichförmig dichter Körper betrachteten Schiffs, und ist eben deshalb eigentlich die weitläufigste Operation bei der ganzen Stabilitätsbestimmung des Schiffs. Dessenungeachtet können wir über diese allerdings weitläufige Operation hier nichts weiter sagen, indem alle dabei zu befolgenden Regeln durch die aus der Statik bekannte allgemeine Theorie des Schwerpunkts vollständig an die Hand gegeben werden. Immer wird man aber das ganze Schiff in verschiedene Theile zerlegen müssen, welche mit möglichster Annäherung als homogene oder gleichförmig dichte Körper betrachtet werden können, wird nach dem Vorhergehenden die Schwerpunkte dieser einzelnen homogenen Theile des Schiffs zu suchen, und daraus nach den allgemein bekannten Formeln aus der Theorie des Schwerpunkts auf den Schwerpunkt des ganzen Schiffs zu schliessen haben. Je mehr Genauigkeit man zu erreichen beabsichtigt, desto weitläufiger und zeitraubender wird natürlich diese Operation werden, mancherlei Abkürzungen werden sich aber bei der wirklichen Ausführung derselben von selbst ergeben über welche sich im Voraus etwas Allgemeines nicht feststellen lässt, weshalb wir uns hier mit diesen wenigen Andeutungen begnügen müssen.

Mit der Lehre von der Stabilität der Schiffe hängt ein anderer für die Schiffsbaukunst sehr wichtiger Gegenstand nahe zusammen, den wir hier für jetzt jedoch nur von seiner allgemeinen theoretischen Seite betrachten wollen, ohne uns auf specielle Anwendungen, die wir späteren Untersuchungen vorbehalten, hier schon einzulassen; wir meinen nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher das aus seiner ruhigen Gleichgewichtslage auf dem Wasser gebrachte Schiff in jene Lage wieder zurückkehrt, oder die Geschwindigkeit, mit welcher es rollt oder stampft. In dieser Beziehung pflegt man das Schiff mit einem einfachen Pendel zu vergleichen, welches seine Schwingungen ganz in derselben Zeit vollendet wie das rollende oder stampfende Schiff seine oscillatorischen Bewegungen auf dem Wasser. Je langsamer diese Bewegungen vor sich gehen, d. h. je grösser die auf die Vollendung derselben verwandte Zeit, oder je länger das dem Schiffe isochrone einfache Pendel ist, desto vortheilhafter ist es natürlich, desto weniger werden dem Schiffe seine oscillatorischen Bewegungen auf dem Wasser Gefahr bringen, und desto mehr wird dasselbe überhaupt seinem Zwecke entsprechen.

Denken wir uns jetzt zuvörderst ganz im Allgemeinen ein System auf ihre Schwerpunkte reducirter Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ldots;$$

welches sich um die feste horizontale Axe der z als Drehungsaxe in einer oscillatorischen Bewegung befindet; so haben wir nach §. 3. bekanntlich die Gleichung

$$\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\Sigma m(xY-yX).$$

Bezeichnet nun $2g$ die Intensität der auf die Masseneinheit bezogenen Schwere, und sind

$$p,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ldots$$

gewisse an den materiellen Punkten

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \ldots$$

stets nach vertikalen Richtungen wirkende, natürlich mit den gehörigen Zeichen genommene Kräfte; so ist offenbar, wenn man sich nur aus §. 3. an die Bedeutung der Symbole

$$X',\ Y',\ Z';\ X'_1,\ Y'_1,\ Z'_1;\ X'_2,\ Y'_2,\ Z'_2;\ X'_3,\ Y'_3,\ Z'_3;\ldots$$

erinnert:

$$X'=0,\quad Y'=p-2gm,\quad Z'=0;$$
$$X'_1=0,\quad Y'_1=p_1-2gm_1,\quad Z'_1=0;$$
$$X'_2=0,\quad Y'_2=p_2-2gm_2,\quad Z'_2=0;$$
$$X'_3=0,\quad Y'_3=p_3-2gm_3,\quad Z'_3=0;$$

u. s. w.

also nach §. 3.

$$X=\frac{X'}{m}=0,\quad Y=\frac{Y'}{m}=\frac{p}{m}-2g,\quad Z=\frac{Z'}{m}=0;$$
$$X_1=\frac{X_1'}{m_1}=0,\quad Y_1=\frac{Y'_1}{m_1}=\frac{p_1}{m_1}-2g,\quad Z_1=\frac{Z'_1}{m_1}=0;$$
$$X_2=\frac{X'_2}{m_2}=0,\quad Y_2=\frac{Y'_2}{m_2}=\frac{p_2}{m_2}-2g,\quad Z_2=\frac{Z'_2}{m_2}=0;$$
$$X_3=\frac{X'_3}{m_3}=0,\quad Y_3=\frac{Y'_3}{m_3}=\frac{p_3}{m_3}-2g,\quad Z_3=\frac{Z'_3}{m_3}=0;$$

u. s. w.

Folglich ist offenbar

$$\Sigma m(xY-yX)=\Sigma x(p-2gm)=\Sigma px-2g\Sigma mx,$$

also nach dem Obigen

$$\Sigma m(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})=\Sigma px-2g\Sigma mx.$$

Bezeichnen wir aber durch

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots.$$

die Entfernungen der materiellen Punkte

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ldots.$$

von der horizontalen Drehungsaxe, und durch

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ldots.$$

die am Ende der Zeit t von den Linien

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ldots.$$

mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem man alle diese Winkel von dem positiven Theile der

Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin zählt; so ist offenbar, wenn wir als einen Repräsentanten der übrigen bloss den materiellen Punkt m in's Auge fassen, in völliger Allgemeinheit:

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi;$$

also

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \frac{\partial y}{\partial t} = r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

und

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -r\sin\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - r\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = r\cos\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - r\sin\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

und daher nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2g\,\Sigma mr\cos\varphi.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Schwerpunkts des Systems der Massen

$$m,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4, \ldots .$$

von der horizontalen Drehungsaxe durch R, und durch Φ den auf dieselbe Weise wie vorher genommenen Winkel, welchen am Ende der Zeit t die Linie R mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst; so ist nach der Lehre vom Schwerpunkt

$$\frac{mx + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m + m_1 + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

$$= \frac{mr\cos\varphi + m_1r_1\cos\varphi_1 + m_2r_2\cos\varphi_2 + m_3r_3\cos\varphi_3 + \ldots}{m + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

$$= \frac{\Sigma mr\cos\varphi}{\Sigma m} = R\cos\Phi,$$

und folglich

$$\Sigma mr\cos\varphi = R\cos\Phi\,\Sigma m,$$

also nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\,\Sigma m.$$

Weil aber die Winkel φ und Φ, und eben so die Winkel φ_1 und Φ, φ_2 und Φ, φ_3 und Φ, u. s. w. immer, d. h. für jedes t, um dieselbe constante Grösse von einander verschieden sind, so ist

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\ \ldots;$$

also

$$\Sigma mr^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Sigma mr^2\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\,\Sigma m.$$

Als ein System wie das so eben betrachtete lässt sich wenigstens näherungsweise ein Schiff auf dem Wasser ansehen. Bei unendlich kleinen Drehungswinkeln kann man nämlich wenigstens näherungsweise annehmen, dass die das Schiff sollicitirende Kraft $+G$ immer, d. h. bei allen Lagen des Schiffs, in dem Schwerpunkte des eingetauchten Theils bei der ruhigen Gleichgewichtslage des Schiffs auf dem Wasser wirke, und kann unter dieser Voraussetzung im Vorhergehenden, indem m als im Schwerpunkte des eingetauchten Theils bei der ruhigen Gleichgewichtslage des Schiffs auf dem Wasser befindlich angenommen wird,

$$p = +G$$

und

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \ldots = 0$$

setzen, wodurch die obige Gleichung in die Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = Gr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\,\Sigma m,$$

oder, weil

$$G = 2g\Sigma m$$

ist, in die Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = G\,(r\cos\varphi - R\cos\Phi)$$

übergeht.

Die horizontale Drehungsaxe wollen wir nun in der durch den Schwerpunkt des ganzen Schiffs und den Schwerpunkt des eingetauchten Theils des Schiffs bei seiner ruhigen Gleichgewichtslage auf dem Wasser gehenden Vertikalebene annehmen, und wollen unter der Voraussetzung, dass die Stabilität des Schiffs positiv sei, die Länge eines einfachen Pendels, welches seine Schwingungen ganz auf dieselbe Weise vollendet wie der untere der beiden Theile, in welche die durch den Schwerpunkt des ganzen Schiffs und den Schwerpunkt des eingetauchten Theils bei der ruhigen Gleichgewichtslage des Schiffs auf dem Wasser gehende Vertikale durch die horizontale Drehungsaxe getheilt wird, die seinigen, durch L bezeichnen. Dann müssen wir, um diese Pendellänge zu bestimmen, die folgenden Fälle unterscheiden.

Der Fall, dass an dem Schiffe die Kraft $-G$ oberhalb, die Kraft $+G$ unterhalb der Drehungsaxe wirkt, kann nicht vorkommen, weil dann offenbar die Stabilität nicht, wie doch vorher angenommen worden ist, positiv sein könnte.

Wenn die Kraft $-G$ unterhalb, die Kraft $+G$ oberhalb der Drehungsaxe wirkt, so ergiebt sich aus der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$\Sigma mr^2.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\Sigma pr\cos\varphi-2gR\cos\varphi\,\Sigma m$$

auf der Stelle die Gleichung

$$L\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-2g\cos\Phi,$$

und da nun nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=G(r\cos\varphi-R\cos\Phi)$$

ist, so erhält man durch Division

$$\frac{\Sigma mr^2}{L}=-\frac{G(r\cos\varphi-R\cos\Phi)}{2g\cos\Phi}.$$

Nun ist aber in diesem Falle offenbar

$$\varphi=\Phi-\pi,\quad \cos\varphi=-\cos\Phi;$$

also

$$\frac{\Sigma mr^2}{L}=\frac{G(r+R)}{2g}.$$

Ferner ist aber

$$X_1=R\cos\Phi,\quad \overset{w}{x}_1=r\cos\varphi=-r\cos\Phi;$$

also

$$X_1 - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = (r + R)\cos\Phi,$$

und folglich, weil nach §. 6. bekanntlich

$$\mathfrak{S} = G(X_1 - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1)$$

ist:

$$\mathfrak{S} = G(r + R)\cos\Phi,$$

also

$$G(r+R) = \mathfrak{S}\sec\Phi.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\sec\Phi.$$

Offenbar ist aber in diesem Falle

$$\Phi = \omega + \frac{3}{2}\pi,$$

also

$$\cos\Phi = \sin\omega, \quad \sec\Phi = \mathrm{cosec}\,\omega;$$

folglich

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\mathrm{cosec}\,\omega.$$

Wenn die Kräfte $-G$ und $+G$ beide unterhalb der Drehungsaxe wirken, so ergiebt sich aus der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\Sigma m$$

wieder auf der Stelle die Gleichung

$$L\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -2g\cos\Phi,$$

und da nun nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)$$

ist, so erhält man durch Division

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = - \frac{G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)}{2g\cos\Phi}.$$

Nun ist aber in diesem Falle

$$\varphi = \Phi, \quad \cos\varphi = \cos\Phi;$$

also

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = - \frac{G(r-R)}{2g}.$$

Ferner ist aber

$$X_1 = R\cos\Phi, \quad \overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = r\cos\varphi = r\cos\Phi;$$

also

$$X_1 - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = -(r-R)\cos\Phi,$$

und folglich, weil nach §. 6. bekanntlich

$$\mathfrak{S} = G(X_1 - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1)$$

ist:

$$\mathfrak{S} = - G(r-R)\cos\Phi,$$

also

$$- G(r-R) = \mathfrak{S}\sec\Phi.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\sec\Phi.$$

Offenbar ist aber auch in diesem Falle

$$\Phi = \omega + \frac{3}{2}\pi,$$

also

$$\cos\Phi = \sin\omega, \quad \sec\Phi = \operatorname{cosec}\omega;$$

folglich

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\operatorname{cosec}\omega.$$

Wenn die Kräfte $-G$ und $+G$ beide oberhalb der Drehungsaxe wirken, so ergiebt sich aus der oben bewiesenen allgemeinen Gleichung

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Sigma pr\cos\varphi - 2gR\cos\Phi\,\Sigma m$$

leicht die Gleichung

$$L\frac{\partial^2(\Phi+\pi)}{\partial t^2} = -2g\cos(\Phi+\pi),$$

d. i. die Gleichung

$$L\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 2g\cos\Phi,$$

und da nun nach dem Obigen

$$\Sigma mr^2 . \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)$$

ist, so erhält man durch Division

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{G(r\cos\varphi - R\cos\Phi)}{2g\cos\Phi}.$$

Nun ist aber in diesem Falle

$$\varphi = \Phi, \quad \cos\varphi = \cos\Phi;$$

also

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{G(r-R)}{2g}.$$

Ferner ist aber

$$X_1 = R\cos\Phi, \quad \overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = r\cos\varphi = r\cos\Phi;$$

also

$$X_1 - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1 = -(r-R)\cos\Phi,$$

und folglich, weil nach §. 6. bekanntlich

$$\mathfrak{S} = G(X_1 - \overset{w}{\mathfrak{x}}_1)$$

ist:

$$\mathfrak{S} = -G(r-R)\cos\Phi,$$

also

$$G(r-R) = -\mathfrak{S}\sec\Phi.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = -\frac{\mathfrak{S}}{2g}\sec\Phi.$$

Offenbar ist aber in diesem Falle

$$\Phi = \omega + \frac{1}{2}\pi,$$

also

$$\cos\Phi = -\sin\omega, \quad \sec\Phi = -\operatorname{cosec}\omega;$$

folglich

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\operatorname{cosec}\omega.$$

Hiernach haben wir also die völlig allgemein gültige Gleichung

$$\frac{\Sigma mr^2}{L} = \frac{\mathfrak{S}}{2g}\operatorname{cosec}\omega,$$

aus welcher

$$L = \frac{2g\Sigma mr^2}{\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega}$$

folgt. Dass diese Gleichung nur mit desto grösserer Genauigkeit richtig ist, je kleiner der Winkel ω ist, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

Bezeichnet man die Gewichte der Massen

$$m, m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$$

respective durch

$$\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4, \ldots;$$

so ist offenbar

$$2g\Sigma mr^2 = \Sigma\mathfrak{G}r^2,$$

und folglich

$$L = \frac{\Sigma\mathfrak{G}r^2}{\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega}.$$

Der Zähler $\Sigma\mathfrak{G}r^2$ dieses Bruchs ist bekanntlich das in Bezug auf die zum Grunde gelegte Drehungsaxe genommene Trägheitsmoment des Schiffs, und der Nenner $\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega$ ist die durch $\sin\omega$ dividirte Stabilität des Schiffs in Bezug auf dieselbe Drehungsaxe. Man erhält also die Länge des dem Schiffe isochronen einfachen Pendels, wenn man das Trägheitsmoment des Schiffs in

Bezug auf die angenommene Drehungsaxe durch seine mit der Cosecante des Winkels ω multiplicirte Stabilität in Bezug auf dieselbe Drehungsaxe dividirt. Dass das Product $\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega$ von dem Drehungswinkel ω bei unendlich kleinen Drehungswinkeln ganz unabhängig ist, geht aus dem aus dem Obigen bekannten Ausdrucke der Stabilität in diesem Falle unmittelbar hervor. Dass man bei wirklichen Anwendungen der obigen Formel in der Praxis die horizontale Drehungsaxe durch den Schwerpunkt des Schiffs legen muss, bedarf nach den in §. 5. angestellten allgemeinen Betrachtungen kaum noch einer besonderen Bemerkung. Ganz auf dieselbe Art wie vorher ausgedrückt, findet sich der obige Satz in Euler's Scientia navalis. T. I. Petropoli. 1749. 4°. Propositio 21. Coroll. 1. p. 96., wo Euler sagt: „Longitudo ergo penduli isochroni aequatur momento inertiae figurae respectu axis gyrationis diviso per stabilitatem figurae respectu eiusdem axis, prout quidem stabilitatem exprimere constituimus. Euler's theoretische Darstellung lässt aber Vieles zu wünschen übrig, und man muss sich, mit Rücksicht auf die oben in §. 9. Anmerkung. gemachten Bemerkungen, an Euler's Begriff der Stabilität und die Form, unter welcher er und die meisten älteren Schriftsteller dieselbe darstellen, erinnern, wenn man die völlige Uebereinstimmung seines Satzes, der sich auch ohne Beweis in seiner Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux. Nouvelle édition. Paris 1776. 8. p. 63. findet, erkennen will.

Bezeichnen wir die Schwingungszeit des dem Schiffe isochronen einfachen Pendels von der Länge L durch $\mathfrak{T}$, so ist bekanntlich nach den Lehren der Mechanik, wenn ε die Elongation bezeichnet:

$$\mathfrak{T}=\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}\left\{\begin{aligned}&1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\\&+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\sin\frac{1}{2}\varepsilon^4\\&+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\sin\frac{1}{2}\varepsilon^6\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}.$$

Ist aber wie im vorliegenden Falle ε unendlich klein, so kann man näherungsweise

$$\mathfrak{T}=\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

setzen; und führt man nun für L seinen obigen Ausdruck ein, so erhält man zur Berechnung von $\mathfrak{T}$ die Formel

$$\mathfrak{T}=\pi\sqrt{\frac{\Sigma\mathfrak{G}r^2}{2g\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\omega}},$$

mittelst welcher man sogleich die Oscillationszeit des Schiffes findet.

Um den Werth der im Vorhergehenden angestellten Untersuchungen für die Praxis, welchen man, ungeachtet der jedenfalls sehr grossen Wichtigkeit und des grossen Interesses derselben, doch auch zu überschätzen sich hüten muss, ohne auf weitläufige Erörterungen mich für jetzt einlassen zu können, in möglichst helles Licht zu setzen, will ich diese Abhandlung mit den folgenden Worten Euler's (Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux. p. 65.) schliessen:

„Lorsque la mer se trouve dans une grande agitation, on comprend aisément que les mouvemens de roulis et de tangage en doivent souffrir des altérations très considérables, les vagues étant seules capables, de produire un balancement dans le vaisseau, quand même il n'auroit pas été incliné par quelque autre force. Or, pour déterminer les mouvemens qui seront imprimés alors au vaisseau, la théorie nous abandonne entièrement, parceque nous ignorons encore absolument les loix selon lesquelles une eau agitée pousse les corps qui y nagent, et qu'ainsi la formule trouvée ci-dessus pour la stabilité, ne sauroit plus avoir lieu; il en est de même de celle pour la longueur du pendule isochrone, qui devient entièrement fausse. L'experience ne nous permet pas de douter que les forces qu'une mer troublée par des vagues exerce sur le vaisseau, ne soient tout à-fait différentes de celles qu'on observe dans une eau calme. On a même remarqué que lorsqu'un vaisseau est porté en haut par les vagues, il s'élève par un mouvement accéleré, et qu'il retombe par un mouvement retardé; ce qui paroit directement opposé aux principes reçus sur l'action des eaux."

Anmerkung.

Im Obigen ist an einigen Stellen (z. B. S. 20. und S. 97.) das ausgezeichnete Werk von Chapman: „Traité de la construction des vaisseaux" angeführt und die auf seinem Titel stehende Jahrzahl 1839 angegeben worden. Ich bemerke aber, dass dieses Werk weit älter, und der schon im Jahre 1781 zu Brest erschienenen französischen Uebersetzung nur ein neuer Titel vorgedruckt worden ist. Eine neue Ausgabe dieser Uebersetzung ist die oben angeführte vom Jahre 1839 nicht.

II.

Ueber das Integral

$$\int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i}).e^{-n\varphi i}\partial\varphi\,.$$

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim.

Wir wollen bei diesem Integral voraussetzen, dass $f(re^{\varphi i})$ innerhalb der Grenzen 0 und 2π für φ, so wie innerhalb bestimmter Gränzen für r kontinuirlich sei; dass ferner $f(re^{\varphi i})$ an den Gränzen $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ den gleichen Werth annehme und endlich, dass

$$f(re^{\varphi i})=\psi(r,\varphi)+i\chi(r,\varphi).$$

Setzen wir nun

$$\int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i})e^{-n\varphi i}\partial\varphi=K$$

so ist offenbar

$$\frac{\partial^n K}{\partial r^n}=\int_0^{2\pi} f^{(n)}(re^{\varphi i})\partial\varphi,$$

vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten $f'(re^{\varphi i}),\ldots f^{(n)}(re^{\varphi i})$ innerhalb der gleichen Gränzen, wie oben, nicht unendlich werden.

Da

$$f(re^{\varphi i})=\psi(r,\varphi)+i\chi(r,\varphi),$$

$$f^{(n)}(re^{\varphi i})=\frac{\partial^n.f(re^{\varphi i})}{\partial r^n}.e^{-n\varphi i};$$

so ist auch

$$f^{(n)}(re^{\varphi i})=\psi_1(r,\varphi)+i\chi_1(r,\varphi),$$

wobei

$$\psi_1(r,\varphi)=\frac{\partial^n\psi(r,\varphi)}{\partial r^n}.\cos n\theta+\frac{\partial^n\chi(r,\varphi)}{\partial r^n}\sin n\theta,$$

$$\chi_1(r,\varphi)=-\frac{\partial^n\psi(r,\varphi)}{\partial r^n}\sin n\,\theta+\frac{\partial^n\chi(r,\varphi)}{\partial r^n}\cos n\theta;$$

und da $\psi(r,\varphi)$, $\chi(r,\varphi)$ für $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ die gleichen Werthe erlangen, so werden auch $\psi_1(r,\varphi)$, $\chi_1(r,\varphi)$ für $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ dieselben Werthe haben. Nun ist

$$\frac{\partial . f^{(n)}(re^{\varphi i})}{\partial \varphi} = re^{\varphi i} f^{(n+1)}(re^{\varphi i}),$$

$$r\int_i^{2\pi} e^{\varphi i} f^{(n+1)}(re^{\varphi i})\partial\varphi = f^{(n)}(re^{0}) - f^{(n)}(re^{2\pi i}) = 0;$$

d. i.

$$\int_0^{2\pi} e^{\varphi i} f^{(n+1)}(re^{\varphi i})\partial\varphi = 0,$$

wenn auch $f^{(n+1)}(re^{\varphi i})$ innerhalb der bestimmten Gränzen endlich bleibt. Aber

$$e^{\varphi i} f^{(n+1)}(re^{\varphi i}) = \frac{\partial . f^{(n)}(re^{\varphi i})}{\partial r},$$

also

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial . f^{(n)}(re^{\varphi i})}{\partial r}\partial\varphi = \frac{\partial . \int_0^{2\pi} f^{(n)}(re^{\varphi i})\partial\varphi}{\partial r} = 0,$$

d. i.

$$\int_0^{2\pi} f^{(n)}(re^{\varphi i})\partial\varphi = C.$$

Liegt der Werth $r = 0$ innerhalb der mehrfach genannten Gränzen von r, so findet man leicht

$$C = 2\pi f^{(n)}(0),$$

also

$$\int_0^{2\pi} f^{(n)}(re^{\varphi i})\partial\varphi = 2\pi f^{(n)}(0),$$

d. h.

$$\frac{\partial^n K}{\partial r^n} = 2\pi f^{(n)}(0), \quad K = \frac{2\pi f^{(n)}(0)}{1.2....n} r^n;$$

oder endlich

$$\int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i}) e^{-n\varphi i}\partial\varphi = \frac{2\pi . f^{(n)}(0) r^n}{1.2.3....n},$$

indem $\frac{\partial^{n-1}K}{\partial r^{n-1}}, ... \frac{\partial K}{\partial r}$ alle Null sind für $r = 0$.

Dieser Werth hat also Statt, wenn $f(re^{\varphi i})$ folgende Bedingungen erfüllt:

a) dass $f(re^{\varphi i}), f'(re^{\varphi i}), ... f^{(n)}(re^{\varphi i})$ alle endlich bleiben innerhalb bestimmter Gränzen von r, und dass 0 zwischen diesen Gränzen liegt;

b) dass $f(re^{\varphi i})$ und also auch seine Differentialquotienten periodisch in Bezug auf φ seien, und der Umfang einer Periode 2π sei. (M. s. Journal de Math. par J. Liouville. Avril 1846.).

III.

Beiträge zur höheren Lehre von den Logarithmen.

Von

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

ordentl. Prof. der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag.

(Vorgelesen in den Versammlungen der Section der königl. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Prag für Philosophie und reine Mathematik am 8. März, 5. und 17. April 1850.)

In dem Begriffe und der auf ihn gegründeten Lehre von den Logarithmen, so wie auch in dem Geschichtlichen und Literarischen derselben, dürfte noch manches Interessante und Wissenswerthe beizubringen sein. Davon sollen die nachfolgenden zwei Abschnitte einen Beleg geben.

Erster Abschnitt.

Betrachtung der bisher gegebenen Begriffe der Logarithmen, und Aufstellung eines neuen.

Bisher wurden im Wesentlichen folgende vier Begriffe von den Logarithmen aufgestellt:

1. der von dem eigentlichen Entdecker der Logarithmen, John Neper, ursprünglich gegebene;

2. der von Jobst Byrg, dem gleichzeitigen Entdecker der Logarithmen, gebrauchte;

3. der von Johann Kepler verwendete;

4. der gegenwärtig seit Euler in den Lehrgebäuden der Algebra übliche.

Ihnen füge ich noch bei

5. einen neuen, von mir selbst erdachten, in mancherlei Beziehung, vornehmlich für den Elementar-Unterricht, mit grossem Vortheil verwendbaren Begriff.

A.

Neper's Erklärung der Logarithmen, durch gleichzeitig angemessen stetig veränderliche Grössen.

1.

Neper*) veröffentlichte im Jahre 1614 die Lehre der von ihm entdeckten Logarithmen in folgender lesenswürdigen, jetzt aber schon sehr seltenen Schrift:**)

Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi et expeditissimi explicatio. Authore ac Inventore, Joanne Nepero, Barone Merchistonii, etc. Scoto. Edinburgi. Ex officina Andreae Hart Bibliopolae, 1614. 4min. Text 64, logarithmische Tafeln 90 Seiten.***)

Auf Seite 1 — 4 giebt er von seinen Logarithmen die nachstehende, äusserst scharfsinnige phoronomische Erklärung, die ich hier wortgetreu mittheile.

Caput I. De definitionibus.

1. *Definitio.* Linea aequaliter crescere dicitur, quum punctus, eam describens, aequalibus momentis per aequalia intervalla progreditur.

---

*) Eigentlich John Napier oder Nepair, Lord, Baron von Merchiston, ein Schotte, geb. 1550, gest. 1618.

**) Ich benützte das in der Bibliothek des k. k. Bombardier-Corps zu Wien vorhandene, aus dem Nachlass weil. Jos. Hantschl's, Prof. der höh. Math. am Wiener k. k. polytech. Institute, erstandene Exemplar.

***) Davon erschien im Jahre 1619 sowohl ein blosser Abdruck zu Lyon, als auch eine von Neper's Sohn Robert besorgte neue Ausgabe mit einigen nachgelassenen Werken, darunter als hieher gehörig:

Primo, Mirifici ipsius canonis constructio, et Logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines;

Secundo, Appendix de alia, eaque praestantiore Logarithmorum specie construenda.

Im Jahre 1620 endlich wurden auch diese nachgelassenen Werke zu Lyon nachgedruckt.

Von diesen Nachlässen ist mir jedoch nichts in die Hände gekommen.

Sit (Taf. III. Fig. 1.) punctus A, a quo ducenda est linea fluxu alterius puncti, qui sit B. Fluat ergo primo momento B ab A in C, secundo momento a C in D, tertio momento a D in E, atque ita deinceps in infinitum describendo lineam $ACDEF$....., intervallis AC, CD, DE, EF,...., et caeteris deinceps aequalibus, et momentis aequalibus descriptis. Dicetur haec linea, per definitionem superius traditam, aequaliter crescere.

Corollarium. Unde hoc incremento quantitates aequidifferentes temporibus aequidifferentibus produci est necesse.

Ut in superiori schemate unico momento B ab A in C, et tribus momentis ab A in E progressum est; sic sex momentis ab A in H, et octo momentis ab A in K. Sunt autem illorum momentorum unius et trium, et horum sex et octo differentiae aequales, scilicet duorum. Sic etiam erunt quantitatum illarum AC et AE, et harum AH et AK differentiae CE et HK aequales, aequidifferentes ergo, ut supra.

2. *Definitio.* Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens, aequalibus momentis, segmenta abscindit, ejusdem continuo rationis ad lineas a quibus abscinduntur.

Exempli gr. Sit (Taf. III. Fig. 2.) linea sinus totius, $\alpha\omega$, proportionaliter minuenda. Sit punctus, transcursu suo eam minuens, β; sit denique ratio segmentorum singulorum ad lineas, a quibus abscinduntur, ut QR ad QS. Qua ergo ratione secatur QS in R, eadem ratione (per 10. 6 Eucl.) secetur $\alpha\omega$ in γ. Atque sic β, transcurrens ab α in γ, primo momento ab $\alpha\omega$ abscindat $\alpha\gamma$, relicta linea seu sinu $\gamma\omega$. Ab hac autem $\gamma\omega$ procedens β secundo momento abscindat simile segmentum quale est QR ad QS, quod sit $\gamma\delta$, relicto sinu $\delta\omega$. A quo proinde tertio momento abscindat β simili ratione segmentum $\delta\varepsilon$, relicto sinu $\varepsilon\omega$,...; et ita deinceps in infinitum. Dico itaque, hic sinus totius lineam $\alpha\omega$..... proportionaliter decrescere in sinum $\eta\omega$, aut in alium quemvis ultimum, in quo sistit β; et sic in aliis.

Coroll. Unde hoc aequalibus momentis decremento, ejusdem etiam rationis proportionales lineas relinqui, est necesse.

Quae enim superius est continua proportio sinuum minuendorum

$$\alpha\omega,\ \gamma\omega,\ \delta\omega,\ \varepsilon\omega,\ \zeta\omega,\ \eta\omega,\ \ldots.$$

atque sagmentorum ab eis abscissorum

$$\alpha\gamma,\ \gamma\delta,\ \delta\varepsilon,\ \varepsilon\zeta,\ \zeta\eta,\ \eta\iota,\ \ldots.$$

eadem erit necessario etiam sinuum relictorum proportio, scilicet

$\gamma\omega,\ \delta\omega,\ \varepsilon\omega,\ \zeta\omega,\ \eta\omega,\ \iota\omega,\ \ldots$

ut ex 19. prop. 5., et 11. prop. 7. Euclidis patet.

. . . .

Es verhält sich nemlich

$$SQ:RQ:SR = \alpha\omega:\gamma\omega:\alpha\gamma$$
$$= \gamma\omega:\delta\omega:\gamma\delta$$
$$= \delta\omega:\varepsilon\omega:\delta\varepsilon$$
$$= \varepsilon\omega:\zeta\omega:\varepsilon\zeta$$

u. s. f.

4. *Defin.* Synchroni motus sunt, qui simul et eodem tempore fiunt.

Ut in superioribus (Taf. III. Fig. 1. und 2.) esto, quod B moveatur ab A in C, eodem tempore quo β movetur ab α in γ; dicentur rectae AC et $\alpha\gamma$ synchrono motu describi.

5. *Defin.* Quum quolibet motu et tardior et velocior dari possit, sequetur necessario, cuique motui aequivelocem (quem nec tardiorem nec velociorem definimus) dari posse.

6. *Defin.* Logarithmus ergo cujusque sinus est numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio aequiveloce.

Ex. gr. Repetantur ambo superiora schemata (Taf. III. Fig. 1. und 2.) et moveatur B semper et ubique eadem seu aequali velocitate qua coepit moveri β initio quum est in α. Deinde primo momento procedat B ab A in C, et eodem momento procedat β ab α in γ proportionaliter: erit numerus definiens AC logarithmus lineae seu sinus $\gamma\omega$. Tum secundo momento promoveatur B a C in D, et eodem momento promoveatur proportionaliter β a γ in δ: erit numerus definiens AD logarithmus sinus $\delta\omega$.....; et ita in infinitum.

Coroll. Unde sinus totius 10000000 nullum seu 0 est logarithmus: et per consequens numerorum majorum sinu toto logarithmi sunt nihilo minores.

. . . .

Itaque logarithmos sinuum qui semper majores nihilo sunt, abundantes vocamus, et hoc signo +, aut nullo praenotamus. Logarithmos autem minores nihilo defectivos vocamus, praenotantes eis hoc signum —.

Admonitio. Erat quidem initio liberum, cuilibet sinui, aut quantitati nullum seu 0 pro logarithmo attribuisse: sed

praestat id prae caeteris sinui toti accommodasse: ne unquam in posterum vel minimam molestiam parturiret nobis additio et subtractio ejus logarithmi, in omni calculo frequentissimi.

Caeterum etiam quia sinuum et numerorum sinu toto minorum frequentior est usus: eorum igitur logarithmos abundantes ponimus: aliorum vero defectivos, etsi contra fecisse initio liberum erat.

Auf diese Erklärung gründet Neper seine Lehre von den Logarithmen, aus der ich die folgenden auf Seite 5. und 6. a. a. O. stehenden Lehrsätze hervorhebe.

Caput II. De logarithmorum propositionibus.

Propos. 1. Proportionalium numerorum aut quantitatum aequidifferentes sunt logarithmi.

Propos. 4. Ex quatuor proportionalium logarithmis aggregatum secundi et tertii minutum primo aequatur quarto.

Propos. 5. Ex trium proportionalium logarithmis duplum secundi seu medii aequatur aggregato extremorum.

2.

Analytische Interpretation dieser Erklärung.

„Die Erklärung, welche Neper von den Logarithmen giebt, ist merkwürdig", sagt Klügel (Math. Wörterb. T. III. p. 634., n. 112.); weswegen, erwähnt er jedoch nicht. So weit mir bekannt, hat weder er, noch jemand Anderer vor mir den Einfall gehabt, in dieser Erklärung die dynamisch-geometrischen oder die phoromischen Bilder, die sie benützt, von der Seite zu betrachten, dass man an ihnen die stetige Veränderlichkeit entweder dreier Grössen mit einander, von deren einer die beiden anderen abhängen, oder auch die stetige Veränderlichkeit nur zweier zusammenhängender Grössen erkennt, von denen die eine der Logarithmand, die andere der Logarithme ist.

1) Betrachtung *dreier* zusammengehöriger Veränderlichen.

Neper lässt mit der stetig veränderlichen Zeit T zwei Wegstrecken X, Y, also verallgemeinert ausgesprochen: mit einer stetigen Veränderlichen T zwei von ihr abhängig veränderliche Grössen X, Y, zugleich; dabei jede der drei Veränderlichen stetig und in beständigem Sinn sich verändern, d. h. entweder fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen, nie aber bald wachsen bald abnehmen; und zwar die Grundveränderliche T und die

eine abhängig Veränderliche X, gleichförmig (aequaliter) — um gleiche Unterschiede — die andere abhängig Veränderliche Y, aber gleichmässig (proportionaliter) — in gleichem Masse oder Verhältnisse.

Betrachtet man nemlich von der Grundveränderlichen T zwei Paar Werthe

$$T', \ T'' \text{ und } T_1, \ T_2,$$

dazu von der ersten abhängig Veränderlichen X die entsprechenden zwei Paar Werthe

$$X', \ X'' \text{ und } X_1, \ X_2,$$

so wie von der zweiten abhängig Veränderlichen Y die entsprechenden zwei Paar Werthe

$$Y', \ Y'' \text{ und } Y_1, \ Y_2;$$

so sollen, so oft die Unterschiede

$$T' - T'' \text{ und } T_1 - T_2$$

gleich sind, auch einerseits die Unterschiede

$$X' - X'' \text{ und } X_1 - X_2$$

und andererseits die Verhältnisse

$$Y' : Y'' \text{ und } Y_1 : Y_2$$

gleich sein; nemlich so oft

$$T' - T'' = T_1 - T_2$$

ist, so soll auch einerseits

$$X' - X'' = X_1 - X_2$$

und andererseits

$$Y' : Y'' = Y_1 : Y_2$$

sein.

2) Betrachtung *zweier* zusammengehöriger Veränderlichen.

Man sieht leicht ein, dass die Betrachtung der Hilfsveränderlichen T auch entbehrt, und Neper's Begriff von den Logarithmen kürzer wie folgt dargestellt werden kann.

Seien X und Y zwei gleichzeitig veränderliche Grössen, die sich stets in einerlei Sinn abändern, fortwährend wachsen oder

fortwährend abnehmen, nicht aber bald wachsen bald abnehmen, und zwar dermassen, dass während die eine Veränderliche X gleichförmig — um gleich viel, um gleiche Unterschiede — sich ändert, die andere Veränderliche Y gleichmässig (verhältnissgleich) — in gleichen Verhältnissen — sich ändere.

Sei nemlich

$$X',\ X''$$

ein Paar und

$$X_1,\ X_2$$

ein anderes Paar Werthe der Veränderlichen X, und dazu

$$Y',\ Y''$$

das dem ersten Paare, und

$$Y_1,\ Y_2$$

das dem zweiten Paare zugehörige Paar Werthe der anderen Veränderlichen Y; so soll, so oft

$$X' - X'' = X_1 - X_2$$

ist,

$$Y' : Y'' = Y_1 : Y_2$$

sein.

Hierauf stützt nun Neper die *Erklärung*: Jene *gleichförmig* veränderliche Grösse X heisst der *Logarithme* dieser *gleichmässig* veränderlichen Y; so wie auch jeder Werth von X der Logarithme des zugehörigen Werthes von Y.

3.

Fortsetzung. Messung der zusammengehörigen Veränderlichen.

Wenn nun auch das Wort ἀριθμος eigentlich eine Zahl bedeutet, so können gleichwohl für einen allgemeinsten Begriff der Logarithmen die Veränderlichen T, X, Y für ganz ungemessene stetige Grössen (Dinge) angesehen werden. Allein da diese Verallgemeinerung lediglich für die Theorie, nicht aber für die Rechnung mit Logarithmen von wesentlichem Vortheil ist; so bleibt es rathsam, diese Veränderlichen als gemessene und durch Zahlen ausgedrückte Grössen, oder vielmehr selbst als stetige Zahlen, zu betrachten. Neper stellt sie, nach dem Gebrauche seiner Zeit, insgesammt durch ganze Zahlen dar,

und insbesondere die Messeinheit durch eine dekadische Einheit, d. i. durch eine Potenz von 10, namentlich die Messeinheit der Y durch $10000000 = 10^7$.

4.

Fortsetzung. Neper's Grundbemessung der Logarithmen.

Sind nun was immer für zwei Paar Werthe einer veränderlichen Grösse Y, nemlich die Paare Y', Y'' und Y_1, Y_2 verhältnissgleich (proportional)

$$Y' : Y'' = Y_1 : Y_2;$$

und sind die zwei Paar Werthe der zugehörigen veränderlichen Grösse X, nemlich die Paare X', X'' und X_1, X_2 gleichunterschieden (äquidifferent),

$$X' - X'' = X_1 - X_2;$$

so ist, nach Neper's Erklärung, jeder dieser Werthe von X ein Logarithme des ihm angehörigen Werthes von Y, nemlich, wofern man diese Logarithmen durch Log andeutet,

$$X' = \mathrm{Log}\, Y', \quad X'' = \mathrm{Log}\, Y'', \ \ldots$$

Da hiernach mit der Quotienten- oder Verhältnissgleichung (Proportion) durchaus gleichartiger Grössen

$$Y' : Y'' = Y_1 : Y_2$$

die Unterschiedsgleichung ihrer Logarithmen

$$\mathrm{Log}\, Y' - \mathrm{Log}\, Y'' = \mathrm{Log}\, Y_1 - \mathrm{Log}\, Y_2$$

verbunden ist; so kann man dieselbe Erklärung auch durch den Grundlehrsatz aussprechen:

Wenn zwei Paar durchweg gleichartige Grössen proportional sind, so sind ihre Logarithmen gleichunterschieden. (Vergl. oben Cap. II. prop. 1.)

Neper bemass demnach seine Logarithmen dergestalt, dass so oft zwei Paar Grössen eine Proportion bilden, die ihnen zugehörigen Logarithmen (in der nemlichen Ordnung von einander abgezogen) gleiche Unterschiede geben.

Wo daher Theilung durch eine Grösse stattfindet, da muss Abziehung ihres Logarithmen eintreten.

Da in einer Proportion, deren Glieder insgesammt gleichartig sind, das Product der äusseren Glieder jenem der inneren dann gleich ist, wenn diese Glieder lauter Zahlen sind; so erhält

man, wenn man diese Bedingungen hier gelten lässt, einerseits die **Productengleichung** von Zahlen

$$Y' Y_2 = Y'' Y_1,$$

und andererseits die **Summengleichung** von Logarithmen

$$\operatorname{Log} Y' + \operatorname{Log} Y_2 = \operatorname{Log} Y'' + \operatorname{Log} Y_1.$$

Neper bemass daher seine Logarithmen auch so, dass so oft irgend zwei Paar Zahlen, mit einander multiplicirt, zwei gleiche Producte geben, auch ihre Logarithmen paarweis addirt, zwei gleiche Summen geben.

Wo demnach **Multiplication** durch eine **Zahl** statt findet da tritt **Addition** ihres **Logarithmen** ein.

Da sowohl in jeder Verhältnissgleichung, als auch in jeder Unterschiedsgleichung, jedwedes der zwei Paar Glieder durch die drei anderen bestimmt ist, so muss nach den letzten solchen Gleichungen zu jeder Zahl nur ein bestimmter Logarithme gehören. **Daher müssen zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen gehören.** Und eben so gilt dies nothwendig auch umgekehrt.

Suchen wir nun die allgemeinsten Ausdrücke der Logarithmen von den Ergebnissen der Multiplication, Division, Potenzirung und Wurzelziehung.

1) Ist

$$p = ab,$$

also

$$p : a = b : 1,$$

so ist

$$\operatorname{Log} p - \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} b - \operatorname{Log} 1,$$

$$\operatorname{Log} p = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b - \operatorname{Log} 1;$$

folglich

$$\operatorname{Log}(ab) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b - \operatorname{Log} 1$$

oder symmetrisch

$$\operatorname{Log}(ab) - 1 \operatorname{Log} 1 = (\operatorname{Log} a - \operatorname{Log} 1) + (\operatorname{Log} b - \operatorname{Log} 1).$$

Aus Letzterem folgt

$$\operatorname{Log}(abc) - \operatorname{Log} 1 = (\operatorname{Log} ab - \operatorname{Log} 1) + \operatorname{Log} c - \operatorname{Log} 1$$
$$= (\operatorname{Log} a - \operatorname{Log} 1) + (\operatorname{Log} b - \operatorname{Log} 1) + \operatorname{Log} c - \operatorname{Log} 1),$$

$$\text{Log}(abcd) - \text{Log}1 = (\text{Log}abc - \text{Log}1) + (\text{Log}d - \text{Log}1)$$
$$= (\text{Log}a - \text{Log}1) + (\text{Log}b - \text{Log}1) + (\text{Log}c - \text{Log}1) + (\text{Log}d - \text{Log}1);$$

daher allgemein

$$\text{Log}(abcd...) - \text{Log}1 = (\text{Log}a - \text{Log}1) + (\text{Log}b - \text{Log}1) + (\text{Log}c - \text{Log}1) + (\text{Log}d - \text{Log}1) + ...$$

und hieraus ergiebt sich für den Logarithmen eines **Productes** von n Factoren der Ausdruck

$$\text{Log}(abcd...) = \text{Log}a + \text{Log}b + \text{Log}c + \text{Log}d + ... - (n-1)\text{Log}1\,.$$

2) Für den **Quotienten**

$$q = \frac{a}{b}$$

gilt die Proportion

$$q:1 = a:b\,,$$

also ist

$$\text{Log}q - \text{Log}1 = \text{Log}a - \text{Log}b\,,$$

und sonach

$$\text{Log}q = \text{Log}a - \text{Log}b + \text{Log}1\,,$$

oder auch

$$\text{Log}\,\frac{a}{b} = \text{Log}a - \text{Log}b + \text{Log}1\,;$$

wofür man jedoch symmetrisch

$$\text{Log}\,\frac{a}{b} - \text{Log}1 = (\text{Log}a - \text{Log}1) - (\text{Log}b - \text{Log}1)$$

setzen kann.

3) Für die **Potenz** a^n, deren Exponent absolut und ganz ist, die also dem $n$factorigen Producte $aaa....$ gleichgilt, ist sonach

$$\text{Log}(a^n) - \text{Log}1 = n(\text{Log}a - \text{Log}1)$$

und hieraus

$$\text{Log}(a^n) = n\text{Log}a - (n-1)\,\text{Log}1\,.$$

4) Zur **Potenz** a^{-n} mit negativem ganzen Exponenten, die her $=\frac{1}{a^n}$ ist, findet man

$$\mathrm{Log}(a^{-n}) - \mathrm{Log}1 = \mathrm{Log}\frac{1}{a^n} - \mathrm{Log}1$$
$$=(\mathrm{Log}1 - \mathrm{Log}1) - (\mathrm{Log}a^n - \mathrm{Log}1)$$

er

$$\mathrm{Log}(a^{-n}) - \mathrm{Log}1 = -n(\mathrm{Log}a - \mathrm{Log}1);$$

lglich gilt einerlei Bestimmungsweise, wie auch die Potenz-ponenten algebraisch bezogen sein mögen.

5) Zur **Wurzel** $\sqrt[m]{a}=r$, bei der also $a=r^m$ ist und m po-liv oder negativ ganz sein kann, findet man

$$\mathrm{Log}a - \mathrm{Log}1 = \mathrm{Log}(r^m) - \mathrm{Log}1$$
$$= m(\mathrm{Log}r - \mathrm{Log}1),$$

iher ist

$$\mathrm{Log}\sqrt[m]{a} - \mathrm{Log}1 = \frac{\mathrm{Log}a - \mathrm{Log}1}{m}$$

od

$$\mathrm{Log}\sqrt[m]{a} = \frac{\mathrm{Log}a}{m} + (1 - \frac{1}{m})\mathrm{Log}1.$$

6) Zur **Potenz** $a^{\frac{n}{m}}$, welche der Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$ gleichgilt, fin-et man

$$\mathrm{Log}(a^{\frac{n}{m}}) - \mathrm{Log}1 = \mathrm{Log}\sqrt[m]{a^n} - \mathrm{Log}1$$
$$= \frac{\mathrm{Log}(a^n) - \mathrm{Log}1}{m} = \frac{n(\mathrm{Log}a - \mathrm{Log}1)}{m};$$

lso

$$\mathrm{Log}(a^{\frac{n}{m}}) - \mathrm{Log}1 = \frac{n}{m}(\mathrm{Log}a - \mathrm{Log}1).$$

Mithin gilt die oben erkannte Bestimmungsweise für jeden ationalen Exponenten.

Aus allen diesen Ausdrücken erhellet nun, dass in ihnen lurchweg der Log1 ein lästiger Begleiter ist.

Am bequemsten für das logarithmische Rechnen ist es, mit Neper der Messeinheit der Wege und Geschwindigkeiten die Null zum Logarithmen zu geben. (Cap. I. Admonitio). Allein heut zu Tage pflegt man die Messeinheit von Grössen nicht mehr wie ehedem, wo man alle Grössen möglichst genau durch ganze Zahlen darstellte, durch eine dekadische Einheit, wie Neper durch 10000000, sondern durch die Stamm-Einheit, d. i. durch 1, vorzustellen; weil man auch die wie immer gebrochenen und selbst irrationalen Zahlen zur Darstellung von Grössen benützt. Darum geben wir in der Neuzeit der Zahl 1 immer die 0 zum Logarithmen.

Danach leuchtet ein, dass aus den zwei so eben erwiesenen Sätzen die allbekannten 4 Hauptlehrsätze über die Ausdrücke der Logarithmen von Producten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln ohne Mühe hergeleitet werden können. Setzt man daher die Logarithmen als schon berechnet voraus, so kann man, gestützt auf obige Erklärung derselben, das in den Elementen der Algebra gewöhnlich allein in Anwendung kommende und von jenen Hauptlehrsätzen geleitete Rechnen mit Logarithmen vollständig abhandeln.

5.

Andere merkwürdige Betrachtung der Neper'schen Erklärung der Logarithmen.

I. Nimmt man bei den oben nach Neper besehenen zwei gleichzeitigen Bewegungen einen beliebigen Zeitabschnitt für die Einheit der Zeit an und setzt, dass der erstere bewegliche Punkt B in jeder Zeiteinheit den Weg k, der andere Punkt β aber in der ersten Zeiteinheit den Weg $\varkappa$ durchlaufe, und nimmt man an, dass (Taf. III. Fig. 3.) die beweglichen Punkte nach Verlauf der Zeit t beziehlich in M und μ, nach der Zeit $t+1$ aber in N und ν, folglich, wenn dt eine unendlich kleine Zunahme der Zeit t vorstellt, zur Zeit $t+dt$ in den Punkten M' und μ' sich befinden, von denen jener zwischen M und N, dieser zwischen μ und ν liegt; so wird, wenn die Abstände AM und $\mu\omega$ mit x und y bezeichnet werden,

$$MM'=dx \text{ und } \mu\mu'=-dy$$

sein. Gestattet man die Annahme, dass die kurzen Wege $MN=k$ und $\mu\nu$ von den beweglichen Punkten mit gleicher Geschwindigkeit oder gleichförmig durchlaufen werden, folglich, dass die zurückgelegten Wege den zugehörigen Zeiten proportional seien, so hat man

$$MM':MN=dt:1,\quad \mu\mu':\mu\nu=dt:1;$$

und nach dem Gesetze, welchen der zweite Punkt bei seiner Bewegung gehorcht (2. Def. Coroll.):

$$\mu\nu:\mu\omega = \alpha\gamma:\alpha\omega.$$

Setzt man noch den ursprünglichen Abstand $\alpha\omega = \varrho$; so erhält man

$$dx:k = dt:1, \quad -dy:y = \varkappa dt:\varrho;$$

also

$$dx = kdt,$$

$$\frac{-dy}{y} = \frac{\varkappa}{\varrho}\,dt.$$

Theilt man, um dt zu eliminiren, jenen Ausdruck durch diesen, so hat man

$$dx:\frac{-dy}{y} = k:\frac{\varkappa}{\varrho},$$

und hieraus folgt

$$\frac{-dy}{y} = \frac{\varkappa}{\varrho}\cdot\frac{dx}{k}.$$

Schneller findet man diese Gleichung, wenn man erwägt, dass bei zwei gleichförmigen Bewegungen die während den nemlichen Zeiten zurückgelegten Wege einander (direct) proportional sind, nemlich dass

$$MM':\mu\mu' = MN:\mu\nu$$

oder

$$dx:-dy = k:\mu\nu$$

sich verhält. Denn theilt man diese Proportion durch die das Gesetz der Bewegung des zweiten Punktes ausdrückende

$$\mu\nu:\mu\omega = \alpha\gamma:\alpha\omega$$

oder

$$\mu\nu:y = \varkappa:\varrho,$$

so wird

$$dx:\frac{-dy}{y} = k:\frac{\varkappa}{\varrho},$$

also

$$\frac{-dy}{y}=\frac{\varkappa}{\varrho}\cdot\frac{dx}{k}.$$

Indem nun Neper dazu noch vermöge seiner Erklärung

$$\text{Log}y=x$$

setzt; stellt er eigentlich zwischen den zwei zusammengehörigen Veränderlichen x, y nicht nur eine Differentialgleichung auf sondern er integrirt sie auch, indem er die eine Veränderliche x als eine eigentliche Function der anderen y definirt und nachher eine Tafel der zusammengehörigen Werthe dieser Veränderlichen berechnet.

Anmerkung. Man sieht nebenbei hieraus, dass Neper nicht fern davon stand die Differentialrechnung zu entdecken.

II. Betrachten wir auch diese Darstellung vom allgemeineren analytischen Standpunkte, weil uns dies in der Folge von Nutzen sein wird; so seien zwei stetig veränderliche Zahlen x, y mit einander von einer dritten t abhängig, so zwar, dass, 1) wenn die Werthe t, t' um Δt, $\Delta t'$ (algebraisch) wachsen, auch x, x' um Δx, $\Delta x'$ wachsen, und y, y' um Δy, $\Delta y'$ auf $y+\Delta y$, $y'+\Delta y'$ anwachsen, und 2) dass, wenn $\Delta t=\Delta t'$ ist, einerseits auch $\Delta x=\Delta x'$ und andererseits

$$\frac{y+\Delta y}{y}=\frac{y'+\Delta y'}{y'} \text{ also auch } \frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta y'}{y'}$$

sei.

Dann ist jedenfalls Δx proportional zu Δt, in Zeichen

$$\Delta x::\Delta t;$$

und es lässt sich, wenigstens für genügend kleine Werthe von Δt und Δy, auch $\frac{\Delta y}{y}$ zu Δt proportional, d. i.

$$\frac{\Delta y}{y}::\Delta t$$

annehmen. Danach ist auch

$$\Delta x::\frac{\Delta y}{y} \quad \text{oder} \quad \Delta x:\frac{\Delta y}{y}=m,$$

und sofort

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{m}\Delta x,$$

wenn m eine constante Zahl bezeichnet.

Setzt man für die kleinsten Zunahmen Δx, Δy die entsprechenden Differentiale dx, dy; so erhält man — wie oben — die gleichgestaltete Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{y}=\frac{1}{m}dx,$$

als deren Integral Neper's Erklärung die Gleichung

$$\mathrm{Log}y=x$$

hinstellt.

Man lege die Null als Logarithmen der Zahl ϱ bei, man gebe nemlich $x=0$ zu $y=\varrho$ oder mache $\mathrm{Log}\varrho=0$. Sei noch $\Delta y=\eta$ und $\lim\eta=0$, so ist

$$\Delta x=m\frac{\Delta y}{y}=m\frac{\eta}{\varrho}.$$

Da nun auch

$$\mathrm{Log}(y+\Delta y)=x+\Delta x$$

ist, so findet man

$$\mathrm{Log}(y+\Delta y)-\mathrm{Log}y=\Delta x,$$

$$\mathrm{Log}(\varrho+\eta)-\mathrm{Log}\varrho=m\frac{\eta}{\varrho}$$

für $\lim\eta=0$; daher ist (gemäss Art. 4.)

$$\mathrm{Log}\frac{\varrho+\eta}{\varrho}-\mathrm{Log}1=m.\frac{\eta}{\varrho}=\mathrm{Log}\left(1+\frac{\eta}{\varrho}\right)-\mathrm{Log}1.$$

Setzt man abkürzend $\frac{\eta}{\varrho}=\varepsilon$, so ist auch $\lim\varepsilon=0$, und dafür

$$m=\frac{\mathrm{Log}(1+\varepsilon)-\mathrm{Log}1}{\varepsilon}=\mathrm{Log}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}-\mathrm{Log}1,$$

oder

$$m=\lim_{\varepsilon=0}\mathrm{Log}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}-\mathrm{Log}1.$$

Für seine eigenen Logarithmen nahm Neper die Anfangsgeschwindigkeiten k und $\varkappa$ der beweglichen Punkte B und β zwar gleich gross, jedoch entgegengesetzt, also $k=-\varkappa$ an. Danach ist bei ihm, weil allgemein

$$\frac{1}{m}=\frac{-\varkappa}{\varrho}\cdot\frac{1}{k}$$

oder

$$m = k : \frac{-\varkappa}{\varrho} = \frac{k}{-\varkappa} \cdot \varrho$$

ist, $m = -\varrho$. Den anfänglichen Abstand $\alpha\omega = \varrho$ nahm Neper zur Längeneinheit, setzte ihn also $= 10000000 = 10^7$, so dass demnach für ihn $m = -10^7$ war.

Folglich ist bei Neper

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{10^7}\,dx$$

und dafür

$$\log.\text{neperianus}\ y = x.$$

Aendert man aber dies dem neueren Gebrauche gemäss ab, indem man diese Längeneinheit $\varrho = 1$ setzt, so ist $m = -1$.

B.

Byrg's Erklärung der Logarithmen durch Verknüpfung einer arithmetischen und geometrischen Reihe.

6.

Byrg*) gab im Jahre 1620 eine Logarithmentafel heraus unter dem Titel:

Arithmetische vnd Geometrische Progress-Tabulen, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol. Gedruckt, In der Alten Stadt Prag, bei Paul Sessen, der Löblichen Universitet Buchdrucker, Im Jahre 1620.

Diese auf $7\frac{1}{2}$ Bogen in Klein-Quart gedruckte Tafeln, zu denen leider der „gründliche Unterricht" fehlt, sind jetzt schon äusserst selten.**)

Die Benennung „Logarithmus" gebraucht Byrg nicht.

Wer von diesen zwei Gelehrten, Neper und Byrg, früher die Logarithmen entdeckt habe, lässt sich nicht mit Sicherheit

---

*) Jobst Burgi oder Justus Byrg wurde geboren im Jahre 1552 zu Lichtensteig, einer kleinen Stadt in der Schweiz, Kanton St. Gallen an der Thur; und starb im Jahre 1633 zu Cassel.

**) Ich benützte das in der Bibliothek des k. k. Bombardier-Corps befindliche, gleichfalls aus Prof. Hantschl's Nachlass herstammende Exemplar.

entscheiden. Für Byrg sprechen folgende Nachrichten seiner Freunde und Verwandten.

Erstens äussert sich Kepler (in seiner Tabulae Rudolphinae, fol. Ulmae. 1627. Saurius. pag. 11. colum. 1. Praecepta. Cap. III.) über ihn wie folgt:

.... hoc inquam si expetis: ecce tibi apices logistices antiquae, qui praestant hoc longè commodiùs: qui etiam apices logistici Justo Byrgio multis annis ante editionem Neperianam, viam praeiverunt, ad hos ipsissimos logarithmos. Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos, foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit.

Zweitens erzählt Montferrier (Dictionnaire des sciences mathématiques. 4. Paris. 1835. tom. 1., pag. 242.) in seiner Biographie Byrg's:

Benjamin Bramer .... dans un ouvrage qui a pour objet la description d'un instrument pour la perspective et le lévé des plans, s'exprime ainsi: „C'est sur ces principes que mon cher beau-frère et maitre Juste Byrge a calculé, il y a vingt ans" (cet ouvrage paraissait à Cassel en 1630*)) „une belle table des progressions, avec leurs différences de 10 en 10, calculées à 9 chiffres, qu'il a aussi fait imprimer sans texte à Prague, en 1620; de sorte que l'invention des logarithmes n'est pas de Neper, mais a été fait par Juste Byrge longtemps avant."**)

Nach dieser Aeusserung Bramer's hätte demnach Byrg seine Logarithmentafel entweder im Jahre 1602 oder 1610 berechnet, jenachdem Bramer sein Werk im Jahre 1622 oder 1630 drucken lassen hat. Da indessen auch Neper seine im Jahre 1614 herausgegebene Tafel schon einige Jahre früher berechnet haben konnte; so lässt sich über die Priorität der Entdeckung der Logarithmen nicht mit Bestimmtheit absprechen, sondern man muss muthmassen, dass Neper und Byrg gleichzeitig, jeder für sich, auf selbe verfallen seien.

7.

Byrg stellte eine arithmetische und geometrische Reihe dergestalt zusammen, dass gleichvielte Glieder von beiden zu ein-

*) Wahrscheinlich ist dies folgendes Werk: „Kurzer aber deutlicher Bericht vom Gebrauch des von Benj. Bramer erfundenen Proportional-Instrumentes; 20 Seiten, mit einer Abbildung des Instrumentes auf einem halben Bogen. 8. Cassel. 1622." (Siehe Rogg Handb. der mathem. Literatur. 8. Tübingen. 1830. S. 419.

**) Für die Geschichte der Lehre von den Logarithmen wäre es wünschenswerth, dass jemand, dem das angeführte Werk von Bramer zugängig ist, die hieher gehörige Stelle wortgetreu, so wie eine genaue Angabe des Jahrzahl des Druckes dieses Werkes durch das Archiv veröffentlichen möchte.

ander gehören, und erklärte dann jedes Glied der arithmetischen Reihe für den Logarithmus des eben so vielten Gliedes der geometrischen Reihe.

In derselben Weise verfuhren auch mehrere Nachfolger Neper's. So sagt schon Vlacq*) (ein Zeitgenosse Neper's und Briggs'):

Logarithmi sunt quantitatum continue proportionalium comites aequidifferentes.

Später Gaspar Schott in seinem Cursus Mathematicus. fol. Herbipoli, Schönwetter. 1661. lib. 27. pag. 589:

Logarithmi sunt numeri secundum proportionem arithmeticam quamcunque continue crescentes, aut decrescentes, adjuncti numeris ab unitate inchoatis et secundum proportionem geometricam continue crescentibus.

Diese Erklärung der Logarithmen geht aus jener von Neper sehr leicht hervor, wenn man, um sich eine Vorstellung von dem Gange der gleichzeitigen Aenderung der Zahlen und ihrer Logarithmen zu verschaffen, eine grössere Menge von Logarithmen um gleiche Unterschiede, folglich ihre Zahlen in gleichen Verhältnissen nach und nach wachsen lässt. Auf diese Weise erhält man eine arithmetische Reihe von Logarithmen,

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

und eine, Glied für Glied zugehörige geometrische Reihe von Zahlen

$$y_0, y_1, y_2 \ldots y_n, \ldots$$

so dass

$$\text{Log} y_0 = x_0, \text{Log} y_1 = x_1, \ldots \text{Log} y_n = x_n, \ldots$$

st.

Neper selbst bediente sich dieses Vorganges, um die Logarithmen zu berechnen.

Beide Reihen werden recurrent, jedes Glied aus dem früheren berechnet, die arithmetische der Logarithmen durch fortwährende Addition des beständigen Unterschiedes, die geometrische der Zahlen durch fortwährende Multiplication mit dem sich gleich bleibenden Quotienten.

Da zumeist für bestimmte Zahlen die zugehörigen Logarithmen zu suchen sind, so wird fast immer eine Einschaltung einer neuen Reihe zwischen zwei Gliedern der Hauptreihe erforderlich sein. Dann ist wieder jedes Glied der arithmetischen Schaltreihe der Logarithmus des eben so vielten Gliedes der geometrischen Schaltreihe.

---

*) wo?

Will man sonach eine solche Reihe mit allen ihren einschaltbaren als eine einzige stete fortschreitende Reihe derselben Art ansehen; so muss man ausser den ganzzahligen Stellenzeigern auch noch gebrochene, ja sogar, da manche Zahl strengstens genommen durch keinerlei solche Einschaltung völlig genau, sondern nur immer genauer und genauer, als eine fixe Grenze erreicht werden kann, auch irrationale Stellenzeiger zulassen.

Sei demnach n ein derartiger allgemeiner Stellenzeiger, nemlich positiv oder negativ, ganz, gebrochen oder irrational; so ist, wenn d die constante Differenz der arithmetischen Logarithmenreihe, und q den beständigen Quotienten der geometrischen Zahlenreihe vorstellt, bekanntlich ganz allgemein

$$x_n = x_0 + nd,$$

$$y_n = y_0 q^n.$$

Für die Theorie kann man, um nur ganzzahlige Stellenzeiger zu erhalten, den Unterschied d so klein und den Quotienten q schon selbst so nahe an 1 annehmen, dass jeder Logarithme so wie jede Zahl zwischen hinreichend enge Grenzen zu liegen komme.

So nahm Neper*) zum Anfangsgliede seiner geometrischen Reihe

$$y_0 = 10000000 = 10^7,$$

zum nächstfolgenden

$$y_1 = 9999999 = y_0 - 1,$$

daher zum Quotienten

$$q = a_1 : a_0 = a_0 - 1 : a_0 = 1 - \frac{1}{a_0} = 1 - \frac{1}{10^7};$$

ferner zur Differenz seiner arithmetischen Reihe $d=1$, und zu ihrem Ausgangsgliede $x_0=0$. Byrg**) nahm zum Ausgangsgliede seiner geometrischen Reihe

$$y_0 = 100000000 = 10^8,$$

zum nächst folgenden

$$y_1 = 100010000,$$

daher zum Quotienten

$$q = 1\cdot0001 = 1 + \frac{1}{10^4};$$

---

*) Vergl. Klügel's math. Wörterb. III. Art. Logarithmus. num. 114.
**) Vergl. ebenda n. 106.

ferner zur Differenz seiner arithmetischen Reihe $d=10$, und zu ihrem Ausgangsgliede $x_0=0$.

In dieser Weise zergliedert Bonaventura Cavalerio in seiner Trigonometria. 4°. Bononiae. 1643. pag. 4. col. 1. num. XXV. die Erklärung der Logarithmen.

Man sieht leicht ein, dass das Verständniss des hier erörterten Begriffes von Logarithmen durch die unausweichliche Einschaltung in den Reihen und durch die gebrochenen und irrationalen Stellenzeiger getrübt wird.

C.

Keplers Erklärung des Logarithmus als des Abzählers der Vervielfachung eines Grundverhältnisses.

8.

Kepler (in den Tabulae Rudolphinae Cap. III. pag. 11. col. 1.) sieht den Logarithmus als Mass einer Proportion oder richtiger eines Verhältnisses an. Denn a. a. O. findet sich

die Marginalfrage:

Elementum logarithmorum minimum quid?

und die Textanwort:

... proportio, ejusque mensura, Logarithmus ....

Eben so leitet Nikolaus Mercator seine Logarithmotechnia London 1667 et 68, pag. 1. mit folgenden Worten ein:

Logarithmus composito vocabulo dicitur a ratione et numero, quasi rationum numerus; id quod plane cum re consentit. Est enim Logarithmus nihil aliud, quam numerus ratiuncularum, contentarum in ratione, quam absolutus quisque (scil. numerus) ad unitatem obtinet.

Diese Erklärung war nebst der vorigen lange sehr beliebt. So giebt noch Klügel (Math. Wörterb. III. 8. 1808. Art. Logarithmus) folgende Erklärung:

„Logarithmus ist die Zahl, welche anzeigt, das wie vielfache ein Verhältniss in Absicht auf ein anderes Grundverhältniss ist, wodurch alle Verhältnisse gemessen werden. Nemlich wenn das Grundverhältniss ist $a:b$, so ist ..... das $m$fache $a^m:b^m$, so wie auf der anderen Seite .... das n getheilte $a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}$; ferner noch das $m$fache und $n$getheilte $a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}$... Die Zahl $\frac{m}{n}$ ist der Logarithmus des Verhältnisses $a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}$ in Beziehung auf das $a:b$.

Auf diese Erklärung bezieht sich die Bildung des Kunstwortes, welches aus dem griechischen λογων ἀριθμος zusammengezogen ist, und einen Verhältnisszähler oder Verhältnissmesser bezeichnet."

Eben so erklärt Schmeisser in seinem Lehrbuch der reinen Mathesis, 1. Theil. Berlin. 1817. §. 41—44, S. 61—67.

Diese Erklärung der Logarithmen entspringt jedoch keineswegs unmittelbar aus der Neper'schen (A), sondern erst aus der von ihr abgeleiteten (B), welche die Glieder einer arithmetischen Reihe Logarithmen der gleichstelligen Glieder einer geometrischen nennt; zugleich ist sie sehr eingeschränkt. Denn in einer geometrischen Reihe ist das Verhältniss jedes Gliedes y_n zum Ausgangsgliede y_0 das so vielfache Verhältniss des ersten hinter diesem Ausgangsgliede stehenden Gliedes y_1 zum Ausgangsgliede y_0 selbst, nemlich

$$y_n : y_0 = (y_1 : y_0)^n.$$

Dazu nimmt man aber einschränkend $y_0 = 1$ und zur arithmetischen Reihe die der Stellenzahlen selbst, nemlich

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n,\ \ldots$$

und erklärt danach

$$n = \mathrm{Log}(y_n : y_0)$$

oder

$$n = \mathrm{Log}\, y_n.$$

Dieser ursprünglich nur für absolute ganzzahlige Stellenzeiger n giltige Satz wird auch auf negative und, in Folge der Interpolation in beiden zusammengehörigen Reihen, auch auf gebrochene und irrationale Zahlen ausgedehnt.

Wenn man aber — wie es doch sein muss — von diesen Reihen absieht, so macht diese Erklärung der Logarithmen, als Abzähler oder Exponenten der Vervielfachungen eines gewissen Grundverhältnisses, bei einer für Anfänger fasslich und dennoch gründlich sein sollenden Zergliederung negativer, gebrochener und irrationaler solcher Abzähler sehr bedeutende Schwierigkeiten, über die man sich freilich bisher mit Leichtigkeit hinweggesetzt hat. Desswegen dürfte dieselbe entschieden für die am wenigsten geeignete zu erachten und darum ganz zu verlassen sein.

9.

Noch benütze ich die Gelegenheit, die eigentliche ursprüngliche Bedeutung des Wortes „Logarithmus" hier gründlicher als bisher geschehen zu erforschen. Dass die von Mercator (1667), Gilbert (1776), Klügel (1808), Schmeisser (1817) u. v. a. angegebene, und gewöhnlich beliebte, als ἀριθμος των λογων,

Menge der Verhältnisse, keineswegs die richtige sei, wird aus folgenden Gründen einleuchten.

1. Wer über die genaue etimologische Bedeutung dieses Wortes vollen Aufschluss geben kann, ist einzig und allein Neper, da er es der Erste und zwar zum ersten Male in seinem Originalwerke vom Jahre 1614 auf der vierten Seite gebraucht und höchst wahrscheinlich dessen Schöpfer ist. Leider analysirt und interpretirt er es nicht selbst.

2. Nun gebraucht aber Neper nirgends diesen Begriff des Logarithmen als Abzählers von Vielfachen eines Verhältnisses; ja er vermochte gar nicht seinen so allgemeinen Begriff mit diesem eingeschränkten zu vertauschen; und

3. aus seinem eigenen Begriffe kann dieser partikuläre unmittelbar und nicht ohne sichtlichen Zwang hergeleitet werden.

Um also die richtige Bedeutung aufzudecken, muss man jene Stellen in Neper's Originalwerk hervorheben, welche die allgemeinsten und Grundeigenschaften der Logarithmen besprechen. Nun giebt er

1. in der Einleitung zu diesem Werke Aufschluss über Anlass und Zweck der Entdeckung der Logarithmen, den ich daher, weil er auch sonst lesenswerth ist, hier wortgetreu vollständig mittheile.

Quum nihil sit ... mathematicae praxi tam molestum, quodque Logistas (die Rechner) magis remoretur, ac retardet, quam magnorum numerorum multiplicationes, partitiones, quadrataeque ac cubicae (scil. radicis) extractiones, quae praeter prolixitatis taedium, lubricis etiam erroribus plurimum sunt obnoxiae: coepi igitur animo revolvere, qua arte certa et expedita possem dicta impedimenta amoliri. Multis subinde in hunc finem perpensis, nonnulla tandem inveni praeclara compendia (Abkürzungen) alibi fortasse tractanda: verum inter omnia nullum hoc utilius, quod una cum multiplicationibus, partitionibus, et radicum extractionibus arduis et prolixis, ipsos etiam numeros multiplicandos, dividendos, et in radices resolvendos, ab opere rejicit, et eorum loco alios substituit numeros, qui illorum munere fungantur per solas additiones, subtractiones, bipartitiones et tripartitiones. Quod quidem arcanum cum .... sit, quo communius, eo melius: in publicum mathematicorum usum propalare libuit.

Von da an gebraucht Neper das Wort Logarithmus erst in Cap. 1. Defin. 6. pag. 4.

2. Neper nennt in seiner Logarithmorum Canonis Constructio, 1619, die eigentlich in Rechnung zu bringenden Zahlen numeri naturales, dagegen ihre Logarithmen numeri artificiales. (Vergl. auch Karsten Lehrbegriff der gesammten Mathematik. 8. 2. Aufl. II. Thl. 1. Abth. Greifswald. 1786. S. 242.).

Nach seiner Ansicht sind demnach Logarithmen gewisse künstlich geschaffene Zahlen, welche als leichter verwendbare

Substituten (Stell- und Amtsvertreter) anderer in manche schwierige Rechnungen eigentlich aufzunehmender Zahlen dienen.

3. Nun bedeutet in dem zusammengesetzten Worte λογαριθμος das Grundwort ἀριθμος Anzahl oder allgemeine Zahl, numerus, oder auch Rang, Werth, wie homo nullo numero, oder Mass, mensura, wie in ὁδου ἀριθμος des Weges Mass; die Bestimmsilbe λογ kann aber entweder von ὁ λογος oder von λογιστικος herstammen. Die nach unserer Erörterung hier passlichen Bedeutungen von λογος sind aber nur Rechnung, Anschlag, Schätzung oder Rücksicht wie in λογον ἐχειν τινος, rationem habere alicujus rei, Rücksicht nehmen auf etwas, keineswegs aber Proportion oder Verhältniss; so dass jenes Wort eigentlich ἀριθμος του λογου Rechnungszahl, Rechnungs- oder Schätzungswerth oder -Rang, oder ἀριθμος λογον ἐχων τινος ἀλλου eine auf eine gewisse andere (Zahl) Rücksicht oder Bezug nehmende Zahl, Bezugszahl bedeutet. Das Beiwort λογιστικος war zu Neper's Zeit sehr üblich, wie man aus Kepler's Tab. Rudolphinae in den Ausdrücken numeri, apices logistici ersieht; es bedeutet zum Rechnen gehörig oder dienlich; daher würde die zu erforschende Benennung eigentlich ἀριθμος λογιστικος, numerus logisticus, zum Rechnen dienliche (verwendbare) Zahl andeuten. (Vrgl. Fr. W. Riemer griech.-deutsches Wörterb. Lex. 8. 1825. Jena; M. J. A. E. Schmidt deutsch-griech. Handwörterb. 12. Leipzig. Tauchnitz. 1832. „Rücksicht"; J. G. Schneider griech.-deutsches Wörterb. 4. 3. Aufl. Leipzig, 1819; Scheller, lat.-deutsches Lexicon in 3 Bdn., 2. Aufl. 8. Leipzig. 1788., II. 3998.).

Nach dieser Beweisführung halte ich dafür, dass das Wort λογαριθμος im Sinne seines Schöpfers mit Rechnungszahl, Bezugszahl, Rechnungs- oder Schätzungswerth oder -Rang (einer anderen Zahl) zu verdeutschen sei.

D.

Die seit *Euler* übliche Erklärung der Logarithmen als Exponenten von Potenzen eines bestimmten Potentiands.

10.

In einem sistematischen Lehrvortrage der Algebra müssen in der Lehre vom Potenziren zuerst absolute ganze die 1 übersteigende Exponenten und darauf die absoluten Exponenten 1 und 0, später die negativen aber noch immer ganzen Exponenten erforscht werden. Danach erfolgt der erste Rückschritt vom Potenziren, das Radiciren, nemlich die Rückbestimmung des gebrauchten Potentiands. Im Verlauf dieser Untersuchung wird man auf Potenzen nach gebrochenen und irrationalen Exponenten geleitet. Nachdem man so den Potenzexponenten in beiderlei Aggregrationsbeziehungen und von jederlei Zahlform erhalten, also der veränderliche Potenzexponent stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen

kann; erfolgt der andere Rückschritt vom Potenziren auf das zweite Potenzirungselement, den Exponenten, der nun den Namen „Logarithmus" annimmt.

Wenn nemlich

$$b^x = y$$

ist, so ist x der Logarithmus von y für die Grundzahl b, in Zeichen

$$x = \overset{b}{\log} y .$$

Diesen folgerechten Gang scheint zuerst Euler (Vollständige Anleitung zur Algebra. 2 Thle. 8. Petersburg. 1770; herausgegeben von J. Ph. Grüson. 8. Berlin. 1796. im 1. Theil. §. 219 und 220. S. 107.) gezeichnet zu haben.

Diese Art der Logarithmen ist jedoch nicht bloss eingeschränkter als jene Neper's und Byrg's, weil jedenfalls ihr $\log 1 = 0$ ist, sondern auch schwieriger im Verständniss von Anfängern, weil vorerst das Potenziren nach gebrochenen und irrationalen Exponenten gelehrt worden sein muss. Indess passt sie allein streng in das wissenschaftliche Sistem der sieben Grundrechnungen der Algebra, und kann daher in dieser Lehre heut zu Tage auch blos allein aufrecht erhalten werden.

11.

Auf diesen Euler'schen Begriff des Logarithmen lassen sich die früher erörterten älteren zurückleiten.

1. Bei Neper wächst der Logarithme x mit der Hilfsveränderlichen t gleichförmig, während die Zahl y in gleichem Verhältnisse wächst. Sei nun für

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0,$$

ür

$$t = 1, \quad x = x_1, \quad y = y_1 .$$

Während also t von 0 bis 1 um 1 wächst, steigt

$$x \text{ von } x_0 \text{ bis } x_1 \text{ um } x_1 - x_0 ,$$

und

$$y \text{ von } y_0 \text{ bis } y_1 \text{ in dem Verhältnisse } \frac{y_1}{y_0} .$$

Während dagegen überhaupt t von 0 bis t um t wächst, steigt

$$x \text{ von } x_0 \text{ bis } x \text{ um } x - x_0 ,$$

und

y von y_0 bis y in dem Verhältnisse $\frac{y}{y_0}$.

Weil aber mit gleichen Zunahmen von t auch gleiche Zunahmen von x und gleiche Verhältnisse von y verbunden sind; so muss der Zunahme von t die Zunahme von x und die Zunahme der Steigerungs- (Vervielfachungs-) Zahl n des Verhältnisses $\frac{y}{y_0}$ proportional sein, nemlich

$$x - x_0 : x_1 - x_0 = t - 0 : 1 - 0 = t : 1,$$

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^n$$

und

$$n - 0 : 1 - 0 = t - 0 : 1 - 0$$

oder

$$n : 1 = t : 1.$$

Daraus folgt

$$n = t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \frac{y}{y_0} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}.$$

Anstatt der vier Constanten x_0, x_1, y_0, y_1 lassen sich andere einführen. Sei 0 der Logarithme von ϱ, und β der Logarithme von b, dann ist zunächst für $x = 0$ und $y = \varrho$

$$\frac{\varrho}{y_0} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{-x_0}{x_1 - x_0}},$$

und wenn man dadurch die frühere Gleichung theilt,

$$\frac{y}{\varrho} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{x}{x_1 - x_0}};$$

nachher ist für $x = \beta$ und $y = b$

$$\frac{b}{\varrho} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{\beta}{x_1 - x_0}},$$

folglich, wenn man nach $\frac{x}{\beta}$ potenzirt,

$$\frac{y}{\varrho} = \left(\frac{b}{\varrho}\right)^{\frac{x}{\beta}}.$$

Daher ist $\frac{x}{\beta}$ der Logarithme von $\frac{y}{\varrho}$ für die Grundzahl $\frac{b}{\varrho}$.

Macht man wie jetzt üblich $\varrho=1$ und $\beta=1$, also $\mathrm{Log}1=0$, und $\mathrm{Log}b=1$, so ist

$$y=b^x,$$

also

$$x=\overset{b}{\log}y.$$

2. Bei der nach Neper und Byrg vorzunehmenden Zusammenstellung einer arithmetischen und geometrischen Reihe gibt von den zwei hiefür giltigen Gleichungen (aus B)

$$x_n=x_0+nd,\quad y_n=y_0q^n$$

die erste

$$n=\frac{x_n-x_0}{d},$$

daher die andere

$$y_n=y_0q^{\frac{x_n-x_0}{d}}.$$

Hebt die arithmetische Logarithmenreihe mit 0, die geometrische Logarithmandenreihe aber mit ϱ an, d. h. ist $x_0=0$ und $y_0=\varrho$, folglich $0=\mathrm{Log}\varrho$; so ist

$$y_n=\varrho q^{\frac{x_n}{d}}.$$

Gehört dann β als Logarithme zu b, ist nemlich $x_n=\beta$ und $y_n=b$, so ist

$$b=q^{\frac{\beta}{d}},$$

daher

$$\frac{y_n}{\varrho}=\left(\frac{b}{\varrho}\right)^{\frac{x_n}{\beta}}.$$

Mithin ist $\frac{x_n}{\beta}$ der Logarithme von $\frac{y_n}{\varrho}$ für die Grundzahl $\frac{b}{\varrho}$.

Macht man wie üblich $\varrho=1$ und $\beta=1$, also $\mathrm{Log}1=0$ und $\mathrm{Log}b=1$, so ist

$$y_n=b^{x_n},$$

also

$$x_n = \overset{b}{\log} y_n.$$

3. Nach Kepler's Darstellung der Logarithmen hat man (in *C*) die Gleichungen

$$\frac{y_n}{y_0} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^n, \quad n = \mathrm{Log}\,.\frac{y_n}{y_0};$$

mithin ist sogleich nach Euler n der Logarithme von $\frac{y_n}{y_0}$ für die Grundzahl $\frac{y_1}{y_0}$.

Gewöhnlich macht man $y_0 = 1$, also $0 = \mathrm{Log}\,1$, dann ist

$$y_n = y_1^n,$$

also

$$n = \overset{y_1}{\log} y_n.$$

12.

Rückblick auf die bisherigen Erklärungen des Logarithmus.

Ehrendenkmal Neper's.

Vergleicht man die bisher aufgestellten Erklärungen der Logarithmen, so erkennt man leicht folgende Vorzüge der nach meiner Weise dargestellten Neper'schen Erklärung vor den übrigen.

1. Die mit einander zu Verbindenden stetig Veränderlichen T, X, Y, d. i. die Hilfsveränderliche T, der Logarithmus X, und der Logarithmand Y, brauchen nicht eben neue Zahlen zu sein, sondern sie können auch ungemessene stetige Grössen jeglicher Art, als: Strecken, Bogen, Winkel, Flächen, Körperräume, Kräfte, Gewichte, Zeiten u. s. w. sein, so dass also der Logarithme das Schätzungsmass oder der Rechnungswerth des Logarithmands ist.

Bringt auch diese Allgemeinheit keinen erheblichen Vortheil für die zumeist ausgebildete und beachtete Anwendung der Logarithmen auf das Ausrechnen gewisser besonderer Zahlen; so bleibt sie gleichwohl für die allgemeine Theorie der Logarithmen höchst wichtig, wenn man diese — was doch auch von wissenschaftlichem Werthe ist — speculativ weiter verfolgen will.

2. Neper's Erklärung lässt schon für sich selbst bei dem Logarithmus, wenn er als Zahlwerth einer stetig veränderlichen Grösse, oder als Zahl im weitesten Sinne, betrachtet wird, beide algebraische Beziehungen, die negative eben so wohl als die positive, und jedwede Zahlform, die ganze, gebrochene und irrationale (!) zu; während alle anderen Erklärungen diese unerlässliche Eigenschaft erst mühsam und, Anfängern nur sehr schwer fasslich, nachweisen müssen.

3. Dieselbe Erklärung lässt bei der Zusammenstellung der das logarithmische Sistem bestimmenden Hauptwerthe des Logarithmands und Logarithmus freie Hand; nach ihr kann man die Null jeder Grösse als Logarithme zuweisen, oder man kann das Verhältniss der gleichzeitigen kleinsten Aenderungen des Logarithmands und Logarithmus beliebig festsetzen.

4. Sie enthält — was für die Grundlehre der Differentialrechnung bedeutsam ist — in sich auch sogleich den Ausdruck des Differentials des Logarithmen, da sie eigentlich das Integral einer Differentialgleichung ausspricht.

5. Von Neper's Erklärung ist die Byrg'ische und Vlacq'ische, so wie von dieser die Kepler'ische nur eine Specialität, blos die Euler'sche hat vor ihr den Vorzug, in dem sistematischen Lehrgebäude der Algebra den Schluss der rückschreitenden Rechnungen vom Potenziren zu machen.

Auf solche Weise glaube ich denn, durch Zurückleitung der Neper'schen Erklärung des Logarithmus auf ihre eigentliche rein analytische Bedeutung, die Gründe ihrer Merkwürdigkeit (num. 2.) dargelegt, und durch die Hervorhebung ihrer bisher nicht geahnten Vollkommenheiten und Vorzüge dem genialen Geiste des Entdeckers der so äusserst nützlichen Logarithmen ein hoch ehrendes Denkmal gestellt zu haben.

E.

Die von mir selbst erdachte Erklärung der Logarithmen.

13.

Bei einer elementar-arithmetischen Darstellung der Lehre von den Logarithmen, vornehmlich für Schüler höherer Volks- und Bürgerschulen, und überhaupt für jene Praktiker, welche nicht die Algebra erlernen, denen aber gleichwohl die Kenntniss der Logarithmen für ihre vielerhand Zifferrechnungen von ungemeinem Nutzen sein kann, bleiben alle bisher gegebenen Begriffe vom Logarithmen äusserst schwer zu erfassen, und daher solchen Rechnern diese so höchst nützliche Lehre unzugänglich. Darum erlaube ich mir, hier einen den Zweck, leichte und vollständige

Verständlichkeit, besonders wo es nur auf Anwendung der Logarithmen im Zifferrechnen ankommt, vollkommen erreichenden Begriff der Logarithmen öffentlich mitzutheilen, den ich bereits in den Jahren 1826—28 erdacht, und bei Privat-Unterricht mit dem grössten Vortheil benützt habe, und den auch im Jahre 1846 der damalige Gymnasial-Professor, Herr Johann Scholz zu Tarnow, mit mehreren Freiwilligen aus seinen Schülern der vierten Grammatikal-Klasse, als ganz genügend erprobt hat.*)

14.

Unentbehrlich zum wahren Verständniss dieser Erklärung der Logarithmen ist jedoch folgende einleitende Erörterung.

Die Beschwerlichkeiten, mit denen das Rechnen oberhalb des Aggregirens (Addirens und Subtrahirens) zu kämpfen hat, waren Anlass zur Erfindung des Auskunftsmittels, anstatt mit den gegebenen Zahlen selbst jene beschwerlichen Rechnungen zu führen, lieber mit gewissen Hilfszahlen einfacher und leichter zu rechnen, die man Logarithmen nannte — was etwa so viel als Beziehungs- oder Bezugszahl heissen mag — und welche man als Stellvertreter oder Zeiger derjenigen Zahlen, denen sie zugehören, ansehen kann.

Nothwendig muss aber hiezu bedungen werden, dass jede Zahl nur einen einzigen ihr ausschliesslich angehörigen Logarithmen besitze und daher auch umgekehrt jeder Logarithme nur einer einzigen Zahl zugehöre; damit Zahl und Zeiger (Logarithmus) mit völliger Bestimmtheit auf einander hinweisen.

Man will demnach zuvörderst anstatt jeder in Rechnung zu bringenden Zahl ihren selbsteigenen Stellvertreter (Logarithmen) nehmen, sonach mit diesen Stellvertretern auf eine passliche bequemere Weise rechnen, um den Stellvertreter (Logarithmen) der zu suchenden Zahl zu finden und endlich wieder zu diesem die angehörige Zahl bestimmen, die dann nothwendig das verlangte Rechnungsergebniss sein muss.

Rücksichtlich der erwähnten mit den Logarithmen vorzunehmenden Rechnungen, gibt die Wahrnehmung, dass mehrere mit einander zu multiplicirende Zahlen (Factoren) in jeglicher Ordnung dasselbe Product liefern, an die Hand, dass auch die mit den Stellvertretern (Logarithmen) der Factoren auszuführende Rechnung die Ordnung dieser Stellvertreter (Logarithmen) der

---

*) Ich hatte ihm zu diesem ausserordentlichen Unterrichte eine Abschrift meiner vom 27. Jänner bis 22. Mai 1846 verfassten Schrift überlassen, welche gegenwärtig unter dem Titel: „Elementarlehre von den Logarithmen, auf einen neuen verständlicheren und umfassenderen Begriff dieser Hilfszahlen gegründet" im Verlage der hiesigen Buchhandlung J. G. Calve (Inhaber F. Tempsky) erscheint.

Willkür überlassen müsse. Von den zwei, leichter als die Multiplication ausführbaren, Rechnungen — der Addition und Subtraction — gestattet jedoch nur die Addition eine solche Freiheit in der Anordnung ihrer Elemente (Daten). Mithin muss man folgende Grundeigenschaft von den Logarithmen fordern:

„So oft mehrere Zahlen mit einander zu multipliciren sind, müssen ihre Logarithmen addirt werden."

Danach stelle ich nun folgende Erklärung der Logarithmen auf:

Logarithmen von Zahlen sind gewisse nach diesen Zahlen dergestalt bemessene Hilfszahlen, dass der Logarithmus des Productes beliebig vieler und was immer für welcher Zahlen die Summe der Logarithmen dieser Zahlen (Factoren) ist.

15.

In lehrender Form ausgesprochen verwandelt sich diese Erklärung in folgenden Grundlehrsatz:

I. Der Logarithme jedes Productes ist die Summe der Logarithmen seiner Factoren.

$$\mathrm{Log}(abc\ldots) = \mathrm{Log}a + \mathrm{Log}b + \mathrm{Log}c + \ldots$$

Daraus folgen nun sogleich auch die drei weiteren Hauptlehrsätze mit Logarithmen, nemlich

II. $$\mathrm{Log}\frac{a}{b} = \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}b;$$

denn

$$\frac{a}{b} \times b = a,$$

also

$$\mathrm{Log}\frac{a}{b} + \mathrm{Log}b = \mathrm{Log}a$$

und

$$\mathrm{Log}\frac{a}{b} = \mathrm{Log}a - \mathrm{Log}b.$$

III. $$\mathrm{Log}(a^n) = n\mathrm{Log}a,$$

weil

$$\mathrm{Log}(a^n) = \mathrm{Log}(\overset{n}{aaa\ldots\ldots}) = \mathrm{Log}a + \mathrm{Log}a + \mathrm{Log}a + \overset{n}{\ldots\ldots}$$
$$= n\,\mathrm{Log}a$$

ist.

IV. $$\mathrm{Log}\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\,\mathrm{Log}a,$$

weil

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,$$

also

$$n\mathrm{Log}\sqrt[n]{a} = \mathrm{Log}a$$

und

$$\mathrm{Log}\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\,\mathrm{Log}a$$

ist.

Für den Zifferrechner genügt es, die beiden letzten Sätze nur für absolute ganze Exponenten n zu erweisen.

Ueberdies ersieht man leicht, dass

$$\mathrm{Log}1 = 0$$

ist. Denn es ist

$$1.a = a,$$

also

$$\mathrm{Log}1 + \mathrm{Log}a = \mathrm{Log}a,$$

daher

$$\mathrm{Log}1 = \mathrm{Log}a - \mathrm{Log}a = 0.$$

Um den Zahlen ihre mit dem Namen „Logarithmen“ belegten Zeiger, der obigen Grundforderung gemäss, anzupassen, muss man mit irgend einer ausgewählten Zahl einen gewissen Logarithmen verknüpfen. Am zusagendsten findet man es, sich für eine Zahl zu entscheiden, der man den Logarithmen 1 beilegt. Diese Zahl nun, deren Logarithme 1 ist, wird die **Grundzahl** (basis) der nach dieser Annahme bemessenen und ein sogenanntes **Sistem** ausmachenden Logarithmen aller anderen Zahlen genannt.

Die Herleitung der Vergleichungen der Logarithmen aus jenen der Zahlen, so wie die Ueberzeugung von der Möglichkeit, zu

jeder Zahl ihren Logarithmen zu berechnen, gründet man sofort auf folgenden leicht zu rechtfertigenden Satz:

„Hat man was immer für zwei von 0 und 1 verschiedene Zahlen, so fällt jede der von der ersten an aufsteigenden Potenzen der einen Zahl oder ihres Umgekehrten entweder auf eine der von der nullten aus aufsteigenden Potenzen der anderen, oder zwischen zwei unmittelbar nach einander folgende solche Potenzen."

Ist daher a irgend eine Zahl, deren Logarithme in jenem Sisteme zu suchen ist, dessen Grundzahl b ist, so muss die $m$te Potenz entweder von a oder von $\frac{1}{a}$ zwischen die $n$te und $n+1$te Potenz von b fallen, in Zeichen

$$a^m = b^n \dots b^{n+1} \text{ oder } \left(\frac{1}{a}\right)^m = b^n \dots b^{n+1}$$

sein.

Dann ist entweder

$$m\text{Log}a = n \dots n+1 \text{ oder } m(-\text{Log}a) = n \dots n+1,$$

also entweder

$$\text{Log}a = \frac{n}{m} \dots \frac{n+1}{m} \quad \text{oder} \quad \text{Log}a = -\frac{n}{m} \dots -\frac{n+1}{m}.$$

Man erkennt nun leicht, dass man sich hier auf gebahntem und bekanntem Wege befindet.

16.

Die Hauptvortheile meiner Erklärung der Logarithmen bestehen, wie nicht zu verkennen, darin, dass zu ihrem Verständniss schon die Kenntnisse des Potenzirens und Radicirens nach absoluten ganzen Exponenten hinreicht, und dass aus ihr sogleich ohne Beweis einleuchtet, dass die Logarithmen von beiderlei (positiver und negativer) algebraischer Beziehung und von jeder der dreierlei Zahlformen sein können. Ein Nebenvortheil derselben ist der, dass man leicht einsieht, dass, sobald ein logarithmisches Sistem der Grundforderung genügt, ein anderes gleichfalls genügendes sich ergibt, wenn man sämmtliche Logarithmen des ersteren durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt. Denn ist

$$\text{Log}(abc\dots) = \text{Log}a + \text{Log}b + \text{Log}c + \dots,$$

so ist auch

$$m\text{Log}(abc\dots) = m\text{Log}a + m\text{Log}b + m\text{Log}c + \dots$$

Bezeichnet man nun die $m$mal so grossen Logarithmen durch log, setzt man nemlich überhaupt

$$m\mathrm{Log}k=\log k;$$

so ist auch

$$\log(abc...)=\log a+\log b+\log c+....,$$

mithin genügen auch die $m$fachen also dem zweiten Systeme angehörigen Logarithmen.

Sind die Grundzahlen dieser Systeme B, b, also

$$\mathrm{Log}B=1,\ \log b=1;$$

so ist

$$m\mathrm{Log}B=m=\log B,\quad m\mathrm{Log}b=\log b=1,$$

daher

$$m=\log B=\frac{1}{\mathrm{Log}b},\quad \frac{1}{m}=\frac{1}{\log B}=\mathrm{Log}b.$$

Zweiter Abschnitt.

Versuch einer naturgemässen und möglichst leicht fasslichen Herleitung der *natürlichen* Logarithmen.

17.

Einleitung.

Die Lehre von den natürlichen Logarithmen hat bisher in den Lehrbüchern der Algebra oder Analysis, meines Erachtens, weder die gebührende Stelle noch die richtige Behandlung erhalten. Gewöhnlich entwickelt man entweder in der, die Differentialrechnung einleitenden, sogenannten „Analysis des Endlichen“ oder in der Differentialrechnung selbst nach Aufstellung der Taylorschen Reihe, die Reihensumme

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+....$$

oder die Grenze der Potenz $(1+u)^{\frac{1}{u}}$ für die unendliche Abnahme der Veränderlichen u, und sagt dann, „jene Summe oder diese Grenze, d. i. die bestimmte jedoch irrationale Zahl 2·71828.....

die man zumeist durch den Buchstaben e **bezeichnet**, **nehme** man zur Grundzahl der sogenannten **natürlichen** **Logarithmen**;" oder man äussert sich wohl gar, „Neper habe sie zur Grundzahl seiner Logarithmen angenommen."

Ist es einem scharfsinnigen Schüler erlaubt seine Meinung frei zu äussern, so muss er wohl fragen, wie doch Neper oder sonst jemand auf diese sonderbare irrationale Grundzahl gerathen sei. Wie muss er aber erst staunen, wenn man ihn dagegen bescheidet, Neper habe von dem, was man heut zu Tage logarithmische Grundzahl nennt, gar nichts gewusst? Andererseits hat man ihm in der Algebra begreiflich gemacht, dass es wohl am natürlichsten sei, die als Grundzahl des allgemein üblichen dekadischen Ziffersystems verwendete Zahl 10 zur Grundzahl der Logarithmen zu nehmen. Deswegen dürfte er sicher fragen, warum man nicht lieber die dekadischen Logarithmen natürliche nennen wolle.

Eben so unhaltbar ist die Erklärung der natürlichen Logarithmen als jene, deren Modul $=1$ ist, wenn man den Begriff des Moduls nicht fest bestimmt; wie z. B. Pasquich (Anfangsgr. der gesammt. theoret. Mathematik. 4. 1. Bd. Wien. 1812. S. 162. §. 780—782) in folgender Weise irrig gethan hat. „Für jede zwei Grundzahlen bleibt das Verhältniss der Logarithmen einer und derselben Zahl, G, welche diese auch werden möge, beständig. Daher sind immer zwei Zahlen, μ, π, denkbar, deren Verhältniss $\mu:\pi$ zu einander jenem beständigen Verhältnisse gleich ist; dergestalt, dass, wenn M, P die Logarithmen jener Zahl G sind, allemal $M:P=\mu:\pi$ sein muss. — Diese bestimmten Zahlen μ, π nun heissen die Moduln (!) beider logarithmischen Systeme. — Legt man sonach ein logarithmisches System dergestalt zu Grunde, dass sein Modul $=1$ sei; während der Modul jedes anderen Systemes irgend einer bestimmten Zahl m gleich sein soll: so wird jenes das natürliche System, und dieses ein künstliches genannt." — — Nun lässt sich aber jedes Verhältniss dadurch, dass man seine Glieder durch eines aus ihnen theilt, so umstalten, dass in ihm ein Glied $=1$ werde; es ist nemlich

$$\mu:\pi=1:\frac{\pi}{\mu}=\frac{\mu}{\pi}:1.$$

Mithin könnte man den Modul jedes logarithmischen Systems zu 1 machen, folglich jegliches System als das natürliche hinstellen.

Engländer und Franzosen nennen die natürlichen Logarithmen „hyperbolische oder Neper'sche"; sogar jetzt noch, wo doch schon erkannt ist, dass auch bei der Untersuchung anderer Linien, als der gleichaxigen Hyperbel, Logarithmen in Anwendung kommen, und alle Arten von Logarithmen durch Flächeninhalt hyperbolischer Sectoren sich darstellen lassen; so wie, dass Neper's Logarithmen nicht die Zahl e, sondern ihr Umgekehrtes $\frac{1}{e}$ zur Grundzahl haben. (Vergl. unten Art. 23.). Wollte man diejenigen Logarithmen, deren Grundzahl e ist, nach ihrem Entdecker be-

nennen; so müsste man sie nach dem Schweizer Byrg die Byrgischen nennen.

Will man nun nicht zu dem jederzeit misslichen Schaffen neuer Beinamen seine Zuflucht nehmen; so bleibt es wohl am gerathensten, die auf die Grundzahl e bezüglichen Logarithmen, wie üblich, die natürlichen zu nennen; aber auch zugleich ihre Ableitung so naturgemäss durchzuführen, dass diese Benennung passend und ungezwungen, also selbst natürlich, erscheine.

Dabei bleibt es jedoch im Interesse des wissenschaftlichen Systems der Algebra sowohl als der Differentialrechnung auch noch wünschenswerth, dass diese Ableitung, die schwierig zu begründende und der höheren Analysis unbedingt zu überlassende Lehre von den convergenten Reihen umgehend, bloss elementare Hilfsmittel benütze.

Das Folgende soll ein Versuch einer solchen Elementarlehre der natürlichen Logarithmen sein. Diese lässt sich zugleich theils nach den bereits erörterten verschiedenen Begriffen vom Logarithmen richten, theils aus gewissen Grenzverhältnissen, theils endlich aus der Lehre von den logarithmischen Proportionaltheilen schöpfen; wonach unsere Untertheilungen sich richten werden.

A.

Lehre von den natürlichen Logarithmen nach Neper's Begriff vom Logarithmus.

18.

Modul.

Nach Neper's Erklärung des Logarithmus fanden wir in Art. 5., wenn x einen Logarithmen, y den Logarithmand, dem er angehört, und Δx, Δy ihre beziehungsweisen Zunahmen, endlich m eine gewisse beständige Grösse aus der Gattung der x bezeichnet, für $\lim \Delta x = 0$ und $\lim \Delta y = 0$

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta y : y} = m .$$

Der Quotient des Zuwachses des Logarithmus durch den verhältnissmässigen Zuwachs des Logarithmands strebt demnach, bei unendlicher Verringerung des einen und anderen Zuwachses, ohne Ende einer feststehenden Grenze m zu.

Diese Grenze m nun, nach der sich nothwendig das betreffende logarithmische System selbst modificirt, pflegt man den Modul dieses Logarithmensystems zu nennen.

Neper setzt, ausgehend von dem Logarithmand $y=\varrho$, dem er die Null als Logarithmen beilegt, $\Delta y=-\Delta x$, daher ist der Modul des Neper'schen Logarithmensystems $m=-\varrho$.

Führt man für Δx und Δy ihre ursprünglichen Bedeutungen $(x+\Delta x)-x$ oder $\mathrm{Log}(y+\Delta y)-\mathrm{Log}y$ und $(y+\Delta y)-y$ in obige Grenzgleichung ein, so lässt sich ihr auch die Form

$$\lim\frac{\mathrm{Log}(y+\Delta y)-\mathrm{Log}y}{(y+\Delta y)-y}=\frac{m}{y}$$

ertheilen Setzt man noch $y=\varrho$ und $\Delta y=\eta$, so ist auch

$$\lim_{\eta=0}\frac{\mathrm{Log}(\varrho+\eta)-\mathrm{Log}\varrho}{(\varrho+\eta)-\varrho}=\frac{m}{\varrho},$$

oder wegen $\mathrm{Log}\varrho=0$

$$\lim_{\eta=}\frac{\mathrm{Log}(\varrho+\eta)}{\eta}=\frac{m}{\varrho}.$$

19.

Einführung und Rechtfertigung der Benennung: „natürliche Logarithmen."

Gewiss ist es sehr angemessen,

1. die Null der Zahl 1 zum Logarithmen zu geben, also $\varrho=1$ zu wählen, weil dadurch in den allgemeinen Ausdrücken der Logarithmen von Producten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln, und sonach in allem Rechnen mit Logarithmen die bedeutendste Vereinfachung eintritt, (vergl. Art. 4.);

2. die Logarithmen mit den Logarithmanden zugleich wachsen zu lassen, folglich Δx und Δy gleichstimmig und dadurch den Modul m positiv zu machen, nicht aber die einen wachsen und die anderen abnehmen zu lassen, also Δx und Δy entgegengesetzt und dadurch den Modul negativ zu machen; denn im ersten Falle werden die Logarithmen der zumeist in Rechnung kommenden ganzen Zahlen positiv, im anderen aber widernatürlich negativ;

3. diese gleichstimmigen und gleichzeitigen Aenderungen Δx, Δy der Logarithmen x und der Logarithmande y am Ursprunge beider, wo nemlich der Logarithme Null und der Logarithmand $=\varrho$ ist, einander gleich, $\Delta x=\Delta y$, anzunehmen und dadurch den Modul

$$m=\lim\frac{\Delta x}{\Delta y:\varrho}=\varrho$$

zu machen, folglich, nachdem man (vermöge I.) bereits $\varrho = 1$ gewählt hat, den Modul in 1 zu verwandeln.

Demgemäss ist es auch ganz passend, das so vorgerichtete Logarithmensystem, in welchem die Null der Logarithme von Eins und der Modul gleich Eins ist und die Logarithmen mit den Logarithmanden zugleich wachsen oder abnehmen, das natürliche und jeden in selbes gehörigen Logarithmen einen natürlichen (naturalis), zu nennen. Diesem entgegen nennt man jedes andere System, so wie jeden in dasselbe gehörigen Logarithmen künstlich (artificialis). Einen natürlichen Logarithmen bezeichnet man entweder durch log. nat. oder gewöhnlich nur ganz kurz durch l., einen künstlichen überhaupt durch log. artif.

20.

Möglichkeit der Berechnung des Logarithmen einer bestimmten Zahl in Bezug auf einen festgestellten Modul, und umgekehrt der Zahl zu einem gegebenen Logarithmen.

Seien nach Art. 4. mehrere in durchaus gleichem Verhältnisse fortschreitende Zahlen

$$y_0 \; y_1 \; y_2 \; y_3 \ldots\ldots y_n \; y_{n+1} \ldots\ldots$$

und die angehörigen um gleiche Unterschiede fortschreitenden Logarithmen

$$x_0 \; x_1 \; x_2 \; x_3 \ldots\ldots x_n \; x_{n+1} \ldots\ldots;$$

sei ferner die Ausgangszahl $y_0 = \varrho$, der ihr zuständige Ausgangslogarithme $x_0 = 0$; endlich sei der Unterschied $y_1 - y_0 = \Delta y_0 = \eta$. Dann ist das sich gleich bleibende Verhältniss der Logarithmande

$$y_1 : y_0 = 1 + \frac{\eta}{\varrho},$$

und nach Art. 5. II. der durchweg gleiche Unterschied der Logarithmen

$$x_1 - x_0 = \Delta x_0 = m\,\frac{\Delta y_0}{y_0} = m\,\frac{\eta}{\varrho}.$$

Sohin hat man, weil die aufgestellte Reihe der Zahlen (Logarithmande) y geometrisch, die der entsprechenden Logarithmen x aber arithmetisch ist,

$$y_n = \varrho\left(1 + \frac{\eta}{\varrho}\right)^n, \quad y_{n+1} = \varrho\left(1 + \frac{\eta}{\varrho}\right)^{n+1};$$

$$x_n = n.m\frac{\eta}{\varrho}, \quad x_{n+1} = (n+1).m\frac{\eta}{\varrho}.$$

Sei nun y eine gewisse Zahl, x ihr Logarithme, so fällt entweder ausnahmsweise y mit einer der berechneten Zahlen, y_n, folglich x mit dem Logarithmen x_n zusammen; oder es liegt zumeist y zwischen y_n und y_{n+1}, folglich auch x zwischen x_n und x_{n+1}, was wir kurz durch

$$y = y_n \ldots y_{n+1} \text{ und } x = x_n \ldots x_{n+1}$$

andeuten wollen.

In jenem Ausnahmefalle ist

$$y = \varrho\left(1+\frac{\eta}{\varrho}\right)^n, \quad x = n.m\frac{\eta}{\varrho} = \text{Log}y,$$

und wenn man den Ausdruck von $\frac{\eta}{\varrho}$ aus einer dieser Gleichungen in die andere substituirt, erfolgt

$$\text{Log}y = m\left(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}}-1\right)n, \quad y = \varrho\left(1+\frac{\text{Log}y}{mn}\right)^n.$$

In den gewöhnlichen Fällen aber bestimmen wir einmal aus den einschränkenden Grenzausdrücken

$$y = \varrho\left(1+\frac{\eta}{\varrho}\right)^n \ldots \varrho\left(1+\frac{\eta}{\varrho}\right)^{n+1}$$

in umgekehrter Ordnung den Quotienten

$$\frac{\eta}{\varrho} = \sqrt[n+1]{\frac{y}{\varrho}} - 1 \ldots \sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}} - 1$$

und setzen diese Grenzwerthe in die gleichstelligen Einschränkungsgrenzen

$$\text{Log}y = x = m.n\frac{\eta}{\varrho} \ldots m(n+1)\frac{\eta}{\varrho},$$

erhalten daher den Logarithmen

$$\text{Log}y = m\left(\sqrt[n+1]{\frac{y}{\varrho}}-1\right)n \ldots m\left(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}}-1\right)(n+1);$$

nachmalen bestimmen wir aus diesen Grenzausdrücken von Log$y$ in umgekehrter Ordnung den Quotienten

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{\text{Log}y}{m(n+1)} \ldots \frac{\text{Log}y}{mn},$$

und setzen ihn in die gleichvielten Einschränkungsgrenzen von y, erhalten demnach den Logarithmand

$$y = \varrho \left(1 + \frac{\mathrm{Log}y}{m(n+1)}\right)^n \dots \varrho \left(1 + \frac{\mathrm{Log}y}{mn}\right)^{n+1}.$$

Soll die Berechnung der Logarithmen möglichst genau geschehen, so muss das Intervall der ursprünglichen einengenden Grenzen von $\mathrm{Log}y$, d. i. $m\frac{\eta}{\varrho}$, hinreichend klein, daher auch schon die Differenz η recht klein, mithin unendlich abnehmend, $\lim\eta = 0$, angenommen werden. Dann muss aber für jeden endlichen Werth von $\mathrm{Log}y$ die Zahl

$$n = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\varrho}{m} \mathrm{Log}y - 1 \dots \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\varrho}{m} \mathrm{Log}y$$

unendlich wachsen oder $\lim n = \infty$ sein. Führt man diese unerreichbaren Grenzen in obige Ausdrücke von $\mathrm{Log}y$ und y ein, so findet man die äussersten Grenzwerthe

$$\mathrm{Log}y = m . \lim_{n=\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}} - 1\right) n,$$

$$y = \varrho . \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{Log}y}{mn}\right)^n.$$

Bezeichnet man das Umgekehrte von n mit ω, also $\frac{1}{n} = \omega$, so wird für $\lim n = \infty = \frac{1}{0}$ offenbar $\lim\omega = 0$, daher ist auch

$$\mathrm{Log}y = m . \lim_{\omega=0} \frac{\left(\frac{y}{\varrho}\right)^\omega - 1}{\omega},$$

$$y = \varrho . \lim_{\omega=0} \left(1 + \omega \frac{\mathrm{Log}y}{m}\right)^{\frac{1}{\omega}}.\ ^{*)}$$

Für natürliche Logarithmen ist $\varrho = 1$ und $m = \varrho = 1$, daher hat man die einschränkenden Grenzausdrücke

$$\mathrm{l}y = (\sqrt[n+1]{y} - 1)^n \dots (\sqrt[n]{y} - 1)^{n+1},$$

---

*) Von den hier gefundenen äquivalenten vier Grenzgleichungen ist demnach jede das Integral der im 1. Abschn. Art. 5. aufgestellten endlichen Differenzengleichung

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{m} \Delta x.$$

$$y=\left(1+\frac{ly}{n+1}\right)^n \ldots \left(1+\frac{ly}{n}\right)^{n+1};$$

und die äussersten Grenzwerthe:

$$ly=\lim_{n=\infty}(\sqrt[n]{y}-1)n=\lim_{\omega=0}\frac{y^{\omega}-1}{\omega},$$

$$y=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{ly}{n}\right)^n=\lim_{\omega=0}(1+\omega ly)^{\frac{1}{\omega}}.$$

In den jetzt gebräuchlichen Logarithmensystemen legt man durchweg der Zahl 1 die Null als Logarithmen bei, d. i. man setzt $\varrho=1$, dadurch wird

$$\operatorname{Log}y=m(\sqrt[n+1]{y}-1)n \ldots m(\sqrt[n]{y}-1)(n+1),$$

$$y=\left(1+\frac{\operatorname{Log}y}{m(n+1)}\right)^n \ldots \left(1+\frac{\operatorname{Log}y}{mn}\right)^{n+1};$$

und vollständig

$$\operatorname{Log}y=m.\lim_{n=\infty}(\sqrt[n]{y}-1)n=m.\lim_{\omega=0}\frac{y^{\omega}-1}{\omega},$$

$$y=\lim_{n=\infty}.\left(1+\frac{\operatorname{Log}y}{mn}\right)^n=\lim_{\omega=0}\left(1+\omega\frac{\operatorname{Log}y}{m}\right)^{\frac{1}{\omega}}.$$

21.

Vergleichung der Logarithmen von einerlei Zahl in verschiedenen logarithmischen Systemen.

Gehören zur selben Zahl y in zwei logarithmischen Systemen, deren Moduln m und m' sind, die Logarithmen x und x', die wir durch $\operatorname{Log}y$ und $\log y$ unterscheiden wollen; so hat man nach Art 5., insofern die Aenderung Δy der sich gleichbleibenden Zahl y auf für die nemliche angenommen werden darf, sowohl

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{m}\Delta x \text{ und } \operatorname{Log}y=x,$$

als auch

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{m'}\Delta x \text{ und } \log y=x'.$$

Sofort ist

$$\frac{1}{m}\Delta x = \frac{1}{m'}\Delta x',$$

also auch, wenn man summirt, $\frac{x}{m} = \frac{x'}{m'} + \text{Const.}$ Sind nun die Logarithmen x und x' bei der nemlichen Zahl $\varrho = y$ zugleich Null, so ist Const. $= 0$, daher

$$\frac{x}{m} = \frac{x'}{m'},$$

oder

$$\frac{\text{Log} y}{m} = \frac{\log y}{m'};$$

d. h. in zwei logarithmischen Systemen, welche beide derselben Zahl die Null als Logarithme beilegen, sind die Logarithmen von einerlei Zahl den Moduln dieser Systeme proportionirt.

Diese Proportionalität bestätigt auch die in Art. 20. gefundene Gleichung

$$\text{Log} y = m . \lim_{\omega=0} \frac{\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{\omega} - 1}{\omega}.$$

Denn ist in verschiedenen Systemen Null der Logarithme derselben Zahl ϱ, so muss für einerlei Zahl y die angedeutete Grenze dieselbe sein, danach ist Log$y$ proportional mit m.

Ist nun das eine System das natürliche, also $m' = 1$, und das andere ein künstliches, in welchem auch Log $1 = 0$ und der Modul m ist, so übergeht die vorletzte Gleichung in

$$\frac{\text{log.artif.} y}{m} = \text{l} y$$

und hieraus folgt

$$\text{log.artif.} y = m . \text{l} y.$$

Diese Gleichungen dienen zum Uebergang von künstlichen Logarithmen auf die natürlichen, und umgekehrt.

Es genügt demnach für jede Zahl y vorerst ihren natürlichen Logarithmen nach den Art. 20. aufgestellten Grenzausdrücken oder nach dem zwischen sie beide fallenden, folglich genäherten, Ausdrucke

$$\text{l} y = (\sqrt[n]{y} - 1) n,$$

wo $\doteq$ „genähert gleich" bedeuten soll, zu berechnen. Diesem gemäss hat man aus der vorliegenden Zahl y eine sehr hohe Wurzel zu ziehen und ihren Ueberschuss über die 1 mit dem Wurzelexponenten zu multipliciren. Das Product wird den natürlichen Logarithmen von y desto genauer ausdrücken, je grösser der Wurzelexponent ist. Am bequemsten rechnet man, wenn man für n eine Potenz von 2 annehmend sehr oft nach einander die zweite Wurzel zieht. — Erläuterungen und Beispiele findet man in Callet Tables de Logarithmes. pag. 11—15.

Will man jedoch mit dem natürlichen Logarithmensysteme eines vergleichen, in welchem der Zahl ϱ die Null als Logarithme zugeschrieben wird, so wird man mit Berücksichtigung des Art. 20. in dem Ausdrucke

$$ly = \lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{y} - 1)n$$

y in $\frac{y}{\varrho}$ verwandeln, wonach er in

$$l\frac{y}{\varrho} = \lim_{n=\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}} - 1\right)n$$

übergeht. Dadurch umstaltet sich die dortige Gleichung

$$\text{Log}\, y = m \lim_{n=\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}} - 1\right) n$$

in die allgemeinste Vergleichung

$$\text{Log}\, y = ml\frac{y}{\varrho},$$

der man dadurch, dass man y mit ϱy vertauscht, auch die Form

$$ly = \frac{1}{m} \text{Log}\, \varrho y$$

zuweisen kann.

Diesen Vergleichungen zufolge erhält man für Neper's Logarithmen, bei denen, vermöge Art. 4. und 5., $m = -\varrho$ und $\varrho = 10^7$ ist, die Vergleichungen mit den natürlichen Logarithmen

$$\text{log.nep.}\, y = -10^7 \text{log. nat.} \frac{y}{10^7},$$

$$\text{log.nat.}\, y = -\frac{1}{10^7} \text{log.nep.}\, y 10^7.$$

Aus der ersten Gleichung folgt auch

$$\text{log.nat.}\frac{y}{10^7}=-\frac{1}{10^7}\text{log.nep.}y,$$

und hierin liegt folgender Satz:

Schneidet man von den Neper'schen Logarithmen und von den Zahlen, zu denen sie gehören, 7 Decimalstellen ab, oder lässt man in der Neper'schen Logarithmentafel sowohl die Zahlen als auch ihre Logarithmen Zehnmilliontel zählen, und nimmt man noch die Logarithmen negativ, so übergehen sie in natürliche.

Würde man, wie es am angemessensten wäre, in Neper's Canon (Tafel) die ganzzahligen Logarithmen und Logarithmande als Zehnmilliontel lesen, folglich $\varrho=10^7:10^7=1$ und $m=-\varrho=-1$ setzen, so wäre jeder solche Neper'sche Logarithme Log.nep.y $=-ly$, nemlich der entgegengesetzt beziehliche natürliche Logarithme des nemlichen Logarithmands.

22.

Grenzzahl e.

Der in Art. 18. gefundene Ausdruck des Moduls verwandelt sich in jedem logarithmischen Systeme, welches $\varrho=1$ setzt, in

$$m=\lim_{\eta=0}\frac{\text{Log}(1+\eta)}{\eta}$$

und gibt sofort auch (Art. 4.)

$$m=\lim_{\eta=0}\text{Log}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}=\text{Log}\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}.$$

Da nun m eine fixe Grenzzahl ist, und zufolge der im Art. 20. gepflogenen Untersuchung jeder reelle Logarithme x nur einer gewissen Zahl y zugehören kann, so muss auch

$$\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}$$

eine bestimmte Grenzzahl sein, welche, weil die Grenze der Veränderlichen η eine besondere Zahl ist, gleichfalls eine besondere Zahl sein muss und einem herrschenden Gebrauche zufolge mit e bezeichnet werden soll, so dass wir

$$\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}=e$$

setzen. Dadurch wird

$$m = \text{Log}\, e,$$

folglich kommt in jedem logarithmischen Systeme, wo Log1 = 0 ist, der Modul m mit dem Logarithmen der Grenzzahl e überein.

Insbesondere ist im natürlichen Logarithmensysteme $m=1$, daher $le=1$, d. h. der natürliche Logarithme der Grenzzahl e ist gleich 1.

Zur näherungsweisen Berechnung dieser Grenzzahl e dienen daher die in Art. 20. im natürlichen Systeme für den Logarithmand y aufgestellten einschränkenden Grenzausdrücke, wenn man daselbst $y=e$ und $ly=le=1$ setzt. Danach wird

$$e = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \ldots\ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Sucht man vorläufig nur mindestens die zwei engsten ganzzahligen Grenzen (Schranken) für die fragliche Grenzzahl e, so setze man allmälich

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\ldots$$

dann ist

$$e > 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}7,\ 1{\cdot}9,\ 2{\cdot}07,\ \ldots\ldots$$

aber

$$< 4,\ 3{\cdot}4,\ 3{\cdot}1,\ 3{\cdot}05,\ 2{\cdot}9, \ldots\ldots;$$

mithin liegt e zwischen 2 und 3.

Für hohe Zahlen n ist die Verschiedenheit der Potentiande dieser Grenzpotenzen etwas unbequem, deshalb umsetzen wir in der untern Grenze n in $n-1$, wodurch wir denselben Potentiand wie in der oberen und sohin

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \ldots\ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

erhalten. Das Verhältniss dieser Grenzen ist $= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ also nahe $= 1 + \frac{2}{n}$.

Wenn demnach n auch schon sehr gross ist, so beträgt die Fehlergrenze doch immer noch wenigstens $\frac{2}{n}$ des unteren Grenzwerthes von e, und da dieser selbst wieder mindestens 2 ist, so fällt diese Fehlergrenze nicht unter $\frac{4}{n}$.

Wählt man z. B. $n=1000$, so ist

$$e=(1\cdot001)^{1000-1} \ldots (1\cdot001)^{1000+1}$$

und die Fehlergrenze geringstens 0·004. In der That findet man mit Hilfe der dekadischen Logarithmen $e=2\cdot7143 \ldots 2\cdot7196$, also die Fehlergrenze $=0\cdot0056$, so dass man höchstens $e=2\cdot71\ldots$ setzen darf.

Wenngleich die hier gezeigte Berechnungsweise der Grenzzahl e ein sehr ungenaues Ergebniss liefert, so genügt doch schon der von uns gegebene Nachweis der Möglichkeit einer beliebig zu verschärfenden, wenn auch äusserst schwer und lediglich in der Einbildung ausführbaren Berechnung derselben, weil der wirkliche Zifferbetrag dieser Zahl fast nie in den Zifferrechnungen der Analysis verwendet wird.

Führt man die Grenzzahl e in die im Art. 20. für ly gefundene allgemeine Grenzgleichung statt y ein, so erhält man den sehr folgenreichen Grenzausdruck

$$\lim_{\omega=0} \frac{e^{\omega}-1}{\omega}=1.$$

23.

Grundzahl eines logarithmischen Systemes und Berechnung derselben aus dessen Modul.

Was man heut zu Tage „Grundzahl eines Logarithmensystems" nennt, kann in einem Systeme, wo man die Null einer anderen Zahl als der 1 zuweist, wie im Neper'schen Systeme, streng genommen gar nicht vorkommen. Denn will man allgemein jene Zahl b die Grundzahl eines Logarithmensystemes nennen, deren Logarithmus eine bestimmte ausgezeichnete Zahl β ist, so hat man nach Art. 11. 1.

$$\frac{y}{\varrho}=\left(\frac{b}{\varrho}\right)^{\frac{x}{\beta}},$$

welche Gleichung mit der, den gegenwärtigen oder Euler'schen Begriff vom Logarithmus begründenden

$$y=b^{x}$$

zwar ähnlich geformt ist, aber in sie doch nur übergehen kann, wenn man entweder sämmtliche Logarithmen x des Systemes durch β und gesammte Logarithmande y durch ϱ dividirt, oder $\varrho=1$ und $\beta=1$ wählt; dann aber hat man beide Male ein anderes logarithmisches System als das eigentlich betrachtete.

In der That stützte **Neper** sein Logarithmensystem nicht, wie viele Analysten vorgeben, auf eine bestimmte Grundzahl; er hat und benöthigt diesen Begriff gar nicht.

Da nun der ausgezeichnete Logarithme β der Grundzahl mannigfaltig gewählt werden kann, so würde die Grundzahl b selbst unbestimmt bleiben; indess wird sich doch im Verlauf unserer nächsten Untersuchung eine **begründete Wahl von** β treffen lassen.

Insofern in **Neper's** Systeme der Modul m festgestellt ist, frägt sich's nun, wie zu ihm allgemein die Grundzahl b gefunden werden könne.

Zur Beantwortung dieser Frage benützen wir das in Art. 20. allgemein gezeigte Verfahren, wie man zu jedem gegebenen Logarithmus x die ihr angehörige Zahl y berechnen könne, indem wir $x = \mathrm{Log}\, y = \beta$ und $y = b$ setzen. Dadurch erhalten wir für die Grundzahl die allgemeinen Ausdrücke

$$b = \varrho\left[1 + \frac{\beta}{m(n+1)}\right]^n \cdots \varrho\left[1 + \frac{\beta}{mn}\right]^n,$$

$$b = \varrho \cdot \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{\beta}{mn}\right)^n = \varrho \cdot \lim_{\omega=0}\left(1 + \omega\frac{\beta}{m}\right)^{\frac{1}{\omega}}.$$

Anstatt des letzteren Grenzausdruckes lässt sich leicht die Grenzzahl e einführen. Denn setzt man

$$\omega\frac{\beta}{m} = \eta,$$

so ist

$$\omega = \eta\frac{m}{\beta}, \quad \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\eta}\cdot\frac{\beta}{m}$$

und mit $\lim\omega = 0$ auch $\lim\eta = 0$ verbunden; und man findet

$$b = \varrho \cdot \left[\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}\right]^{\frac{\beta}{m}},$$

folglich nach Art. 22.

$$b = \varrho \cdot e^{\frac{\beta}{m}},$$

als den **einfachsten allgemeinen Ausdruck der Grundzahl.**

Bezeichnet man die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes mit B, so hat man gleichzeitig $\varrho = 1$, $m = 1$ und $b = B$ zu setzen, und erhält sofort

$$B = e^{\beta}.$$

Demnach wäre allgemein die Grundzahl B des natürlichen Logarithmensystems die β-Potenz der Grenzzahl e. Da nun erhellet leicht, dass es am passendsten und einfachsten wäre, sogleich diese Grenzzahl selbst, nicht aber erst eine Potenz derselben, zur Grundzahl der natürlichen Logarithmen zu machen, nemlich $B = e$ und somit den für jede Grundzahl b festgestellten ausgezeichneten Logarithmen $\beta = 1$ zu setzen.

Geht man auf diesen Grund ein, der auch noch dadurch bestärkt wird, dass aus Euler's Begriff vom Logarithmus nothwendig folgt, dass der Logarithme der Grundzahl $= 1$ sein muss; so gestaltet man folgende

Erklärung:

Die Grundzahl eines logarithmischen Systemes ist diejenige Zahl, welche 1 zum Logarithmen hat.

Diese Erklärung haben auch Karsten, Kästner und Klügel (vergl. dessen Math. Wörterb. III. Bd., Logarithmus, Nr. 119), welche mit der Ermittlung von Neper's logarithmischer Grundzahl sich beschäftigten, angenommen, wenn auch nicht so umständlich wie hier gerechtfertigt.

Setzt man nun in den Gleichungen dieses Artikels $\beta = 1$, so übergehen sie in

$$\frac{y}{\varrho} = \left(\frac{b}{\varrho}\right)^x,$$

$$b = \varrho\left[1 + \frac{1}{m(n+1)}\right]^n \cdots \varrho\left[1 + \frac{1}{mn}\right]^n,$$

$$b = \varrho e^{\frac{1}{m}}.$$

In den jetzt üblichen Logarithmensystemen fällt die Null der Zahl 1 als Logarithme zu, also ist $\varrho = 1$ und sofort

$$y = b^x,$$

$$b = \left[1 + \frac{1}{m(n+1)}\right]^n \cdots \left[1 + \frac{1}{mn}\right]^n,$$

$$b = e^{\frac{1}{m}}.$$

Bei Neper's Grundzahl der Logarithmen muss man zwischen seinem System und seinem Canon (Tafel) der Logarithmen unterscheiden.

In seinem logarithmischen Systeme setzte er $\eta = \Delta y$ unendlich abnehmend, $\varrho = 10^7$ und $m = -\varrho$ voraus, also ist

$$b = 10^7 . e^{-0 \cdot 0000001} = 10^7 (1 - \frac{1}{10^7} + \frac{0 \cdot 5}{10^{14}} \ldots)$$
$$= 9999999 \cdot 00000005 \ldots\ldots$$

die Grundzahl des Neper'schen Logarithmensystemes.

In seinem logarithmischen Canon dagegen ertheilte Neper, indem er $\eta = \Delta y_0 = 1$ wählte, der Zahl

$$y = 9999999 = 10^7 - 1 = \varrho - 1$$

den Logarithmen $x = 1$, also ist nach der ersten der obigen Gleichungen die Grundzahl des Neper'schen Logarithmen-Canons

$$b = \varrho - 1 = 9999999.$$

Karsten hingegen behauptet, sie sei $= 0 \cdot 9999999$. (Klügel a. a. O. S. 537., Z. 7. u. S. 539., Z. 2. v. u.).

Neper erinnert aber in seinen Schriften zweimal (ebendas. S. 537., Z. 4—7 und 8—10), der Logarithme seiner ersten Proportionszahl $9999999 = \varrho - 1$ falle zwischen 1 und $1 \cdot 0000001$ $= 1 + \frac{1}{\varrho}$, daher man denselben

$$= 1 \cdot 00000005 = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\varrho}$$

setzen mag.

Nimmt man daher, nachdem man zur Abkürzung $\frac{1}{\varrho} = \varepsilon$ gesetzt hat,

$$y = \varrho - 1, \quad \frac{y}{\varrho} = 1 - \frac{1}{\varrho} = 1 - \varepsilon$$

und

$$x = 1 + \frac{1}{\varrho} = 1 + \varepsilon;$$

so findet man

$$\frac{b}{\varrho} = (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}},$$

oder wenn man für einen Augenblick

$$n = \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \ldots.$$

setzt:

$$\frac{b}{\varrho}=(1-\varepsilon)^n=1-n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{1.2}\varepsilon^2.....$$

$$=1-\varepsilon+\varepsilon^2-1\tfrac{1}{2}\varepsilon^3....;$$

folglich ist

$$b=\varrho-1+\varepsilon-1{\cdot}5\varepsilon^2....\doteq 9999999{\cdot}0000001.$$

Setzt man dagegen

$$x=1+\frac{\frac{1}{2}}{\varrho}=1+\frac{\varepsilon}{2}$$

und für einen Augenblick

$$m=\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}=1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{\varepsilon^3}{8}\cdots$$

so ist

$$\frac{b}{\varrho}=(1-\varepsilon)^m=1-m\varepsilon+\frac{m(m-1)}{1.2}\varepsilon^2....$$

$$=1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^3}{2}.....,$$

folglich

$$b=\varrho-1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}\cdots\doteq 9999999{\cdot}00000005...$$

Dieselben Ereignisse fand Kästner und Klügel (a. a. O S. 540.).

Würde man (vergl. Art. 21.) in Neper's System die ganzzahligen Logarithmen und Logarithmande als Zehnmilliontel lesen, folglich $\varrho=1$ und $m=-\varrho=-1$ setzen; so wäre die Grundzahl des auf diese Weise abgeänderten Neper'schen Logarithmensystems $=e^{-1}=\frac{1}{e}$, nemlich das Umgekehrte der Grundzahl e der natürlichen Logarithmen.

24.

Berechnung des Moduls eines logarithmischen Systemes aus dessen Grundzahl, oder allgemeiner aus den festgesetzten Logarithmen zweier Zahlen.

Neper hatte seine Logarithmen vornehmlich bloss für seine astronomisch- oder sphärisch-trigonometrischen Rechnungen ausgedacht; sobald er aber diese wichtige Entdeckung seinem Freunde Heinrich Briggs mitgetheilt hatte, rieth dieser, um selbe für die gewöhnliche dekadische Zifferrechnung mit Zahlen nutzbar einzurichten, die Logarithmen dergestalt zu bemessen, dass die dem dekadischen Ziffersysteme zu Grunde liegende Zahl 10 den Logarithmen 1, und die Zahl 1 den Logarithmen 0 erhalte.

Hier hatte man demnach die umgekehrte Aufgabe der vorigen, nemlich aus der für ein neu zu schaffendes Logarithmensystem gegebenen Grundzahl $b=10$, oder noch allgemeiner, aus zwei Zahlen und deren Logarithmen, von denen jedoch einer Null ist, des logarithmischen Systemes Modul m zu berechnen.

Zu ihrer Lösung dienen am besten die in Art. 20. für Log y aufgestellten Ausdrücke, in denen Log $\varrho=0$ ist, weil in ihnen der Modul m als Factor vorkommt. Wegen der Complicirtheit seines Mitfactors und der Einfachheit des Products bleibt es jedoch rathsamer, dieses Moduls Umgekehrtes, $\frac{1}{m}$, auszudrücken. Für selbes findet man

$$\frac{1}{m}=\frac{(\sqrt[n+1]{\frac{y}{\varrho}}-1)\,n}{\text{Log}\,y_n}\cdots\frac{(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}}-1)(n+1)}{\text{Log}\,y},$$

und

$$\frac{1}{m}=\frac{\lim\limits_{n=\infty}.(\sqrt[n]{\frac{y}{\varrho}}-1)n}{\text{Log}\,y}=\frac{\lim\limits_{\omega=0}.\frac{\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{\omega}-1}{\omega}}{\text{Log}\,y}.$$

Ist nun die Grundzahl b gegeben, so setze man $y=b$ und $\text{Log}\,y=\text{Log}\,b=\varrho$; dadurch wird

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{\varrho}\cdot(\sqrt[n+1]{\frac{b}{\varrho}}-1)n\ldots\frac{1}{\varrho}(\sqrt[n]{\frac{b}{\varrho}}-1)(n+1),$$

und

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{\varrho}\cdot\lim_{n=\infty}.(\sqrt[n]{\frac{b}{\varrho}}-1)\,n=\frac{1}{\varrho}\cdot\lim_{\omega=0}.\frac{\left(\frac{b}{\varrho}\right)^{\omega}-1}{\omega}.$$

In der Neuzeit setzt man durchweg, die dem Logarithmen Null entsprechende Zahl $\varrho=1$, daher hat man hier die einfacheren Ausdrücke

$$\frac{1}{m}=(\sqrt[n+1]{b}-1)\,n\ldots.(\sqrt[n]{b}-1)(n+1),$$

und

$$\frac{1}{m}=\lim_{n=\infty}.(\sqrt[n]{b}-1)n=\lim_{\omega=0}.\frac{b^{\omega}-1}{\omega}.$$

Für das dekadische Logarithmensystem ist $b=10$, daher findet man, mittels vielfach wiederholter zweitgradiger Wurzelziehung aus 10, wie Callet a. a. O. zeigt, den Modul dieses Systems

$$m=0\cdot4342944819\ldots.$$

Im natürlichen Logarithmensyteme ist der Satzung gemäss $m=1$, und gefunden ward $b=e=2\cdot71\ldots$, daher gibt die letzte Gleichung wieder den bereits (Art. 22.) erhaltenen Grenzausdruck $\lim\limits_{\omega=0}\frac{e^{\omega}-1}{\omega}=1$.

Den Zusammenhang zwischen Grundzahl und Modul in jeglichem Logarithmensysteme, welches $\text{Log}\,1=0$ setzt, vermag man am einfachsten durch Vermittelung der natürlichen Logarithmen aufzustellen. Benützt man nemlich die in Art. 21. erwiesene logarithmische Umwandelungsgleichung

$$\text{log.artif.}y=m.ly,$$

indem man $y=b$ setzt, so erfolgt

$$m.lb=1,$$

als allgemeiner Ausspruch des fraglichen Zusammenhanges. Modul und natürlicher Logarithme der Grundzahl sind nemlich in jedwedem logarithmischen Systeme Umgekehrte von einander. Und danach können, wenn einmal die natürlichen Logarithmen berechnet und intabulirt sind, Modul und Grundzahl leicht aus einander gerechnet werden.

Denselben Satz liefert auch die (in Art. 23.) entwickelte Gleichung $b=e^{\frac{1}{m}}$, wenn man in ihr die natürlichen Logarithmen beider Seiten nimmt; da sie $lb=\frac{1}{m}$ gibt.

B.

Lehre von den natürlichen Logarithmen nach *Byrg's* Begriff vom Logarithmus und nach *Neper's* Berechnungsweise der Logarithmen.

25.

Bei dem (in B. Art. 6. erörterten) Zusammenhalten der gleichstelligen Glieder einer geometrischen Reihe von Logarithmanden y mit einer arithmetischen Reihe von Logarithmen x hatten die gleichzeitigen Schöpfer dieser Anschauungsweise der Logarithmen, Neper und Byrg, nebst den Ausgangsgliedern $y_0 = \varrho$ und $x_0 = 0$ beider Reihen noch ihr gleichzeitiges Fortschreiten nach einem bestimmten Gesetze in Zusammenhang zu bringen. Hierbei scheinen sie von Betrachtungen folgender Art geleitet worden zu sein.

In einer arithmetischen Reihe bleibt sich die *absolute* (unverglichen genommene) Zu- oder Abnahme derselben von Glied zu Glied, durchweg gleich, in einer geometrischen jedoch nur ihre *verhältnissmässige* Zu- oder Abnahme, d. i. das Verhältniss der absoluten Zu- oder Abnahme zum jedesmaligen vorausgehenden Gliede. Ist nemlich d der stete Unterschied der arithmetischen Reihe, so $\begin{smallmatrix}\text{steigt}\\\text{sinkt}\end{smallmatrix}$ diese von Glied zu Glied um d, wenn d $\begin{smallmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{smallmatrix}$ ist. Wenn dagegen in einer geometrisehen Reihe der stete Quotient q und irgend ein Glied y ist, so ist das folgende $= qy$; daher, da wo $q > 1$, ist die absolute Zunahme $= qy - y$ und die verhältnissmässige $= \frac{qy - y}{y} = q - 1$, oder dort, wo $q < 1$, ist die absolute Abnahme $= y - qy$ und die verhältmässige $= \frac{y - qy}{y}$ $= 1 - q$. Mithin bleibt in einer $\begin{smallmatrix}\text{steigenden}\\\text{fallenden}\end{smallmatrix}$ geometrischen Reihe die verhältnissmässige $\begin{smallmatrix}\text{Zunahme}\\\text{Abnahme}\end{smallmatrix}$ der Glieder so wie der Quotient q durchgehends sich gleich. Blos wo das vorausgehende Glied $y = 1$ ist, kommt die verhältnissmässige Aenderung der Glieder mit der absoluten selbst überein.

Damit aber einerseits in der arithmetischen Reihe der Logarithmen x jeder vorgelegte Logarithme, und andererseits in der geometrischen Reihe der Zahlen y jede vorgelegte Zahl, auf einen möglichst geringen Fehler vorkomme, muss dieser Fehler, nemlich in jener arithmischen Logarithmen-Reihe das absolute Intervall d, in dieser geometrischen Logarithmanden- oder Zahlen-Reihe das verhältnissmässige Intervall, $q - 1$, der henachbarten Glieder, möglichst klein, und jedenfalls bei der Grundanlage beider einander zugesellten Reihen entschieden festgestellt werden. Dadurch wird aber auch das Verhältniss beider dieser Intervalle oder Zu-

nahmen der Reihenglieder, $d:(q-1)$, welches mit m bezeichnet werden möge, festgestellt; und man erklärt sonach m als das Grenzverhältniss der unendlich sich verringernden Intervalle oder Aenderungen, d und $q-1$, der Glieder in der arithmetischen Reihe der Logarithmen und in der geometrischen der Zahlen; nemlich für $\lim d=0$ und $\lim(q-1)=0$ wird $m=\lim\frac{d}{q-1}$ gesetzt. Dieses, die Art oder das System der Logarithmen bestimmende, Grenzverhältniss, m, pflegt man den Modul des logarithmischen Systemes zu nennen.

Neper liess (vergl. Art. 5.) die arithmetische Reihe seiner Logarithmen steigen und mit dem Gliederpaare 0, k anheben, also die absolute Zunahme der Glieder $d=k$ positiv sein; dagegen liess er, geleitet von seinen sphärisch-astronomischen Rechnungen, die geometrische Reihe der zugehörigen Zahlen sinken, und mit dem Gliederpaare ϱ, $\varrho-\varkappa$ anfangen, also den Quotienten $q=\frac{\varrho-\varkappa}{\varrho}=1-\frac{\varkappa}{\varrho}$ und die relative Zunahme der Glieder $q-1=\frac{(\varrho-\varkappa)-\varrho}{\varrho}=-\frac{\varkappa}{\varrho}$ negativ sein. Er setzte daher überhaupt den logarithmischen Modul $m=\frac{d}{q-1}=-k:\frac{\varkappa}{\varrho}$. Insbesondere nahm er (nach Art. 7.)

$$k=1,\ \varrho=10000000,\ \varkappa=1=k,$$

folglich

$$\frac{\varkappa}{\varrho}=0{\cdot}0000001$$

und

$$m=-\varrho=-10000000.$$

Byrg dagegen liess für die gewöhnlichen Zifferrechnungen in ganzen Zahlen beide verbundenen Reihen, folglich die Logarithmen und Logarithmande, mit einander wachsen, also in seiner arithmetischen Logarithmen-Reihe (vergl. Art. 7.) ebenfalls die Anfangsglieder 0, k und die absolute Zunahme der Glieder $d=k$ positiv, dagegen in seiner geometrischen Logarithmanden-Reihe die Anfangsglieder ϱ, $\varrho+\varkappa$, folglich den Quotienten $q=\frac{\varrho+\varkappa}{\varrho}=1+\frac{\varkappa}{\varrho}$ und sofort die verhältnissmässige Zunahme der Glieder $q-1=\frac{(\varrho+\varkappa)-\varrho}{\varrho}=\frac{\varkappa}{\varrho}$ auch positiv sein. Er setzte demnach überhaupt den logarithmischen Modul $m=\frac{d}{q-1}=k:\frac{\varkappa}{\varrho}$. Insbesondere nahm er (laut Art. 7.)

$$k = 10,\ \varrho = 100000000,\ \varkappa = 10000;$$

also

$$\frac{\varkappa}{\varrho} = 0{\cdot}0001 \text{ und } m = 100000.$$

26.

Spätere Mathematiker erkannten jedoch bald

1. dass es rathsamer sei, von dem damaligen Gebrauche, blos mit ganzen Zahlen zu rechnen und demgemäss nicht nur die Logarithmande, sondern auch die Logarithmen in ganzen Zahlen darzustellen, ganz abzugehen und sonach Logarithmande und Logarithmen durch Decimalbrüche auszudrücken, und

2. dass die logarithmischen Rechnungen sich ungemein vereinfachen, wenn man die Null als Logarithmus nicht mehr einer höheren dekadischen Einheit ϱ, sondern der Stammeinheit — der Eins — zuschreibt, also analog $\varrho' = 1$ macht.

Dazu bedurfte es demnach nur sämmtliche geometrisch gereihten Zahlen durch diese dekadische Einheit ϱ zu theilen. Hiebei blieb der Quotient q dieser geometrichen Reihe ungeändert, weil sein Dividend und Divisor durch einerlei Zahl getheilt wurden, daher $q' = q$. Sonach blieb auch die verhältnissmässige Zunahme der Glieder dieser geometrischen Zahlenreihe ungestört, $q' - 1 = q - 1$.

In Bezug auf die Logarithmen ersahen sie, dass es angemessener sei, den in den Zifferrechnungen gewöhnlich vorkommenden ganzen Zahlen positive Logarithmen zuzuweisen, folglich nicht allein die geometrische Logarithmanden-Reihe, sondern auch die arithmetische Logarithmen-Reihe steigen zu lassen, sonach in jener den Quotienten $q' > 1$ und in dieser die Differenz d' positiv zu machen. Zugleich benützten sie den von Neper (vergl. Art. 1, Cap. I. Def. 6) herstammenden Gedanken, die absolute Zunahme d' der arithmetisch gereihten Logarithmen der verhältnissmässigen Zunahme $q' - 1$ der geometrisch gereihten Logarithmande gleich zu machen, also $d' = q' - 1$ zu setzen, folglich den Modul dieses abgeänderten Logarithmensystems $m' = \frac{d'}{q' - 1} = 1$ zu wählen. Weil aber $q' - 1 = q - 1$ und wegen $m = \frac{d}{q - 1}$ also $q - 1 = \frac{d}{m}$ ist, so hatte man auch $d' = \frac{d}{m}$, d. i. man musste zunächst die Zunahme d der Logarithmen, folglich, weil das Ausgangsglied ihrer arithmetischen Reihe Null ist, sämmtliche Logarithmen durch den Modul m theilen.

Diese neue, dem Modul $m' = 1$ entsprechende, Art von Logarithmen ergab sich demnach aus Neper's Logarithmentafel, indem man alle Zahlen durch $\varrho = 10^7$ und alle Logarithmen durch $m = -10^7$ dividirte, folglich blos von den Zahlen und Logarithmen 7 Decimalstellen abschnitt (oder beide als Zehnmilliontel las) und noch die Logarithmen mit entgegengesetztem Vorzeichen

nahm. Aus **Byrg's** Logarithmentafel ergab sie sich, indem man die Zahlen durch $\varrho = 10^8$ und die Logarithmen durch $m = 10^5$ theilte, folglich nur von den Zahlen 8, von den Logarithmen aber 5 Decimalstellen abschnitt (oder jene als Hundertmillióntel und diese als Hunderttausendtel las).

Insofern nun dieses abgeänderte Logarithmensystem den hier als naturgemäss nachgewiesenen Anforderungen (vergl. noch Art. 19.) genügte, und beide Entdecker den Logarithmen, wenn man blos die Zähleinheiten ihrer ganzzahlig dargestellten Logarithmande und Logarithmen und höchstens noch das algebraische Beziehungszeichen der letzteren abändert, in ihren Logarithmentafeln dieses logarithmische System aufgestellt haben; erkannten die Mathematiker es für passend, diese Logarithmen **natürliche** zu nennen.

Im natürlichen Logarithmensysteme ist demnach der Modul $m = \lim \frac{d}{q-1} = 1$ für $\lim d = \lim (q-1) = 0$, und, wie man gegenwärtig zu schreiben pflegt, ist log.nat.1 oder $l\,1 = 0$.

27.

Für die Berechnung des Logarithmus x einer bestimmten Zahl y für einen festgestellten Modul m hat man demnach in einer ähnlichen Weise wie in Art. 20. die Gleichungen:

$$x_n = x_0 + nd = nd, \quad x_{n+1} = x_0 + (n+1)d = (n+1)d;$$

$$y_n = y_0 q^n = \varrho q^n, \qquad y_{n+1} = y_0 q^{n+1} = \varrho q^{n+1};$$

$$m = \frac{d}{q-1};$$

$$x = x_n \ldots x_{n+1}, \quad y = y_n \ldots y_{n+1}.$$

Eliminirt man nun hier d und q so wie dort $\frac{\eta}{\varrho}$, so findet man leicht auch die daselbst aufgestellten Gleichungen, sohin auch die auf sie gegründeten in den Art. 21—24 durchgeführten Lehren; weshalb wir uns der Wiederholung derselben hier enthalten.

Für die *Grundzahl des Byrg'ischen Logarithmensystems* setzt man in Art. 23. die Zahl $\varrho = 10^8$ und den Modul $m = 10^5$; danach findet man

$$b = 10^8 . e^{0 \cdot 00001}$$

$$= 10^8 (1 + \frac{1}{10^5} + \frac{0 \cdot 5}{10^{10}} + \frac{0 \cdot 1\dot{6}}{10^{15}} + \frac{0 \cdot 04\dot{6}}{10^{20}} \cdots)$$

$$= 100001000 \cdot 0050000166 \ldots$$

Zur Berechnung der Grundzahl b der Byrg'ischen Logarithmen*tafel* benützt man die aus Art. 11, 1. und 2. so wie auch aus Art. 23. folgende Gleicsung

$$\frac{b}{\varrho}=\left(\frac{y}{\varrho}\right)^{\frac{1}{x}},$$

indem man auf den von mir (in Art. 23.) gerechtfertigten Begriff der logarithmischen Grundzahl eingehend $\beta=1$ wählt.

Setzt man nemlich nach Byrg's Annahmen (Art. 25.)

$$\varrho=10^8,\ y_1=\varrho+\varkappa;$$

also

$$\frac{y_1}{\varrho}=1+\frac{\varkappa}{\varrho}=1{\cdot}0001$$

und

$$x_1=d=k=10,$$

so ist

$$b=10^8(1{\cdot}0001)^{\frac{1}{10}}=10^8(1+\frac{1}{10^5}-\frac{4{\cdot}5}{10^{10}}+\frac{12}{10^{15}}-\frac{21}{10^{20}}\ldots)\ ^{*)}$$

$$=100000999{\cdot}0550012\ldots$$

C.

Aufbau der Lehre von den natürlichen Logarithmen über einem gewissen Grenzverhältnisse und auf dem gewöhnlichen Begriffe vom Logarithmus.

28.

Wenn y eine beliebige, n eine absolute ganze Zahl vorstellt, so ist bekanntlich

$$y^n-1=(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}+\ldots+y+1),$$

daher der Quotient oder das Verhältniss

$$\frac{y^n-1}{y-1}=y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots\ldots+y+1.$$

---

*) Um über die Beträge dieser Luxuszahlen, die man Neper's und Byrg's logarithmische Grundzahlen nennt, kurz und sicher absprechen zu können, habe ich mir erlaubt ausnahmsweise hier und in Art. 24. die convergenten Reihen anzuwenden.

Würde man nun die willkührliche Zahl y geradehin $=1$ setzen, so möchte jener Quotient die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, diese Potenzensumme aber, weil n gliederig, in die Summe von n Einsen also in n selbst übergehen. Man muss daher diesen Potentiand y als eine der Grenze 1 unablässig zustrebende veränderliche Zahl ansehen, wonach auch alle ihre natürlichen Potenzen derselben Grenze 1 zustreben, und die n gliederige Potenzensumme der Grenze n ohne Ende näher rückt. Dadurch wird man berechtiget, diese Grenze der Potenzensumme als Grenze jenes Quotienten anzusehen, folglich zu setzen

$$\lim_{y=1} \frac{y^n-1}{y-1} = n.$$

Soll die Zahl y ihrer Grenze 1 stetig sich nähern, so muss sie wenigstens in den späteren Stadien, ebenso wie ihre Grenze reell und positiv, dabei jedoch entweder kleiner oder grösser als diese Grenze sein, folglich entweder im Wachsen oder im Abnehmen dieser Grenze zustreben; es ist nemlich $y \gtrless 1$ und $\lim y = 1$, wofür wir im Zusammenhange $\lim y \underset{<}{\overset{>}{=}} 1$ schreiben wollen.

Danach ist in der obigen Potenzensumme jeder Summand, als Potenz von y, so wie diese positiv und dort grösser hier kleiner als 1, und strebt der gemeinsamen Grenze 1 zu, folglich

$$\lim (y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y^2 + y + 1) \underset{<}{\overset{>}{=}} n$$

und

$$\lim \frac{y^n-1}{y-1} \underset{<}{\overset{>}{=}} n.$$

29.

Bezeichnen wir den Unterschied zwischen y und 1 mit x, nemlich $y-1=x$, so ist für $y \underset{<}{\overset{>}{=}} 1$ dieser Unterschied $x \underset{<}{\overset{>}{=}} 0$, und die letzte Grenzvergleichung

$$\lim \frac{(1-x)^n-1}{x} \underset{<}{\overset{>}{=}} n \text{ für } \lim x \underset{<}{\overset{>}{=}} 0.$$

Unterscheidet man, zur genauen Erforschung der Vergleichungszeichen, ob x positiv oder negativ sei, so hat man zunächst, wenn x positiv, also $\lim x \geqq 0$ ist,

$$\frac{(1+x)^n-1}{x} \geqq n,$$

daher wenn man beiderseits des Vergleichungszeichens mit der positiven Zahl x multiplicirt und 1 addirt,

$$(1+x)^n \geqq 1+nx,$$

und wenn man beiderseits die $n$te Wurzel aus diesen zwei die 1 übersteigenden positiven Zahlen zieht,

$$1+x \geqq (1+nx)^{\frac{1}{n}},$$

endlich, wenn man noch beide eben solche Zahlen nach dem positiven Exponenten $\frac{1}{x}$ potenzirt,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \geqq (1+nx)^{\frac{1}{nx}}.$$

Ist dagegen x negativ, also $\lim x \overline{\overline{<}} 0$, so hat man

$$\frac{(1+x)^n-1}{x} \overline{\overline{<}} n,$$

oder, weil Dividend und Theiler negativ sind, nach Veränderung ihrer Vorzeichen,

$$\frac{1-(1+x)^n}{-x} \overline{\overline{<}} n.$$

Multiplicirt man nun zu beiden Seiten des Vergleichungszeichens mit der positiven Zahl $-x$, so wird

$$1-(1+x)^n \overline{\overline{<}} -nx;$$

daher, wenn man beiderseits $(1+x)^n$ und nx addirt, ist

$$1+nx \overline{\overline{>}} (1+x)^n;$$

folglich, wenn man von beiden verglichenen Zahlen ihre Umgekehrten nimmt, das heisst, durch beide die 1 theilt, muss das Ungleichheitszeichen umgewendet werden, und es erfolgt

$$\frac{1}{1+nx} \overline{\overline{>}} \frac{1}{(1+x)^n}$$

oder

$$(1+nx)^{-1} \overline{\overline{>}} (1+x)^{-n}.$$

Erhebt man nun beide positive Zahlen zur Potenz des positiven Exponenten $\frac{1}{-nx}$, so wird

$$(1+nx)^{\frac{1}{nx}} \overset{=}{>} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sonach ist im Zusammenhange, für

$$\lim x \overset{>}{\underset{<}{=}} 0,$$

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{>}{\underset{<}{=}} \lim (1+nx)^{\frac{1}{nx}}.$$

Hieraus erhellet nun, dass beide diese Potenzen, von denen die erste nur von x, die andere nur von nx abhängt, bei gleichzeitiger unendlicher Abnahme dieser Veränderlichen x und nx, einer und derselben Grenze zustreben müssen, oder, wenn man diese Veränderlichen durch eine neue mit ihnen zugleich unendlich abnehmende Veränderliche ω vorstellt, dass die Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ einer gewissen Grenze ohne Ende sich nähern muss.

Diese Grenzzahl kann, weil die in der Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ einzig vorkommende Veränderliche ω in ihrem äussersten Grenzwerthe in Null übergeht, lediglich eine völlig bestimmte oder besondere Zahl sein. Einem allgemeinen Gebrauche gemäss pflegt man sie durch den Buchstaben e zu bezeichnen; also

$$\lim_{\omega=0} (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} = e$$

zu setzen.

30.

Erforschen wir nunmehr, ob diese Grenze e bei unendlicher Abnahme von ω von der Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ im Wachsen oder Abnehmen angestrebt werde.

Weil nx mit x gleichzeitig positiv ist und unendlich abnimmt, so muss, vermöge der zuletzt aufgestellten Grenzvergleichung, die Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$, wenn ω von nx auf seinen $n$ten Theil, x, abnimmt, für $\frac{\text{positive}}{\text{negative}}$ Werthe von x, nx und ω, $\frac{\text{zunehmen}}{\text{abnehmen}}$, und somit muss diese $\frac{\text{Zunahme}}{\text{Abnahme}}$ auch fortbestehen, wenn die jeweilige Abnahme der Veränderlichen ω auf ihren $n$ten Theil sich fort-

während wiederholt, also ω allmählig auf nx, x, $\frac{x}{n}$, $\frac{x}{n^2}$, $\frac{x}{n^3}$, u. s. f. herabsinkt.

Weil jedoch x beliebig klein und n beliebig gross angenommen werden kann, so müssen die hinreichend klein gewählten Glieder jeder anderen Reihe von Werthen der Veränderlichen ω zwischen je zwei Glieder jener abnehmenden geometrischen Reihe fallen; folglich muss auch für die neue Reihe, also überhaupt, wie auch immer das Gesetz der unendlichen Abnahme von ω lauten möge, die Potenz $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ für $\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}$ Werthe von ω ohne Ende $\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{abnehmend}\end{matrix}$ der Grenzzahl e zustreben, nemlich für

$$\lim \omega \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

ist

$$\lim(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} e.$$

Daraus folgt sogleich, das für jeden $\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}$ Werth von ω die Potenz

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \lessgtr e$$

sein muss.

Setzt man daher einmal $\omega = \frac{1}{n}$ und ein andermal $\omega = -\frac{1}{n+1}$, wobei n absolut und ganz sein soll, so ist

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$e < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{-(n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

also

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Insbesondere findet man für $n=1$, dass die fragliche Grenzzahl zwischen den ganzen Zahlen 2 und 4 liegt. Wie man diese einschränkenden Grenzausdrücke zur wirklichen Berechnung von e verwenden könne, ist in Art. 22. gewiesen worden.

31.

Aus der obigen allgemeinen Grenzvergleichung

$$\lim (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \stackrel{<}{\underset{>}{=}} e \quad \text{für} \lim \omega \stackrel{>}{\underset{<}{=}} 0,$$

folgt für positive ω, der Ordnung nach,

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \leqq e, \quad 1+\omega \leqq e^{\omega}, \quad \omega \leqq e^{\omega}-1, 1 \leqq \frac{e^{\omega}-1}{\omega};$$

dagegen für negative ω, wo $-\omega$ positiv ist,

$$(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} \geqq e, \quad \frac{1}{(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}} \leqq \frac{1}{e}, \quad \left(\frac{1}{(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}}\right)^{-\omega} \leqq \left(\frac{1}{e}\right)^{-\omega};$$

$$1+\omega \leqq e^{\omega}, \quad 1-(1+\omega) = -\omega \geqq 1-e^{\omega}, 1 \geqq \frac{e^{\omega}-1}{\omega};$$

mithin ist

$$\lim \frac{e^{\omega}-1}{\omega} \stackrel{>}{\underset{<}{=}} 1 \quad \text{für} \lim \omega \stackrel{>}{\underset{<}{=}} 0.$$

Eine Bestätigung dieser wichtigen Grenzvergleichung finden wir an der in Art. 29. erwiesenen und ihr eigentlich zu Grunde liegenden

$$\lim \frac{(1+x)^{n}-1}{x} \stackrel{>}{\underset{<}{=}} n \quad \text{für} \lim x \stackrel{>}{\underset{<}{=}} 0.$$

Denn dividirt man durch n, setzt $nx=\omega$, also $n=\frac{\omega}{x}$, so verwandelt sie sich in

$$\lim \frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\omega}-1}{\omega} = \lim \frac{\left[\lim\limits_{x=0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\omega}-1}{\omega} = \lim \frac{e^{\omega}-1}{\omega} \stackrel{>}{\underset{<}{=}} 1$$

für

$$\lim \omega \stackrel{>}{\underset{<}{=}} 0.$$

32.

Sei in Bezug auf eine beliebige von 0 und 1 verschiedene absolute Grundzahl b der Logarithme der zwischen 2 und 4 enthaltenen absoluten Grenzzahl e, oder — wie wir ihn kurz nennen wollen — der b-**Logarithme** von e, die Zahl m; in Zeichen $\overset{b}{\log} e = m$, also $b^m = e$. Führt man diesen Ausdruck von e in die zuletzt gefundene Grenzgleichung

$$\lim_{\omega=0} \frac{e^\omega - 1}{\omega} = 1$$

ein, und theilt sie durch m, so wird

$$\lim_{\omega=0} \frac{b^{m\omega} - 1}{m\omega} = \frac{1}{m}.$$

Setzt man noch abkürzend $m\omega = \varepsilon$, also auch $\lim \varepsilon = 0$, so erfolgt

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{b^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{1}{m} = \frac{1}{\overset{b}{\log} e},$$

eine bemerkenswerthe Grenzgleichung.

Kehrt man ihre beiden Theile um, so ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{b^\varepsilon - 1} = m = \overset{b}{\log} e.$$

Da ε eine unendlich abnehmende Zahl ist, so ist

$$\lim_{\varepsilon=0} (b^\varepsilon) = b^0 = 1,$$

also darf $b^\varepsilon = 1 + \eta$ gesetzt werden, wo auch $\lim \eta = 0$ ist. Dann ist $\varepsilon = \overset{b}{\log}(1+\eta)$, und für diese Ausdrücke übergeht die Gleichung in

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)}{\eta} = m = \overset{b}{\log} e,$$

der man, weil $\overset{b}{\log} 1 = 0$ ist, auch die Form

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta) - \overset{b}{\log} 1}{(1+\eta) - 1} = m = \overset{b}{\log} e$$

ertheilen kann.

Zu jedem Logarithmensystem ist demnach das Verhältniss der geringsten Aenderungen der kleinsten Logarithmen zu den entspre-

chenden Aenderungen ihrer, der Zahl 1 benachbartesten, Zahlen ein bestimmtes, m, welches der **Modul** dieses logarithmischen Systemes genannt wird und mit dem, in diesem Systeme vorkommenden, Logarithmen der Grenzzahl $e=2{\cdot}71\ldots$ übereinfällt.

Da nun der Logarithme der Grundzahl in jeglichem Systeme $=1$ ist, so sieht man sich durch den Ausdruck $\overset{b}{\log} e$ des logarithmischen Moduls aufgefordert, sich ein Logarithmensystem zu denken, dessen Grundzahl die gefundene Grenzzahl e ist; was möglich bleibt, weil e absolut und von 0 und 1 verschieden ist. Durch den Uebergang von b auf e wird $\overset{e}{\log} e=1$, daher obige Grenzgleichung

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{e}{\log}(1+\eta)-\overset{e}{\log}1}{(1+\eta)-\eta}=m=1.$$

In dem Systeme dieser e-**Logarithmen** sind daher die geringsten Aenderungen der kleinsten Logarithmen den entsprechenden Aenderungen ihrer, der Zahl 1 benachbartesten, Zahlen **gleich**, oder der **Modul** ist$=1$.

Insofern nun die Analysis selbst auf dem Wege einer ganz ungekünstelten Erforschung von naturgemäss zur Frage sich aufwerfenden Grenzverhältnissen zu der mit e bezeichneten Grenzzahl, und danach zu den auf die Grundzahl e beziehlichen Logarithmen geleitet wird; und insofern diesen die in Art. 19. aufgezählten Eigenschaften zukommen: sieht man sich ohne Zweifel berechtiget, diese e-Logarithmen **natürliche** zu nennen.

33.

Bezeichnet man nun diese natürlichen Logarithmen blos mit dem einfachen Buchstaben l, so findet man aus der obigen Gleichung $b^m=e$ die bekannte $m\mathrm{l}b=1$. Ferner wenn x der b-Logarithme von y ist, also $b^x=y$ ist, hat man auch

$$b^{mx}=e^x=y^m,$$

also

$$x=\mathrm{l}\,(y^m),$$

oder

$$\overset{b}{\log} y=m\mathrm{l}y.$$

Daraus folgt auch $e=y^{\frac{m}{x}}$ und sonach, mit Bezug auf Art. 31, $e^\omega=y^{\frac{m}{x}\omega}$, oder, wenn man $\frac{m}{x}\omega=\frac{1}{n}$ setzt,

$$e^{\omega}=y^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{y} \text{ und } \omega=\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{m}.$$

Bringt man diese Ausdrücke in die Grenzvergleichung

$$\lim\frac{e^{\omega}-1}{\omega}\gtreqless 1,\ \lim\omega\gtreqless 0$$

und setzt noch

$$x=\overset{b}{\log}y,$$

so wird

$$\frac{m}{\overset{b}{\log}y}\lim_{n=x}(\sqrt[n]{y}-1)\,n\gtreqless 1,$$

wobei das $\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}$ Vergleichungszeichen gilt, wenn $\omega=\dfrac{x}{nm}=\dfrac{\overset{b}{\log}y}{nm}$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ ist.

Nimmt man, wie üblich, $b>1$, also $m=\overset{b}{\log}e$ positiv, ferner für y eine Absolutzahl über 1, daher auch $\overset{b}{\log}y$ positiv an, so kommt letztere Bedingung darauf zurück, dass n $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ sei.

Für diesen Fall, wo b und $y>1$ ist, findet man demnach allgemein, wenn man mit der positiven Zahl $\overset{b}{\log}y$ die Vergleichung multiplicirt,

$$\overset{b}{\log}y\lesseqgtr m\lim(\sqrt[n]{y}-1)\,n,$$

$$\text{für } \lim\frac{1}{n}\gtreqless 0, \text{ oder für } \lim n=\pm\infty;$$

daher insbesondere für natürliche Logarithmen, d. i. für $b=e$, $m=1$, und $y>1$,

$$ly\lesseqgtr\lim(\sqrt[n]{y}-1)\,n,\ \lim\frac{1}{n}\gtreqless 0.$$

Anders dargestellt ist

$$ly=\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{y}}\right)n\,\ldots\,(\sqrt[n]{y}-1)\,n.$$

wenn man nemlich n erst negativ, dann positiv setzt. Dabei ist das Verhältniss der oberen Grenze zur untern $= \sqrt[n]{y}$.

Setzt man zur Vereinfachung der Rechnung

$$\sqrt[n]{y} = 1 + u\text{, und } (\sqrt[n]{y} - 1 . n =) nu = Y;$$

so ist

$$ly = \frac{Y}{1+u} \ldots Y.$$

Da noch

$$\frac{Y}{1+u} = Y - uY + \frac{Yu^2}{1+u} > Y - uY$$

ist, so findet man um so mehr

$$ly = Y - uY \ldots Y$$

und die Fehlergrenze $= uY$.

D.

Ableitung der Lehre von den natürlichen Logarithmen nach dem dermalen gebräuchlichen Begriffe der Logarithmen.

34.

I. Für eine festgesetzte Grundzahl b sei x der Logarithme einer Zahl y, in Zeichen $\overset{b}{\log} y = x$, so ist (vermöge Art. 10) $b^x = y$.

Zugleich ist aber auch nach dem Begriffe vom Wurzelziehen (Radiciren)

$$b = \sqrt[x]{y} = \sqrt[\overset{b}{\log} y]{y};$$

d. h. radicirt man eine Zahl y nach ihrem Logarithmen $x = \overset{b}{\log} y$, oder gewöhnlicher ausgesprochen, zieht man aus einer Zahl y diejenige Wurzel, deren Exponent ihr Logarithme $x = \overset{b}{\log} y$ ist, so erhält man die Grundzahl b, auf die sich jener Logarithme bezieht.

II. Ist die gewählte absolute Grundzahl b — wie es sein muss — von 0 und 1 verschieden, so gibt es zu jeder Absolutzahl y einen reellen Logarithmen x. Denn der Ausnahmsfall $y = 1$

ist bekanntlich durch $x=0$ erledigt, weil $b^0=1$ ist. In jedem anderen eigentlich zu erforschenden Falle, wo $y \gtrless 1$ ist, sei der in Frage gestellte Logarithme überhaupt ein rationaler auf die regelmässige Form (von ganzzahligem Nenner und Zähler) zurückgeführter Bruch, nemlich $x=\frac{p}{n}$, so soll $b^x=b^{\frac{p}{n}}=y$ sein. Dann muss $b^p=y^n$; nemlich einer Potenz der Grundzahl b eine Potenz des Logarithmands y gleich sein.

Potenzirt man aber sowohl die logarithmische Grundzahl b nach allen algebraisch aufsteigend geordneten negativen und positiven ganzzahligen Exponenten von $-\infty$ bis $+\infty$, den Logarithmand y aber nach allen absoluten ganzzahligen Exponenten von 0 bis ∞; so muss, wenn $b \gtrless 1$ ist, die erstere Potenzenreihe, vorwärts / rückwärts genommen, vom Unendlichkleinen an bis ins Unendlichgrosse aufsteigen, die andere Potenzreihe aber, wenn $y \gtrless 1$ ist, von 1 an unendlich wachsen / abnehmen. Mithin muss jede Potenz der letzteren Art, wie y^n, entweder mit einer Potenz der ersteren Art, wie y^p, übereinfallen, oder wenigstens zwischen zwei benachbarten solchen Potenzen, wie y^p und y^{p+1} liegen. Im ersteren freilich seltenen Falle ist

$$y^n=b^p, \text{ also } y=b^{\frac{p}{n}},$$

folglich

$$\overset{b}{\log} y=\frac{p}{n};$$

im anderen und gewöhnlichsten Falle ist

$$y^n=b^p \;....\; b^{p+1},$$

daher

$$y=b^{\frac{p}{n}} \;....\; b^{\frac{p+1}{n}}$$

und sonach

$$\overset{b}{\log} y=\frac{p}{n} \;....\; \frac{p+1}{n},$$

wobei die Fehlergrenze $\frac{1}{n}$ durch allmäliche und unendliche Vergrösserung des Exponenten n nach und nach immer kleiner gemacht und dem Verschwinden beliebig nahe gebracht werden kann, mithin der geforderte Logarithme, selbst wenn er irrational wäre, mit jeder gewünschten Schärfe genähert sich bestimmen lässt.

35.

Da allgemein $\overset{b}{\log} y = x$, und insbesondere $\overset{b}{\log} 1 = 0$ ist; so wird, weil in der mit der ersteren Gleichung in den Begriffen unzertrennlich verbundenen $b^x = y$ bei stetiger Veränderung des Exponenten x auch die Potenz y stetig sich ändert, folglich umgekehrt eine stetige Aenderung dieses Logarithmands y nothwendig jenen Logarithmus x auch wieder stetig abändern muss, bei der unaufhörlichen Annäherung des Logarithmands y an die Grenze 1 der Logarithmus x der Grenze 0 zustreben oder unendlich abnehmen. Es ist nemlich, für $\lim y = 1$, $\lim x = 0$ oder, kürzer dargestellt, $\lim\limits_{y=1} \overset{b}{\log} y = 0$, und mit Rückblick auf Art. 34. I. ist $b = \lim \left(y^{\frac{1}{x}}\right)$.

Sei noch $y - 1 = \eta$, also $y = 1 + \eta$, so ist $\lim y = 1$ gleichgeltend mit $\lim \eta = 0$, und es übergeht der letzte Ausdruck in

$$b = \lim (1 + \eta)^{\frac{1}{x}}, \text{ für } \lim \eta = 0 = \lim x.$$

Eine Bestätigung dieses Ausdruckes liefert auch die bekannte Gleichung $\overset{b}{\log} b = 1$, der wir die Form $\lim\limits_{y=b} (\overset{b}{\log} y = x) = 1$ ertheilen können.

Denn setzen wir $y = b(1 + \beta)$, so kann $x = \overset{b}{\log} y = 1 + \alpha$ gesetzt werden, wofern mit $\lim \beta = 0$ auch $\lim \alpha = 0$ verbunden ist. Dann ist

$$b^{1+\alpha} = b(1 + \beta),$$

also

$$b^\alpha = 1 + \beta$$

und

$$b = (1 + \beta)^{\frac{1}{\alpha}},$$

oder vollständig

$$b = \lim (1 + \beta)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ für } \lim \alpha = 0 = \lim \beta.$$

36.

Erforschen wir noch, in welcher Vergleichung, wenn x und $y - 1$ einstimmig sind, die Grundzahl b mit 1 stehe.

Bekanntlich gehört, wenn die Grundzahl (der Potentiand) $b \gtrless 1$ ist, zu einem positiven Logarithmen (Exponenten) x ein

Logarithmand (eine Potenz) $y \gtrless 1$; dagegen zu einem negativen Logarithmen x ein Logarithmand $y \lessgtr 1$; folglich muss umgekehrt zu einem Logarithmand $y \gtrless 1$, für den also der Unterschied $y-1$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}$ ist, und zu einem $\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}$ Logarithmen x jedenfalls eine Grundzahl $b > 1$ gehören.

37.

Vermöge Art. 34. I. lässt sich zu einem jeden reellen absoluten Logarithmand $y \gtrless 1$, oder zu jedem positiven oder negativen Unterschiede $\eta = y - 1$ dieses Logarithmands y von 1, und zu jeglichem ihm beigelegten positiven oder negativen Logarithmen x die entsprechende logarithmische Grundzahl b, als die einem gegebenen Radicand (y) und Wurzelexponenten (x) zugehörige Wurzel (b), mit vollkommener Bestimmtheit berechnen. Unter diesen Annahmen für y oder für $y-1=\eta$ und für x ist aber die bemerkenswertheste gewiss die, wo man diesen Logarithmen x jenem Unterschiede η völlig (in Grösse und Beziehung) gleich, $x=\eta=y-1$, voraussetzt und beide mit einander unendlich abnehmen, $\lim x=0$, $\lim \eta=0$, $\lim (y-1)=0$, sein lässt.

Für diese ausgezeichneten Bedingungen müssen die in Art. 35. aufgestellten allgemeinen Grenzausdrücke der Grundzahl b nothwendig eine ganz absonderliche logarithmische Grundzahl darbieten, die wir mit e bezeichnen wollen, wonach wir erhalten

$$e = \lim_{y=1} \left(y^{\frac{1}{y-1}}\right) = \lim_{\eta=0} (1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}.$$

Von dieser Grundzahl lässt uns der Art. 36., weil der Unterschied $y-1=\eta$ mit dem ihm gleichen Logarithmen x auch gleichstimmig ist, sogleich erkennen, dass sie grösser als Eins sein muss.

38.

Erforschen wir sofort den Zusammenhang dieser ausgezeichneten logarithmischen Grundzahl e mit jeder anderen b. Für diese bietet der Art. 35. die allgemeinen Grenzausdrücke

$$b = \lim \left(y^{\frac{1}{x}}\right) = \lim (1+\eta)^{\frac{1}{x}}$$

zu

$$\lim y=1,\ \lim x=0,\ \lim \eta=0.$$

Daher ist auch, wenn man beiderseits nach $\frac{x}{\eta}=\frac{x'}{y-1}$ potenzirt,

$$\lim(b^{\frac{x}{\eta}})=\lim_{y=1}(y^{\frac{1}{y-1}})=\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}},$$

folglich nach obigem Grenzausdrucke von e,

$$\lim(b^{\frac{x}{\eta}})=e.$$

Hiernach ist nun

$$\lim\frac{x}{\eta}=\overset{b}{\log} e,$$

oder wegen

$$x=\overset{b}{\log}(y=1+\eta)$$

auch

$$\lim_{y=1}\frac{\overset{b}{\log} y}{y-1}=\lim_{\eta=0}\frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)}{\eta}=\overset{b}{\log} e.$$

Diese Gleichung hätte sich auch gefunden, wenn man von obigen Ausdrücken der Grundzahl e die auf die Grundzahl b bezüglichen Logarithmen genommen hätte. Sie lässt sich, weil $\overset{b}{\log} 1=0$ ist, auch so darstellen:

$$\lim_{y=1}\frac{\overset{b}{\log} y-\overset{b}{\log} 1}{y-1}=\lim_{\eta=0}\frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)-\overset{b}{\log} 1}{(1+\eta)-1}=\overset{b}{\log} e.$$

Aus der Gleichung $\lim(b^{\frac{x}{\eta}})=b^{\lim\frac{x}{\eta}}=e$, und noch leichter aus ihrer nothwendigen Folge $b=\lim e^{\frac{\eta}{x}}=e^{\lim\frac{\eta}{x}}$, erhellet, dass die Grundzahl b, also auch der gesammte Charakter eines jeden logarithmischen Systems lediglich von dem völlig bestimmten und dem $\overset{b}{\log} e$ gleichenden Grenzverhältnisse $\frac{x}{\eta}$ den kleinsten Logarithmen, x, zu den geringsten Unterschieden, $\eta=y-1$, der Logarithmande y von 1 abhänge. Deswegen wird dieses Grenzverhältniss der Modul des betreffenden, der Grundzahl b zugehörigen logarithmischen Systems genannt. Wir bezeichnen es mit m und haben demnach $m=\lim\frac{x}{\eta}$ oder

$$m = \lim_{y=1} \frac{\overset{b}{\log} y - \overset{b}{\log} 1}{y-1} = \lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta) - \overset{b}{\log} 1}{(1+\eta)-1} = \overset{b}{\log} e,$$

und

$$b^m = e, \quad b = e^{\frac{1}{m}}.$$

Für die auf die Grundzahl e beziehlichen Logarithmen ist $x = \eta$, also der Modul $m = 1$.

39.

Insofern nun die genauere Erforschung der Logarithmen ganz einfach und naturgemäss auf die ausgezeichnete logarithmische Grundzahl e hinleitet, und insofern bei diesem logarithmischen Systeme das zur Betrachtung sich aufdrängende mit dem Namen „logarithmischer Modul" belegte Grenzverhältniss in das Gleichheitsverhältniss oder in 1 übergeht, ist es angemessen, derlei Logarithmen natürliche, alle anderen dagegen künstliche zu nennen, erstere durch log. nat. oder nur durch l, letztere aber allgemein durch log. artif. zu bezeichnen.

Um zu erfahren, wie man von den einen Logarithmen auf die anderen übergehen könne, sei wie früher

$$\overset{b}{\log} y = x, \text{ also } y = b^x.$$

Setzt man hierin

$$b = e^{\frac{1}{m}},$$

so ist

$$y = e^{\frac{x}{m}},$$

folglich

$$\overset{e}{\log} y = \text{log. nat. } y = \frac{x}{m} = \frac{1}{m} \cdot \overset{b}{\log} y,$$

und sofort allgemein

$$\text{log. nat. } y = \frac{1}{\text{modul.}} \cdot \text{log. artif. } y,$$

daher umgekehrt

$$\text{log. artif. } y = \text{modul.} \times \text{log. nat. } y.$$

40.

Sehen wir nun nach, wie bei unendlicher Abnahme von η die Potenz $(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}$ ihrer Grenze e sich nähert, ob wachsend oder abnehmend.

Allgemein ist

$$\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^2 = 1+\eta+\frac{\eta^2}{4},$$

also sicher

$$\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^2 > 1+\eta.$$

Erhebt man beiderseits des Ungleichheitszeichens zur Potenz $\frac{1}{\eta}$, so muss, wenn η, also auch $\frac{1}{\eta}$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}$ ist,

$$(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}} \lessgtr \left(1+\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{\eta:2}}$$

sein.

Wenn demnach der Werth der $\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}$ Zahl η fortwährend auf seine Halbscheid herabsinkt, so muss die Potenz $(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}$ Schritt für Schritt $\begin{matrix}\text{steigen}\\\text{sinken}\end{matrix}$. Weil man aber von jedem beliebigen Werthe von η ausgehen kann, und durch fortgesetzte Halbirung desselben endlich unter jede angenommene noch so kleine Zahl herabkommen muss; so muss auch für jederlei Abnahme von η die betrachtete Potenz $\begin{matrix}\text{steigen}\\\text{sinken}\end{matrix}$, folglich wird sie bei unendlicher Abnahme von η ihrer Grenze e ohne Ende $\begin{matrix}\text{wachsend}\\\text{abnehmend}\end{matrix}$ sich nähern. Es ist demnach für $\lim \eta \gtreqless 0$ entschieden

$$\lim(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}} \gtreqless e.$$

Wie man von hier aus in dieser Lehre weiter vorschreiten könne, lässt sich aus den Artikeln 30., 31. und 33. unschwer ersehen, weswegen wir uns mit den bisherigen Andeutungen begnügen dürfen.

E.

Aufstellung der Lehre von den natürlichen Logarithmen aus jener von den sogenannten logarithmischen Proportionaltheilen bei Zugrundlegung des gewöhnlichen Begriffs vom Logarithmus.

41.

Elementare Ableitungen des Hauptlehrsatzes von den logarithmischen Proportionaltheilen.

Erste Ableitung. Sei a irgend eine Zahl, α eine Zugabe zu ihr, durch die sie auf $a+\alpha$ gebracht wird, nebstbei sei n eine absolute ganze Zahl, so ist

$$(a+\alpha)^n = a^n + na^{n-1}\alpha + Aa^{n-2}\alpha^2,$$

wenn man diese Potenz auch nicht nach dem binomischen Lehrsatze in seiner einfachsten Fassung, sondern blos als Product von n binomischen Factoren, deren jeder $a+\alpha$ ist, durch geregelte Multiplication entwickelt, und aus allen Gliedern vom 3ten an $a^{n-2}\alpha^2$ als Factor heraushebt und den dazu gehörigen zusammengesetzten Factor durch A vorstellt.

Die Zugabe α sei nun im Vergleich mit der Zahl a selbst nur sehr klein, nemlich das Verhältniss $\frac{\alpha}{a}$ sei ein kleiner Theil von Eins, und zwar so klein, dass man für eine erste Annäherung wenigstens seine zweite Potenz $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2$ vernachlässigen, oder $\mathrm{Lim}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 = 0$ annehmen darf; zugleich sei auch die ganze Absolutzahl n nur mässig gross. Dividirt man sonach beide Theile der Gleichung durch $a^n = a \,.\, a^{n-1}$, so ist vollständig

$$\left(\frac{a+\alpha}{a}\right)^n = \frac{a+n\alpha}{a} + A\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2,$$

und für genügend kleine Verhältnisse $\frac{\alpha}{a}$ zureichend genähert

$$\left(\frac{a+\alpha}{a}\right)^n \doteq \frac{a+n\alpha}{a}.$$

Nimmt man nunmehr hiervon in Bezug auf eine beliebige Grundzahl die Logarithmen, so ist

$$\log(a+n\alpha) - \log a \doteq n\,[\log(a+\alpha) - \log a].$$

Die Zugaben α zu jeder beliebigen Zahl a können daher im Verhältniss zu dieser jederzeit so klein gewählt werden, dass zu jedem — mindestens mässig grossen — Vielfachen einer jeden solchen Zugabe in der Zahl höchst nahe das Ebensovielfache der Zunahme des der Zahl zugehörigen Logarithmen gehört. Mithin müssen die genügend kleinen Zunahmen der Zahlen (Logarithmande) den zugehörigen Zunahmen ihrer Logarithmen ganz nahe proportional sein.

Sind nemlich α, α' irgend zwei verhältnissmässig nur geringe Zunahmen der Zahl a, so verhält sich sehr nahe

$$\frac{\alpha}{\alpha'} \doteq \frac{\log(a+\alpha)-\log a}{\log(a+\alpha')-\log a}.$$

Zweite Ableitung. Seien α, α' zwei Zunahmen der Zahl a, durch die sie auf $a+\alpha$ und $a+\alpha'$ gelangt, so ist das Product

$$(a+\alpha)(a+\alpha')=a^2+a\alpha+a\alpha'+\alpha\alpha',$$

und wenn man durch $a.a$ dividirt:

$$\frac{a+\alpha}{a}\cdot\frac{a+\alpha'}{a}=\frac{a+\alpha+\alpha'}{a}+\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\alpha'}{a}.$$

Nun seien die Zunahmen α, α' im Verhältniss zur ursprünglichen Zahl a, nemlich die Verhältnisse $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\alpha'}{a}$, so klein, dass, während das Verhältniss $\frac{\alpha'}{\alpha}$ dieser Zunahmen unter sich ein endliches ist, die zweiten Potenzen $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2$, $\left(\frac{\alpha'}{a}\right)^2$ jene Verhältnisse unerheblich klein seien und deshalb für eine erste Näherung vernachlässigt werden dürfen, oder dass

$$\text{Lim}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2=0 \text{ und } \text{Lim}\left(\frac{\alpha'}{a}\right)^2=0$$

gesetzt werden könne. Dann lässt sich, weil $\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\alpha'}{a}=\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}$ ist, auch das Product $\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\alpha'}{a}$ vernachlässigen oder $\text{Lim}\left(\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\alpha'}{a}\right)=0$ setzen. Unter diesen Bedingungen ist demnach in zureichender Annäherung

$$\frac{a+\alpha+\alpha'}{a}\doteq\frac{a+\alpha}{a}\cdot\frac{a+\alpha'}{a},$$

und in jedem logarithmischen Systeme

$$\log(a+\alpha+\alpha')-\log a\doteq[\log(a+\alpha)-\log a]+[\log a].$$

Die Zunahmen α, α' zu jeder beliebigen Zahl a können demnach im Verhältniss zu dieser jedesmal so klein gewählt werden, dass der Summe jeglicher Zunahmen jeder beliebigen Zahl auch wieder die Summe der ihnen entsprechenden Zunahmen ihrer zugehörigen Logarithmen entspricht. Mithin gibt es zu jeder Zahl so geringe Zunahmen derselben, dass ihnen die Zunahmen ihres Logarithmus höchst nahe proportional seien.*)

Sind nemlich α, α' was immer für zwei verhältnissmässig geringe Zunahmen der Zahl a, so verhält sich höchst nahe

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\log(a+\alpha)-\log a}{\log(a+\alpha')-\log a}$$

und zwar um so genauer, je kleiner diese Zunahmen sind.

42.

Diese erwiesene Proportionalität der Zunahme des Logarithmen zur hinreichend kleinen Zunahme α des Logarithmands a kann nun bekanntlich einfacher auch durch

$$[\log(a+\alpha)-\log a] :: \alpha$$

ausgedrückt werden. Verwandelt man den hier vorfindigen Unterschied, so darf man schreiben

$$\log\frac{a+\alpha}{a} :: \alpha,$$

oder auch

$$\log\left(1+\frac{\alpha}{a}\right) :: \frac{\alpha}{a},$$

weil a beständig und α allein veränderlich vorausgesetzt ist.

*) Dieses einfache und leicht anwendbare Kennzeichen der directen Proportionalität, dessen ich mich bereits in mehreren Aufsätzen im Archiv mit vielem Vortheil bediente, hatte bereits Dr. J. J. Ide in seinen „Anfangsgründen der reinen Mathematik“, 1. Thl. Arithm., Berlin 1803, §. 187, S. 115, mitgetheilt und im 2. Bde. auf die Geometrie angewandt, und doch haben meines Wissens blos Prof. W. A. Förstemann in seinem „Lehrb. d. Geometrie“, 2 Thle., Danzig, 1827 und Prof. J. Knar, in seinen „Anfangsgründen der reinen Mathematik“, 2 Thle., Gräz, 1829, selbes benützt. Die Schriftsteller über Mechanik und Physik, wo sich mittels dieses Kennzeichens so viele Proportionalitäten aufs einleuchtendste erweisen lassen, scheinen es bisher noch vornehm völlig ignorirt zu haben. — Auch in den s. g. exacten Wissenschaften scheint also höchstens noch Autorität über angewöhnte Manieren obsiegen zu können; darum möge zur Anempfehlung dieses Satzes noch erwähnt werden, dass — wie ich schon anderswo angeführt habe — bereits La Place in der Vorrede zu seiner Mécanique celeste 1799 desselben gedacht hat.

Schreibt man sohin noch abkürzend $\frac{\alpha}{a}=\eta$, so bleibt, bei der hier bestehenden Proportionalität, das Verhältniss $\frac{\log(1+\eta)}{\eta}$ ungeachtet der Aenderung von η unverändert und mag sonach hier durch die unveränderliche Zahl m vorgestellt werden, so dass mit Rücksicht auf die bedungene unendliche Abnahme von η und auf die logarithmische Grundzahl b, vollständig

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)}{\eta}=m$$

ist. Dafür kann man wegen $\overset{b}{\log}1=0$ auch schreiben:

$$\lim_{\eta=0} \frac{\overset{b}{\log}(1+\eta)-\overset{b}{\log}1}{(1+\eta)-1}=m,$$

und gelangt demnach wieder zu dem ersten in Art. 32. ausgesprochenen Lehrsatze.

Schreibt man die vorletzte Gleichung in der Form

$$\overset{b}{\log}.\left[\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}\right]=m$$

oder

$$\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}=b^m,$$

und erwägt, dass b und m bestimmte Zahlen sind; so ersieht man, dass die Potenz $(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}$ bei unendlicher Abnahme von η einer bestimmten Grenze zustrebt, welche, weil diese Potenz weder b noch m in sich führt, sondern lediglich die an der äussersten Grenze verschwindende Veränderliche η enthält, nothwendig eine besondere Zahl sein muss, die wir dem Gebrauche der meisten Anderen folgend, durch e bezeichnen wollen.

Sonach setzen wir

$$\lim_{\eta=0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}=e$$

und es ist

$$b^m=e.$$

Und so sehen wir uns denn wieder auf dem durch unseren früheren Artikel (22—24, 29—33) bereits gebahnten Wege.

43.

Schlussbemerkungen.

Ich schmeichle mir demnach durch die That erwiesen zu haben, dass die Lehre von den natürlichen Logarithmen, ohne Zuhilfenahme der, einer zu weitwendigen Erörterung bedürfenden, convergirenden unendlichen Reihen, sogar — wie die in *D.* und *E.* zergliederten Verfahren darthun — höchst ungezwungen und einfach abgehandelt, und sofort unbedenklich in die niedere Algebra aufgenommen werden könne. Elementare, diese Reihen gleichfalls ausschliessende. Methoden der wirklichen Berechnung natürlicher und künstlicher Logarithmen der Zahlen mittels Hilfstafeln, welche diese Lehre beschliessen müssen, darf ich wohl hier übergehen, da sie ohnehin schon von mehreren Schriftstellern gelehrt worden sind. Die bequemsten darunter scheinen mir die von Thibaut in seinem „Grundriss der allgem. Arithm. o. Analysis", Göttingen, 1809 und 1830, mitgetheilten zu sein.

Dadurch habe ich zugleich das Versprechen erfüllt, welches ich in meiner jüngst veröffentlichten, von der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag der Ehre der Aufnahme in ihre Sammlung von Abhandlungen (V. Folge. Band 6) gütigst gewürdigten, grösseren Monographie, betitelt: „Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra, oder einer Grundlehre von der Ablenkung algeb. Grössenbezeichnungen", 4. 1850. Prag, (Calve), §. 57, Note, gegeben habe. Und sonach dürften beide diese Abhandlungen Kennern genugsam verständlich zeigen, wie zur — noch immer sehr noth thuenden — streng wissenschaftlichen Vervollständigung und folgerechten Richtung der späteren Partien der Algebra, nach den 7 Grundrechnungen und ihrer Anwendung auf die erst- und zweitgradigen Gleichungen, nach einander die Lehren von den natürlichen Logarithmen, von der Ablenkung der algebraischen Grössenbeziehungen, vom Potenziren nach imaginären (ablenkend beziehlichen) Exponenten und von den damit engstens zusammenhängenden, folglich nur allein in die Algebra gehörigen s. g. goniometrischen Functionen abgehandelt, und schliesslich auf die, ihrer bedürfende, Lehre von den allgemeinen höheren Gleichungen angewendet werden können.

Nebstbei wird eine solche elementare Darstellung der Lehre von den natürlichen Logarithmen auch von einer systematischen Grundlage der Differentialrechnung geheischt, damit man die Herleitung der Differentialverhältnisse exponentieller logarithmischer und goniometrischer Functionen, ohne Hilfe der convergirenden Reihen und der Geometrie, durchzuführen und sofort zur Entwicklung der Functionen in convergente Reihen nach dem Taylor'schen Lehrsatze überzugehen vermöge.

IV.

Das Malfattische Problem. Beweis der Steinerschen Construction.

Von dem

Herrn Oberlehrer A. Quidde

am Gymnasium zu Herford.

Die folgenden Untersuchungen wurden veranlasst durch die von Adams im Jahre 1846 herausgegebene kleine Schrift über das Malfattische Problem. Die Analysis, welche Adams zu der eleganten Construction von Jakob Steiner gibt, befriedigte mich nicht, weil sie nicht rein planimetrisch war, sondern auf eine Gleichung zweiten Grades sich stützte. Die folgende Analysis hält sich in rein geometrischen Betrachtungen und ist, wenn die vorbereitenden Sätze einmal bekannt sind, zugleich sehr einfach und übersichtlich.

Ohne den Ort der Punkte weiter zu erörtern, von welchen an zwei Kreise Tangenten mit bestimmter Summe oder Differenz geben, welcher Ort ein Kegelschnitt ist, leuchtet doch so viel auf den ersten Blick ein, dass die Tangenten, die von den Punkten der gemeinschaftlichen inneren oder gemeinschaftlichen äusseren Tangenten an die Kreise gehen, stets eine bestimmte Summe oder Differenz haben, nämlich das zwischen den Berührungspunkten liegende Stück derselben. Dass dieser Satz auch umgekehrt gilt, dass also, wenn die Summe oder Differenz der von einem Punkte an zwei Kreise gehenden Tangenten der Länge der von den Berührungspunkten begrenzten inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise gleich ist, dieser Punkt auf einer inneren oder äusseren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise lie-

gen muss, lässt sich leicht zeigen. Es sei M (Taf. III. Fig. 4.) ein solcher Punkt, dass $MB-MA=PQ$, und es liege M nicht auf PQ; seien D und C die Schnittpunkte von BM und AM mit PQ, so $DB=DP$, $CA=CQ$; $MB=DB-DM$, $MA=CA+MC$; es soll $MB-MA=PQ$, also $DB-DM-CA-MC=PQ$, oder $DP-DM-CQ-MC=PQ$ oder $DC+PQ-DM-MC=PQ$ oder $DC=DM+MC$ sein, was nicht möglich ist, wenn M nicht auf PQ liegt.

Man habe nun drei Kreise 1, 2, 3, mit drei gemeinschaftlichen Tangenten (Taf. III. Fig. 5.), die durch einen Punkt P gehen; A, B seien die Berührungspunkte des ersten, C, D des zweiten, E, F des dritten. Es seien ferner die gemeinschaftlichen Tangenten innere wie in der Figur. Man hat dann

$$PA+PF=AF,\quad PD+PE=DE;$$

folglich, da $PF=PE$,

$$PA-PD=AF-DE;$$

da aber

$$PA-PD=PB-PC=BC;$$

so ist

$$AF-DE=BC.$$

Construirt man nun für die Kreise 3 und 1 die zweite innere gemeinschaftliche Tangente F_1A_1, ebenso für 3 und 2 die 2te E_1D_1, welche sich in P_1 schneiden, so hat man

$$P_1F_1+P_1A_1=A_1F_1,\quad P_1E_1-P_1D_1=D_1E_1;$$
$$P_1A_1+P_1D_1=A_1F_1-D_1E_1;$$

und da

$$A_1F_1=AF,\quad D_1E_1=DE,$$

also auch

$$A_1F_1-D_1E_1=BC,$$

so ist auch

$$P_1A_1+P_1D_1=BC,$$

d. h. P_1 muss wieder auf einer der inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise 1 und 2 liegen, dieses Mal zwischen den beiden Berührungspunkten. Diese kann nicht wieder die erste BC sein, wenn sich nicht die Kreise 1 und 2 selbst berühren.

Denn man nenne (Taf. IV. Fig. 6.) S und R die Durchschnittspunkte von FA und F_1A_1, und von ED mit E_1D_1, und

betrachte diese vier Tangenten. Wäre nun PP_1, die Diagonale des Vierecks $RPSP_1$, die gemeinschaftliche Tangente der Kreise 1 und 2 mit den Berührungspunkten B und C, so wäre

$$PB = \frac{1}{2}(PP_1 + PS + P_1S), PC = \frac{1}{2}(PP_1 + PR + P_1R)$$

und

$$PS + P_1S = P_1F_1 + SF - SF_1 - PF = P_1F_1 - PF = P_1E_1 - PE$$
$$= P_1E_1 + RE_1 - RE + PR = P_1R + RP;$$

also

$$PB = PC.$$

Es lässt sich aber die obige Schlussweise nicht auf jede Art gemeinschaftlicher Tangenten anwenden. Hätte man z. B. statt des Kreises 3 (Taf. III. Fig. 5.) den Kreis 4 mit den Berührungspunkten G und H, so hätte man

$$PG + PD = DG, \quad PA - PH = HA;$$

und wollte man nun $PG = PH$ verschwinden machen, so erhielte man

$$PD + PA = DG + AH,$$

welches keine Beziehung zwischen den Längen der von den Berührungspunkten begrenzten gemeinschaftlichen Tangenten BC, AH, DG ergibt. Eine solche findet überhaupt nur statt für entweder drei innere oder eine innere und zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten, wie die Betrachtung einer Figur mit Leichtigkeit lehrt. Somit hätten wir also folgenden

Lehrsatz 1. **Wenn drei innere gemeinschaftliche Tangenten dreier Kreise oder eine innere mit zwei äusseren einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so haben die drei anderen gemeinschaftlichen Tangenten derselben Art ebenfalls einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.**

In dem besonderen Falle, dass zwei solche Tangenten eine gerade Linie bilden, ist der Berührungspunkt als ihr Durchschnittspunkt zu betrachten. Z. B. Taf. IV. Fig. 7. Die äusseren Tangenten der Kreise 1 und 3, 2 und 3 fallen in die Gerade GH zusammen. Wenn nun die anderen äusseren Tangenten dieser Kreise GB, HD sich auf der inneren der Kreise 1 und 2 in P schneiden, so wird die andere innere von 1 und 2 durch den Berührungspunkt F gehen; denn

$$FA - FC = KB - DE = PB - PD = PL - PM = LM,$$

woraus nach dem Obigen die Behauptung sich ergibt.

Wir sprechen den hiermit erwiesenen Satz in Rücksicht auf unsere Aufgabe vorzugsweise für den folgenden besonderen Fall aus:

Lehrsatz 2. Wenn die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten (Taf. IV. Fig. 7.) des 1ten und 3ten, 2ten und 3ten dreier Kreise, *BK* und *DE*, sich auf der inneren des 1ten und 2ten *LM* schneiden, in *P*, während die anderen äusseren *AF*, *CF* eine gerade Linie bilden, so geht die andere innere durch den Berührungspunkt *F* des 3ten Kreises.

Wenn (Taf. IV. Fig. 8.) 4 durch denselben Punkt gehende Gerade (Strahlen) von zwei geraden Linien geschnitten werden, die erste in A und A_1, die zweite in B und B_1, die dritte in C und C_1, die vierte in D und D_1, so sind die aus den Abschnitten entsprechend gebildeten anharmonischen Verhältnisse einander gleich. Ein solches anharmonisches Verhältniss ist bekanntlich das Verhältniss von zwei Verhältnissen. Die Glieder des einen sind zwei von demselben Punkte ausgehende Abschnitte, die des anderen erhält man, wenn man den Ausgangspunkt in jenen mit dem noch übrigen vierten Punkte vertauscht. Die Figur ist leicht zu entwerfen. Es wäre demnach

$$\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} : \frac{D_1B_1}{D_1C_1}$$

oder

$$\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}, \quad \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A_1C_1}{A_1D_1} : \frac{B_1C_1}{B_1D_1}.$$

Der Beweis ist leicht zu führen, wenn wir ihn nicht als bekannt voraussetzen wollen. Nehmen wir z. B. die erste Gleichung.

$$\frac{\Delta SAB}{\Delta SAC} = \frac{AB}{AC}$$

wegen der gleichen Höhe; eben so

$$\frac{\Delta SDB}{\Delta SDC} = \frac{DB}{DC}, \quad \frac{\Delta SA_1B_1}{\Delta SA_1C_1} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}, \quad \frac{\Delta SD_1B_1}{\Delta SD_1C_1} = \frac{D_1B_1}{D_1C_1}.$$

Wegen der gleichen Winkel an der Spitze verhalten sich aber

$$\frac{\Delta SAB}{\Delta SA_1B_1} = \frac{SA.SB}{SA_1.SB_1}, \quad \frac{SAC}{SA_1C_1} = \frac{SA \cdot SC}{SA_1.SC_1}, \quad \frac{SDB}{SD_1B_1} = \frac{SD.SB}{SD_1.SB_1},$$
$$\frac{SDC}{SD_1C_1} = \frac{SD.SC}{SD_1.SC_1};$$

folglich

$$\frac{SAB}{SAC}:\frac{SA_1B_1}{SA_1C_1}=\frac{SA.SB}{SA.SC}:\frac{SA_1.SB_1}{SA_1.SC_1}=\frac{SB}{SC}:\frac{SB_1}{SC_1}$$

und

$$\frac{SDB}{SDC}:\frac{SD_1B_1}{SD_1C_1}=\frac{SD.SB}{SD.SC}:\frac{SD_1.SB_1}{SD_1.SC_1}=\frac{SB}{SC}:\frac{SB_1}{SC_1},$$

woraus die Behauptung sich ergibt.

Ob die Linien auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von S gezogen sind, ist ganz gleichgültig.— Offenbar kommt es nicht darauf an, dass die Strahlen SA und SA_1, SB und SB_1 u. s. w. in derselben geraden Linie zusammenliegen; die Strahlenbüschel können auch eine getrennte Lage haben, wenn sie sich nur zusammenlegen lassen, wenn also nur die entsprechenden Strahlen gleiche Winkel mit einander bilden. — Wenden wir nun diesen Satz auf 4 Tangenten eines Kreises an. Es seien (Taf. V. Fig. 9.) B und E die Berührungspunkte zweier von A ausgehenden Tangenten eines Kreises um M; eine dritte schneide AB in C, AE in G, eine vierte AB in D, AE in F; ziehe MA, MB, MC, MD, MG, MF, ME. Winkel $CMD=ACM-ADM$ $=\frac{1}{2}ACG-\frac{1}{2}ADF$; Winkel $GMF=\frac{1}{2}AFD-\frac{1}{2}AGC$. Es ist aber

$$ACG+AGC=ADF+AFD,$$

also auch

$$\frac{1}{2}ACG-\frac{1}{2}ADF=\frac{1}{2}AFD-\frac{1}{2}AGC,$$

also

$$CMD=GMF.$$

Ferner

$$DMB=90^0-\frac{1}{2}ADF,$$

$$FMA=\frac{1}{2}DAF+\frac{1}{2}DFA+ADF=90^0+\frac{1}{2}ADF,$$

so dass FMA = dem Winkel, den die Verlängerung von BM über M hinaus mit MD bildet. Endlich $AME=AMB$ oder auch der Winkel, den die Verlängerung von EM mit AM = dem, den die Verlängerung von BM mit AM bildet. Die beiden Strahlen-

büschel $MCDBA$ und $MGFAE$ lassen sich also in einen einzigen zusammenlegen, dass MC auf MG, MD auf MF, MB auf die Verlängerung von MA und MA auf die Verlängerung von ME fällt. Daher hat man zwischen den Abschnitten der von A ausgehenden Tangenten folgende Beziehung:

$$\frac{GE}{GF} : \frac{AE}{AF} = \frac{CA}{CD} : \frac{BA}{BD},$$

oder, da $AB = AE$:

$$GE.AF.CD = GF.CA.BD.$$

Beschreibt man nun einen Kreis, der DF, und AD in C, und einen zweiten, der CG, und AG in F berührt, mit den Mittelpunkten N und P, so ist

$$\frac{PF}{ME} = \frac{FG}{EG}, \quad \frac{NC}{MB} = \frac{CD}{BD};$$

und dies in obige Gleichung eingesetzt:

$$AF.ME.NC = AC.PF.MB,$$

oder da $MB = ME$:

$$AF.NC = AC.PF, \quad AF : FP = AC : CN;$$

woraus sich ergibt, dass Winkel $PAF = NAC$. Also

Lehrsatz 3. Wenn vier gerade Linien 1, 2, 3, 4 einen Kreis berühren und man beschreibt zwei Kreise, deren einer die Tangente 1 im Durchschnittspunkte mit 3, und Tangente 4, der andere 2 im Durchschnittspunkte mit 4, und Tangente 3 berührt, so bildet die vom Durchschnittspunkte der Tangenten 1 und 2 nach dem Mittelpunkte des ersten gezogene Linie mit der Tangente 1 denselben Winkel, wie die nach dem Mittelpunkte des zweiten gezogene mit der Tangente 2.

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur Malfattischen Aufgabe selbst. Sie heisst:

In ein Dreieck drei Kreise zu beschreiben, welche einander und einzeln je zwei Seiten des Dreiecks berühren.

Wir nennen im Folgenden die vorkommenden Kreise mit ihren Mittelpunkten.

Man denke sich in das Dreieck ABC drei Kreise beschrie ben α, β, γ, von denen α die Seiten AB und AC, β die Seiten BA und BC, γ die Seiten CA, CB berührt und die im Uebrigen so beschaffen seien, dass drei ihrer gemeinschaftlichen inneren Tangenten sich in einem Punkte P schneiden. Die der Kreise β und γ schneide ferner die Seite BC in k_1, die der Kreise γ und α schneide AC in l_1, die der Kreise α und β schneide AB in m_1. Man beschreibe drei Kreise, welche je zwei der 3 gemeinschaftlichen Tangenten von α, β, γ, und je eine Seite des Dreiecks berühren, und zwar jedesmal die Seite, welche von dem Kreise, an welchem jene zu gleicher Zeit Tangenten sind, nicht berührt wird; also einen Kreis a, welcher Pl_1, Pm_1 und BC, einen b, welcher Pm_1, Pk_1 und AC, einen c, welcher Pk_1, Pl_1 und AB berührt. Es haben dann die Kreise a und b die Linie Pm_1, b und c die Pk_1, c und a die Pl_1 zur gemeinschaftlichen inneren Tangente. Da demnach drei innere gemeinschaftliche Tangenten dieser Kreise a, b, c sich in demselben Punkte, in P schneiden, so werden auch die zweiten inneren gemeinschaftlichen Tangenten (nach Lehrsatz 1.) einen gemeinsamen Durchschnittspunkt haben. Er heisse S. Betrachtet man die Kreise a, b und γ, so zeigt sich, dass zwei äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente P zum gemeinsamen Durchschnittspunkte haben, nämlich die äussere von a und γ, die Verlängerung von Pl_1, die äussere von b und γ, Pk_1, die innere von a und b, Pm_1. Es werden also auch die anderen äusseren und die andere innere sich in demselben Punkte schneiden. Die zweite äussere von a und γ ist BC, von b und γ, AC, so dass also die zweite innere von a und b durch C gehen, SC sein muss. Auf gleiche Art ergibt sich, dass die zweite innere gemeinschaftliche Tangente von b und c, SA, von c und a, SB sein muss.

Es haben aber die ursprünglichen Kreise noch drei andere innere gemeinschaftliche Tangenten, welche sich ebenfalls in demselben Punkte schneiden müssen. Dieser Punkt heisse P_1 und es sei, der obigen Bezeichnung entsprechend, k der Punkt, in welchem BC von der an β und γ, l wo AC von der an γ und α, m wo AB von der an α und β getroffen wird. Man construire wieder drei Kreise, a_1 berührt von BC, P_1m und P_1l; b_1 berührt von AC, P_1m und P_1k; c_1 berührt von AB, P_1k und P_1l. Durch Anwendung derselben Schlüsse auf diese drei Kreise, wie oben auf a, b, c, ergibt sich, dass, da ihre ersten inneren gemeinschaftlichen Tangenten in P_1 zusammenlaufen, ihre zweiten ebenfalls in Einem Punkte zusammenlaufen müssen, den wir S_1 nennen; und dass diese zweiten S_1A, S_1B, S_1C sein müssen.

Ferner: a hat mit γ die gemeinschaftliche äussere Tangente Pl_1; mit β, Pm_1; die eine innere von γ und β, Pk_1 geht ebenfalls durch P; die anderen äusseren von a und γ, a und β fallen in die Gerade BC zusammen; also muss (nach Lehrsatz 2) die zweite innere von β und γ, P_1k, durch den Berührungspunkt von a mit BC gehen; k muss der Berührungspunkt von a mit BC sein. Hiernach ist es leicht zu zeigen, dass k_1 der Berührungspunkt von a_1 mit BC sein muss, so wie l von b, l_1 von b_1 mit AC, m von c, m_1 von c_1 mit AB.

Eine Anwendung des Lehrsatzes 3 auf den Kreis β z. B., mit den Kreisen c_1 und a, wo Bm_1, Bk, P_1k, Pm vier Tangenten von β sind, c_1 die Bm_1 in m_1, ausserdem P_1k; a die Bk in k, ausserdem Pm_1 berührt, zeigt man sogleich, dass $\angle aBk = c_1Bm_1$ oder $SBC = S_1BA$. Ebenso $SCB = S_1CA$, $SAC = S_1AB$.

Wären nun die ersten Kreise α, β, γ so genommen, dass

$$SCA = \frac{1}{2}ACB,\ SBC = \frac{1}{2}ABC,\ SAC = \frac{1}{2}CAB,$$

so würden SC und S_1C, SB und S_1B, SA und S_1A, S und S_1 zusammenfallen und damit auch die Kreise a und a_1, b und b_1, c und c_1. Es fiele dann aber auch Pl_1 mit P_1l zusammen, als zweite innere gemeinschaftliche Tangente der vereinigten Kreise a und a_1 mit den vereinigten b und b_1, deren erste SC, ferner Pk_1 mit P_1k, Pm_1 mit P_1m, P mit P_1. Somit wären die beiden inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise α und β, der Kreise α und γ, der Kreise β und γ jedesmal in eine zusammengefallen; die Kreise würden einander berühren. Hiermit sind wir bei der Striner'schen Auflösung unserer Aufgabe angelangt: Halbire die Winkel des Dreiecks, beschreibe in die dadurch entstandenen Dreiecke (*SAB*, *SBC*, *SCA*, wenn *SA*, *SB*, *SC* die die Winkel halbirenden sind) Kreise, construire ihre inneren gemeinschaftlichen Tangenten; diese werden die gemeinschaftlichen Tangenten der gesuchten Kreise sein.

V.

Discussion einer Curve der dritten Ordnung und Dreitheilung des Winkels mit Hülfe dieser Curve.

Von dem
Herrn Dr. J. R. Boyman,
Gymnasiallehrer zu Coblenz.

1.

Bezeichnen bei der Annahme eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems a und b zwei constante Geraden, die wir Parameter nennen wollen, so drückt die Gleichung

$$(x-a)x^2+(x+a)y^2=2bxy$$

eine Linie der dritten Ordnung aus, wie man sogleich ersieht, wenn man diese Gleichung nach der Veränderlichen x ordnet, wodurch man nämlich erhält:

$$x^3-ax^2-2bxy+xy^2+ay^2=0.$$

Wäre von den beiden Constanten die eine $b=0$, so gäbe die resultirende Gleichung

$$x^3-ax^2+xy^2+ay^2=0$$

immer noch eine Curve der dritten Ordnung, und die Form dieser Gleichung zeigt, dass die durch dieselbe dargestellte Curve zur Abscissenaxe symmetrisch liegt, also durch dieselbe in zwei congruente Zweige getheilt wird. — Wäre dagegen $a=0$, so erhielte man

$$x^2 - 2by + y^2 = 0,$$

die Gleichung eines Kreises (bezogen auf einen Punkt der Peripherie). — Wären endlich beide Constanten gleich Null, so ergäbe sich:

$$x^2 + y^2 = 0,$$

die Gleichung eines Punktes, des Anfangspunktes der Coordinaten.

2.

Gehen wir zur allgemeinen Gleichung zurück, um zunächst die Gestalt der durch dieselbe ausgedrückten Curve (Taf. 5. Fig. 10.) kennen zu lernen.

Setzt man zu dem Ende $x=0$, so ergiebt sich $y=0$, d. h. die Curve geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Dies war schon a priori daraus ersichtlich, dass in der obigen Gleichung kein constantes Glied enthalten ist.

Setzt man $x=a$, so erhält man $y=0$ und $y=b$, d. h. die Curve schneidet die Abscissenaxe in einem Punkte H in der Entfernung a vom Coordinaten-Anfang, und die auf die Abscissenaxe in H errichtete Senkrechte in in einem Punkte E in dem Abstande b von dieser Axe.

Die in der Gleichung vorkommende Constante a ist also vom Anfange der Coordinaten an auf der Abscissenaxe, die Constante b dagegen auf einer in der Entfernung a vom Coordinaten-Anfang zur Ordinatenaxe parallelen Geraden, und zwar von der Abscissenaxe an genommen. Die Gerade a ist der **Hauptparameter**, die Gerade b der Nebenparameter der Curve.

Setzt man $x=-a$, so ergibt sich $y=\frac{a^2}{b}$, d. h. die in der Entfernung $-a$ vom Anfang der Coordinaten zur Abscissenaxe errichtete Senkrechte begegnet der Curve nur in einem einzigen Punkte L, dessen Ordinate $y=\frac{a^2}{b}$.

3.

Setzt man $x=b$, so findet man $y=b$ und $y=\frac{b(b-a)}{b+a}$, d. h. die in der Entfernung $OB=b$ vom Coordinaten-Anfang zur Ordinatenaxe parallel gezogene Gerade schneidet die Curve in zwei Punkten K und D; für diesen ist die

Ordinate gleich der Abscisse, für jenen ist die Ordinate der vierten Proportionale zu der Summe beider Parameter, ihrer Differenz und dem Nebenparameter gleich.

Setzt man $x=-b$, so ergibt sich $y=b$ und $y=\frac{b(b+a)}{b-a}$, d. h. auch die in der Entfernung $OM=-b$ vom Coordinaten-Anfang zur Ordinatenaxe parallel gezogene Gerade schneidet die Curve in zwei Punkten J und N; auch hier ist für diesen die Ordinate gleich der Abscisse, während für jenen die Ordinate der vierten Proportionale zu der Differenz beider Parameter, ihrer Summe und dem Nebenparameter gleich ist.

Man wird bemerken, dass die Ordinaten der Punkte L und E, deren Abscissen dem Hauptparameter gleich, aber einander entgegengesetzt sind, sich wie die Quadrate des Haupt- und Nebenparameters, und dass die Ordinaten der Punkte J und R, deren Abscissen dem Nebenparameter gleich, jedoch auch einander entgegengesetzt sind, sich wie die Quadrate der Summe und der Differenz beider Parameter verhalten.

Setzt man $x=\pm\infty$, so ersieht man aus der in Beziehung auf y aufgelös'ten Gleichung

$$y=\frac{x(b\pm\sqrt{a^2+b^2-x^2})}{a+x},$$

dass y alsdann imaginär ist; auch erkennt man, dass y so lange imaginär sein wird, als

$$x>\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

ist: die Abscissen der Curve sind also immer kleiner als die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der beiden Parameter.

4.

Setzt man $y=0$, so ergibt sich $x=0$ und $x=a$: die Curve schneidet also die Abscissenaxe ausser im Anfangspunkt der Coordinaten noch in einem zweiten, auf der positiven Seite der Ordinatenaxe gelegenen Punkte H; die Abscisse dieses Punktes ist dem Hauptparameter gleich.

Setzt man $y=b$, so folgt $x=a$, $x=b$, $x=-b$, d. h. die Curve wird durch eine in dem Abstande b zur Abscissenaxe parallel gezogene Gerade in drei Punkten E

D, *N* geschnitten, von welchen der erste den Hauptparameter, die beiden andern (der eine auf der positiven, der andere auf der negativen Seite der Ordinatenaxe) den Nebenparameter zur Abscisse haben.

Setzt man $y = \pm n$, so ergibt sich:

$$x^3 - ax^2 + (n^2 \mp 2bn)x + an^2 = 0.$$

Da in dieser Gleichung eines ungeraden Grades das letzte Glied positiv ist, so hat dieselbe eine negative reelle Wurzel; die beiden andern Wurzeln der Gleichung werden für

$$n > \sqrt{\tfrac{1}{8}a^2 + b^2} \pm b,$$

wo $+b$ dem Werthe $+n$, und $-b$ dem Werthe $-n$ entspricht, imaginär; für kleinere Werthe von n sind beide, wie man aus dem doppelten Zeichenwechsel ersieht, beständig positiv und reell: die Curve hat demnach nur einen Zweig mit positiven Ordinaten und negativen Abscissen, und ebenso nur einen Zweig mit negativen Abscissen und zugleich negativen Ordinaten.

Setzt man endlich $y = \pm \infty$, so ergibt sich $x = -a$, d. h. die Curve erstreckt sich sowohl auf der positiven als auch auf der negativen Seite der Abscissenaxe, aber nur auf der negativen Seite der Ordinatenaxe in's Unendliche. Während aber die Ordinaten in's Unendliche wachsen, nähern sich die Abscissen einer endlichen Gränze, welche dem Hauptparameter gleich ist.

5.

Man lege durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine beliebige die Curve schneidende gerade Linie *OA*, welche den Nebenparameter *HE* oder dessen Verlängerung in dem Punkte *C* begegne. Die Gleichung einer solchen durch den Coordinaten-Anfang gehenden Geraden ist bekanntlich

$$y = \gamma . x.$$

Daher ist $CH = \gamma . a$, und da $EC = EH - CH$, so ist

$$EC = b - \gamma a. \qquad 1)$$

Seien ferner x_1 und y_1 die Ordinaten des Durchschnittspunktes *A* der Geraden *OA* mit der Curve, und sei *E* mit *A* verbunden, so ist

$$EA = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen, der Curve und der Geraden, in Beziehung auf diesen Durchschnittspunkt, nämlich:

$$x_1^3 - ax_1^2 - 2bx_1y_1 + x_1y_1^2 + ay_1^2 = 0,$$

$$y_1 = \gamma x_1,$$

findet man aber für die Coordinaten x_1 und y_1 des Durchschnittspunktes A folgende Werthe:

$$x_1 = \frac{a + 2b\gamma - a\gamma^2}{1 + \gamma^2}, \quad y_1 = \frac{a\gamma + 2b\gamma^2 - a\gamma^3}{1 + \gamma^2}.$$

Substituirt man diese in den obigen Wurzelausdruck von EA, so ergibt sich nach Ausziehung der Wurzel und einigen nöthigen Reductionen:

$$EA = b - \gamma a. \qquad 2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun, dass $EA = EC$, d. h. in Worten: Jede beliebige durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte gerade Linie schneidet den Nebenparameter oder dessen Verlängerung und die Curve in zwei Punkten, welche von dem Endpunkte E dieses Parameters gleich weit entfernt sind; — diese drei Punkte bilden also immer ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Scheitel der Punkt E ist.

Diese Eigenschaft der Curve, auf welche wir später noch zurückkommen werden, gibt uns zunächst ein leichtes Mittel an die Hand, dieselbe durch eine Reihe von Punkten zu construiren, und darnach hat dieselbe die Gestalt, wie Taf. V. Fig. 10. zeigt. Auch liesse sich wohl ein Instrument angeben, mittelst dessen man die Curve durch einen continuirlichen Zug beschreiben könnte, indem man beachtet, dass der Fusspunkt F der die Grundlinie AC des gleichschenkligen Dreieckes halbirenden Senkrechten EF in der über OE als Durchmesser beschriebenen Kreislinie liegt, dass also die Durchschnittspunkte der Curve und des Nebenparameters mit jeder durch den Coordinaten-Anfang gehenden geraden Linie OA, nämlich A und C, von dem Durchschnittspunkte dieser Kreislinie mit derselben stets gleich weit entfernt sind. — Dies weiter auszuführen, ist indess hier nicht unsere Absicht.

6.

Ist der Nebenparameter $b = 0$, so fällt der Punkt E mit dem Punkte H, und die Linie OE mit der Linie OH, dem Hauptparameter, zusammen. Alsdann hat man (Taf. V. Fig. 11.) ebenfalls $HR = HC$, und der Fusspunkt F des die Grundlinie RC des gleichschenkligen Dreiecks RHC halbirenden Perpendikels HF liegt hier immer auf der über dem Parameter a als Durchmesser beschriebenen Kreislinie. Daraus also folgt, dass die beiden Punkte R und C, in welchen eine beliebige durch den Anfang

der Coordinaten gehende gerade Linie diese spezielle Curve und die den Nebenparameter vertretende Senkrechte HE schneidet, wiederum von dem Durchschnittspunkte derselben mit dieser Kreislinie gleich weit entfernt sind.

7.

Bezeichnen v und w die Segmente, welche eine an die Curve gelegte Tangente resp. von der Abscissen- und Ordinatenaxe abschneidet, so ist bekanntlich:

$$v = x - y\frac{dx}{dy}, \quad w = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Durch Differentiation der allgemeinen Gleichung der Curve erhält man aber:

$$(3x^2 - 2ax - 2by + y^2)dx - (2bx - 2xy - 2ay)dy = 0.$$

Bildet man hieraus die Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{dy}{dx}$, und substituirt dieselben in die vorstehenden Formeln, so ergibt sich:

$$v = \frac{3x^3 - 2ax^2 - 4bxy + 3xy^2 + 2ay^2}{3x^2 - 2ax - 2by + y^2},$$

$$w = \frac{2ax^2 - 3x^3 + 4bxy - 3xy^2 - 2ay^2}{2bx - 2xy - 2ay}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken für y und x die Werthe, welche den Punkten der Curve in unendlicher Entfernung entsprechen, nämlich $y = \pm\infty$ und $x = -a$, so gehen dieselben in folgende über:

$$v = -a, \quad w = \pm\infty.$$

Die Curve hat also eine Asymptote, welche zu beiden sich in's Unendliche erstreckenden Zweigen gehört, es ist diejenige Gerade KL (Taf. V. Fig. 10. und 11.), welche auf der negativen Seite der Ordinatenaxe mit dieser in der Entfernung a parallel gezogen ist.

8.

Aus dem nachstehenden Ausdrucke des Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2ax - 2by + y^2}{2bx - 2xy - 2ay}$$

ergeben sich durch Substitution der entsprechenden Werthe von x und y für die trigonometrischen Tangenten der Berührenden in den Punkten E, H, D, N, in welchen die in der Entfernung a mit der Ordinatenaxe und in der Entfernung b mit der Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden die Curve schneiden, folgende Werthe:

$$\frac{b^2-a^2}{2ab},\quad \frac{a}{2b},\quad -\frac{b-a}{a},\quad -\frac{b+a}{a};$$

darnach lassen sich die Berührenden selbst leicht construiren. — Da nun ferner:

$$\frac{a}{2b}\cdot-\frac{b-a}{a}\cdot-\frac{b+a}{a}=\frac{b^2-a^2}{2ab},$$

so ergibt sich: das Product der trigonometrischen Tangenten der Berührenden für die einfachen Durchschnittspunkte H, D, N ist der trigonometrischen Tangente der Berührenden für den doppelten Durchschnittspunkt E gleich.

9.

Die Substitution der entsprechenden Werthe von x und y für den Anfangspunkt der Coordinaten lässt obigen Differentialquotienten unbestimmt. Wir differentiiren daher die Differentialgleichung der ersten Ordnung noch einmal, und indem man dx und dy constant annimmt, erhält man:

$$(a-3x)dx^2+2(b-y)dxdy-(a+x)dy^2=0,$$

aus welcher Gleichung sich sogleich ergibt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(b-y)\pm\sqrt{(a+x)(a-3x)+(b-y)^2}}{a+x}.$$

Setzt man hierin die dem Anfangspunkt der Coordinaten entsprechenden Werthe von x und y, nämlich $x=0$ und $y=0$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Dieser Ausdruck enthält aber zwei verschiedene Werthe: Die Curve wird demnach im Anfangspunkt der Coordinaten von zwei Geraden berührt, und dieser Punkt ist folglich ein doppelter Punkt, indem zwei Zweige der Curve sich in demselben durchschneiden.

Mit Hülfe der vorstehenden trigonometrischen Tangenten lassen sich die beiden Berührenden tt' und TT' im Anfangspunkt der Coordinaten leicht construiren, wobei wir also nicht verweilen.

Nimmt man das Product der beiden trigonometrischen Tangenten, so findet man:

$$\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} \times \frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{a} = -1,$$

d. h. die beiden Berührenden im Anfangspunkt der Coordinaten stehen senkrecht auf einander.

10.

Will man die Curve auf diese im Coordinaten-Anfang berührenden Geraden als Coordinatenaxen beziehen, so nehme man die bekannten Transformationsformeln und setze:

$$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \text{ und } y = y'\cos\varphi - x'\sin\varphi,$$

oder da man

$$\sin\varphi = \frac{b+c}{\sqrt{2c(b+c)}} \text{ und } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{2c(b+c)}}$$

findet, wo $c=\sqrt{a^2+b^2}$ gesetzt ist, die Ausdrücke:

$$x = \frac{ax'+(b+c)y'}{\sqrt{2c(b+c)}} \quad \text{und} \quad y = \frac{ay'-(b+c)x'}{\sqrt{2c(b+c)}}.$$

Substituirt man diese in die Gleichung der Curve

$$x^3 - ax^2 - 2bxy + xy^2 + ay^2 = 0,$$

so erhält man, indem man statt x' und y' wieder x und y schreibt, folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} (a^3+a(b+c)^2)x^3 + (a^2(b+c) + (b+c)^3)x^2y \\ -(a^3 - 2ab(b+c) - a(b+c)^2)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,x^2 \\ -2(a^2b+2a^2(b+c)-b(b+c)^2)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,xy \\ +(a^3-2ab(b+c)-a(b+c)^2)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,y^2 \\ +(a^3+a(b+c)^2)xy^2 + (a^2(b+c)+(b+c)^3)y^3 \end{array}\right\} = 0,$$

oder wie sich durch Entwicklung der Coefficienten ergibt:

$$\left.\begin{array}{r} 2ac(b+c)x^3+2c(b+c)^2x^2y \\ +4ab(b+c)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,x^2 \\ -4(a^2-b^2)(b+c)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,xy \\ +4ab(b+c)\sqrt{2c(b+c)}\,.\,y^2 \\ +2ac(b+c)xy^2+2c(b+c)^2y^3 \end{array}\right\}=0,$$

und diese Gleichung geht durch Ausscheidung des gemeinsamen Factors $2(b+c)$ endlich in die folgende über:

$$\left.\begin{array}{r} acx^2+c(b+c)x^2y+2ab\sqrt{2c(b+c)}x^2 \\ -2(a^2-b^2)\sqrt{2c(b+c)}\,xy \\ +2ab\sqrt{2c(b+c)}y^2+acxy^2+c(b+c)y^3 \end{array}\right\}=0.$$

Für den Fall, dass der Nebenparameter gleich Null ist, ergibt sich hieraus die Gleichung:

$$x^3+x^2y-2\sqrt{2}.\,axy+xy^2+y^3=0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dass die diesem besondern Falle entsprechende Curve (Taf. V. Fig. 11.) zu den im Anfangspunkt der Coordinaten berührenden Geraden als ihren Coordinatenaxen dieselbe Lage hat, und durch die gerade Linie OH, welche den von denselben gebildeten rechten Winkel halbirt, in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt wird.

11.

Man differentiire die allgemeine Gleichung der Curve, nämlich:

$$u=x^3-ax^2-2bxy+xy^2+ay^2=0$$

der Reihe nach in Beziehung auf x ung y, so erhält man:

$$\frac{du}{dx}=3x^2-2ax-2by+y^2,$$

$$\frac{du}{dy}=-2bx+2xy+2ay,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=2x+2a.$$

Setzt man den zweiten dieser Differentialquotienten gleich Null, so gibt die Gleichung $bx-xy-ay=0$ unmittelbar:

$$y=\frac{bx}{a+x}.$$

Wenn man diesen Werth von y in die obige Gleichung der Curve substituirt und entwickelt, so kommt

$$x^2-a^2-b^2=0, \text{ oder } x^2-c^2=0,$$

indem man wieder $a^2+b^2=c^2$ setzt, und hieraus ergibt sich:

$$x=\pm c, \text{ und folglich } y=\frac{bc}{c\pm a}.$$

Aus der bekannten Formel zur Bestimmung des Maximums und Minimums bei unentwickelten Functionen:

$$\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}=0$$

folgt nun ferner, wenn man für die Differentialquotienten ihre oben gefundenen Werthe in dieselbe einsetzt,

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{2(a+x)}{3x^2-2ax-2by+y^2}.$$

Diese Gleichung geht aber, je nachdem man $x=+c$ und $y=\frac{bc}{c+a}$, oder $x=-c$ und $y=\frac{bc}{c-a}$ setzt, in folgende über:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{2(c+a)^3}{(3c^2-2ac)(c+a)^2-2b^2c(c+a)+b^2c^2},$$

und

$$\frac{d^2x}{dy^2}=+\frac{2(c-a)^3}{(3c^2+2ac)(c-a)^2-2b^2c(c-a)+b^2c^2},$$

oder, indem man den Nenner entwickelt und reducirt:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{(c+a)^2}{c^3} \text{ und } \frac{d^2x}{dy^2}=+\frac{(c-u)^2}{c^3}.$$

Der Differentialquotient der zweiten Ordnung ist also für die einen Werthe von x und y negativ, für die andern positiv: die Abscisse $x=+c$, welcher die Ordinate $y=\frac{bc}{c+a}$ entspricht, ist demnach ein Maximum, die Abscisse $x=-c$, welcher die Ordinate $y=\frac{bc}{c-a}$ zugeordnet ist, ein Minimum.

12.

Bezeichnet man den zwischen dem Bogen der Curve, der Ordinate und der Abscissenaxe enthaltenen Flächenraum mit F, so hat man zur Bestimmung desselben die bekannte Formel

$$F=\int ydx.$$

Nun ist aber, indem man wiederum $a^2+b^2=c^2$ setzt,

$$ydx=\frac{x(b\pm\sqrt{c^2-x^2})\,dx}{a+x},$$

mithin

$$F=b\int\frac{xdx}{a+x}\pm\int\frac{xdx\sqrt{c^2-x^2}}{a+x}.$$

Aber es ist

$$\int\frac{xdx}{a+x}=bx-ab.\text{lognat.}(a+x)+\text{const.};$$

soll der Flächenraum für $x=0$ verschwinden, so muss const. $=ab.\text{lognat.}a$ sein.

Setzen wir ferner $a+x=u$, also $x=u-a$, so wird:

$$\int\frac{xdx\sqrt{c^2-x^2}}{a+x}=\int\frac{(u-a)du\sqrt{b^2+2au-u^2}}{u}$$
$$=\int\frac{(u-a)(b^2+2au-u^2)\,du}{u\sqrt{b^2+2au-u^2}}.$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung den Wurzelausdruck mit R so ist:

$$\int\frac{(u-a)(b^2+2au-u^2)du}{u\sqrt{b^2+2au-u^2}}$$
$$=b^2\int\frac{du}{R}+2a\int\frac{udu}{R}-\int\frac{u^2du}{R}$$
$$-ab^2\int\frac{du}{uR}-2a^2\int\frac{du}{R}+a\int\frac{udu}{R}.$$

Nun aber, wie vorhin $a^2+b^2=c^2$ gesetzt, ist:

$$\int\frac{u^2du}{R}=-\frac{1}{2}uR+\frac{1}{2}b^2\int\frac{du}{R}+\frac{3}{2}a\int\frac{udu}{R},$$

$$\int\frac{udu}{R}=-R+a\int\frac{du}{R},$$

$$\int\frac{du}{R}=\text{arc}.\sin\frac{u-a}{c},$$

$$\int\frac{bdu}{uR}=\log\text{nat}.\frac{b^2+au-bR}{cu}.$$

Mit Rücksicht hierauf findet man nach einigen Reductionen:

$$\int\frac{(u-a)(b^2+2au-u^2)du}{u\sqrt{b^2+2au-u^2}}$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\text{arc}.\sin\frac{u-a}{c}-ab\,\text{lognat}.\frac{b^2+au-bR}{cu}$$

$$+\frac{1}{2}(u-3a)R+\text{const.},$$

folglich, wenn man statt u den Werth $a+x$ wieder einsetzt:

$$\int\frac{dx\sqrt{c^2-x^2}}{a+x}$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\text{arc}.\sin\frac{x}{c}-ab.\text{lognat}.\frac{c^2+ax-b\sqrt{c^2-x^2}}{c(a+x)}$$

$$+\frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{c^2-x^2}+\text{const.}$$

Zur Bestimmung der Constante setze man $x=0$, wodurch sich ergibt:

$$\text{const.}=ab.\log\text{nat}\frac{c-b}{a}+ac.$$

Durch Zusammenfassung des Vorhergehenden erhält man nun allgemein für die von der Curve begränzte Fläche:

$$F=bx-ab.\text{lognat}\frac{a+x}{a}\pm ab.\text{lognat}\frac{c(c-b)(a+x)}{ac^2+a^2x-ab\sqrt{c^2-x^2}}$$

$$\pm\frac{1}{2}(b^2-a^2)\text{arc}.\sin\frac{x}{c}\pm\frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{c^2-x^2}\pm ac,$$

wobei zu bemerken, dass das Zeichen + auf die positiven resp. grössern Ordinaten, das Zeichen — auf die negativen resp. kleinern Ordinaten sich bezieht.

Für die spezielle Curve, wenn nämlich der Nebenparameter Null ist, geht diese Formel in die folgende über:

$$F' = \mp \frac{1}{2} a^2 \text{arc.} \sin \frac{x}{a} \pm \frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{a^2-x^2} \pm a^2.$$

Für den Inhalt des von der Curve gebildeten Foliums, den wir mit f bezeichnen wollen, findet man:

$$f = \frac{1}{2}(b^2-a^2)\pi + 2ab.\log\text{nat}\frac{c-b}{a} + 2ac,$$

und im Falle, dass der Nebenparameter gleich Null ist:

$$f' = \frac{1}{2}(4-\pi)a^2.$$

Hieraus ergibt sich (Taf. V. Fig. 11.):

1) Beschreibt man über dem Parameter a das Quadrat $OHEG$ und mit demselben Parameter a den Kreisquadranten HQG, so ist das halbe Folium $OHRO$ dem Streifen $HEGQH$ an Inhalt gleich.

2) Beschreibt man mit dem Parameter a um O als Mittelpunkt einen Kreis und um diesen ein Quadrat, so ist das Doppelfolium den vier durch die Kreislinie abgeschnittenen Ecken des Quadrates gleich.

Nimmt man $a=3$, $b=4$, $c=5$, resp. $b=0$, $a=c=3$, so findet man für das Folium f, so wie für das Folium f' die Werthe:

$$f = 15{,}05.. \qquad f' = 3{,}86..$$

13.

Die Gleichung des um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Radius $OE=c$ beschriebenen Kreises ist:

$$x^2+y^2=c^2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung der Curve, am einfachsten in folgender Gestalt:

$$(x-a)(x^2+y^2)=2y(bx-ay),$$

so erhält man zur Bestimmung der Durchschnittspunkte der Curve und des Kreises die beiden Gleichungen:

$$(x-a)c^2 = 2bx\sqrt{c^2-x^2} - 2a(c^2-x^2),$$

$$(a-\sqrt{c^2-y^2})c^2 = 2y(ay - b\sqrt{c^2-y^2});$$

oder wenn man entwickelt und nach den Potenzen der Veränderlichen ordnet:

$$4x^4 - 4ax^3 - 3c^2x^2 + 2ac^2x + a^2c^2 = 0,$$

$$4y^4 - 4by^3 - 3c^2y^2 + 4bc^2y - b^2c^2 = 0.$$

Diese Gleichungen sind vom vierten Grade: die Curve wird also von der Kreislinie in vier Punkten geschnitten, welche, wie sich leicht zeigen lässt, alle vier reell sind. Denn da eine Wurzel der vorstehenden Gleichungen resp. a und b ist, so ergeben sich die drei andern Wurzeln resp. aus den Gleichungen:

$$4x^3 - 3c^2x - ac^2 = 0,$$

$$4y^2 - 3c^2y + bc^2 = 0.$$

Da nun hierin das zweite Glied negativ, überdies $c > a$ und $c > b$, also

$$4\left(\frac{3}{4}c^2\right)^3 > 27\left(\frac{1}{4}ac^2\right)^2$$

und

$$4\left(\frac{3}{4}c^2\right)^3 > 27\left(\frac{1}{4}bc^2\right)^2,$$

so hat jede dieser Gleichungen drei reelle Wurzeln, und zwar hat die erstere Gleichung zwei negative und eine positive, die zweite Gleichung eine negative und zwei positive Wurzeln. Setzt man $\cos\varphi = \frac{a}{c}$ und $\cos\psi = \frac{b}{c}$, so sind dieselben:

$$+c.\cos\frac{1}{3}\varphi, \quad -c.\cos(60^0 - \frac{1}{3}\varphi), \quad -c.\cos(60^0 + \frac{1}{3}\varphi);$$

$$-c.\cos\frac{1}{3}\psi, \quad +c.\cos(60^0 - \frac{1}{3}\psi), \quad +c.\cos(60^0 + \frac{1}{3}\psi).$$

Die Wurzeln der ursprünglichen Gleichungen sind also alle vier reell, und der Kreis schneidet demnach die Curve **in vier reellen Punkten**, deren Abscissen und Ordinaten, wenn man berücksichtigt, dass hier immer $\frac{1}{3}\varphi$ resp. $\frac{1}{3}\psi < 60^0 - \frac{1}{3}\varphi$ resp. $60^0 - \frac{1}{3}\psi$, und dass immer $x^2 + y^2 = c^2$ ist, sich folgendermassen zusammen ordnen:

$x' = +a$ $\qquad\qquad$ $y' = +b$

$x'' = +c.\cos\frac{1}{3}\varphi$ $\qquad\qquad$ $y'' = +c.\cos(60^0 + \frac{1}{3}\psi)$

$$x''' = -c.\cos(60^0 - \frac{1}{3}\varphi) \qquad y''' = +c.\cos(60^0 - \frac{1}{3}\psi)$$

$$x'''' = -c.\cos(60^0 + \frac{1}{3}\varphi) \qquad y'''' = -c.\cos\frac{1}{3}\psi.$$

Wie man aus den Vorzeichen ersieht, liegen immer zwei Durchschnittspunkte im ersten, einer im zweiten, und einer im dritten Quadranten.

Für den Fall, dass $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, ergeben sich für dieselben folgende Werthe:

$$x' = +3 \qquad y' = +4$$
$$x'' = +4{,}76304.. \qquad y'' = +1{,}5210..$$
$$x''' = -3{,}69874.. \qquad y''' = +3{,}36441..$$
$$x'''' = -1{,}06429... \qquad y'''' = -4{,}88541..$$

14.

Nach den in den vorhergehenden Paragraphen gemachten Erörterungen werden wir jetzt im Stande sein zu zeigen, wie man mit Hülfe unserer Curve in Folge der §. 5. angegebenen Eigenschaft die Trisection jedes beliebigen Winkels vornehmen kann.

Sei nämlich ein beliebiger Winkel gegeben, dessen Scheitelpunkt O (Taf. V. Fig. 10.), so falle man von irgend einem Punkte E des einen Schenkels auf den andern oder dessen Verlängerung eine Senkrechte EH, construire zu OH als Hauptparameter und HE als Nebenparameter nach §. 5. die Curve *NORDEOS* und beschreibe mit OE als Radius um O einen Kreis, welcher, wie wir gesehen haben, die Curve ausser in E noch in drei Punkten A, A', A'' schneidet. Man verbinde diese mit O und verlängere nöthigenfalls, wodurch man die Durchschnittspunkte C, C', C'' auf dem Nebenparameter erhält, und ferner verbinde man E mit den Punkten A, A', A''. Alsdann sind nach §. 5. die Dreiecke EAC, $EA'C'$, $EA''C''$ gleichschenklich, mithin die folgenden Dreiecke paarweise einander ähnlich:

$$\Delta OAE \sim \Delta EAC, \quad \Delta OA'E \sim \Delta EA'C', \quad \Delta OA''E \sim \Delta EA''C'',$$

da sie gleichschenklich sind, und jedes Paar den Winkel an der Grundlinie, resp. $\angle EAC$ oder $\angle EA'C'$ oder $\angle EA''C''$, gemeinsam hat; daher ist

$$\angle AEC = \angle EOA, \quad \angle A'EC' = \angle EOA', \quad \angle A''EC'' = \angle EOA''.$$

Ebenso, wenn man aus E die Senkrechten EF, EF', EF'' fällt, sind die folgenden rechtwinklichen Dreiecke paarweise ähnlich:

$$\Delta COH \sim \Delta CEF, \quad \Delta C'OH \sim \Delta C'EF', \quad \Delta C''OH \sim \Delta C''EF''.$$

Daraus ergibt sich nun:

$$\angle AOP = \angle COH = \angle CEF = \frac{1}{2}\angle AEC = \frac{1}{2}\angle EOA;$$

$$\angle A'OP' = \angle C'OH = \angle C'EF' = \frac{1}{2}\angle A'EC' = \frac{1}{2}\angle EOA';$$

$$\angle A''OP' = \angle C''OH = \angle C''EF'' = \frac{1}{2}\angle A''EC'' = \frac{1}{2}\angle EOA'';$$

$$\angle A'''OP = (2R - C'''OH) = (2R - C'''EF''') = \frac{1}{2}(4R - A'''EC''')$$
$$= \frac{1}{2}(4R - EOA''').$$

Hieraus folgt nun:

$$\angle AOP = \frac{1}{3}\angle EOP \ldots\ldots (\angle EOP > 0^0 \text{ und } < 1R),$$

$$\angle A'OP' = \frac{1}{3}\angle EOP' \ldots\ldots (\angle EOP' > 1R \text{ und } < 2R),$$

$$\angle A''OP' = \frac{1}{3}\text{conv.}\angle EOP' \ldots\ldots (\text{conv.}\angle EOP' > 2R \text{ und } < 3R),$$

$$\angle A'''OP = \frac{1}{3}\text{conv.}\angle EOP \ldots\ldots (\text{conv.}\angle EOP > 3R \text{ und } < 4R).$$

Demnach ist also vollständig gezeigt, wie vermittelst unserer Curve jeder beliebige Winkel, sei er ein spitzer oder ein stumpfer oder ein erhabener, in drei gleiche Theile getheilt werden kann.

Da

$$\angle AOP = \frac{1}{3}\angle EOP \text{ und } \angle A'''OP = \frac{1}{3}\text{conv.}\angle EOP,$$

ferner

$$\angle A'OP' = \frac{1}{3}\angle EOP' \text{ und } \angle A''OP' = \frac{1}{3}\text{conv.}\angle EOP';$$

so ergibt sich endlich noch, dass in den Punkten A, A', A'' (Taf. V. Fig. 10. und 11.) die ganze Kreisperipherie in drei gleiche Theile getheilt ist.

VI.

Nachtrag zu dem Aufsatze in Thl. XIII. Nr. XXXIII.

Von

Herrn Theodor Lange

zu Berlin.

Bevor ich der öffentlichen Aufforderung des Hrn. Prof. Grunert nachkomme, und den in dem Crelle'schen Journal erschienenen Beweis des Hrn. Prof. Steiner, dessen in der Nachschrift zu dem Aufsatze Thl. XIII. Nr. XXXIII. Erwähnung gethan wird, mittheile, muss ich auf einen Irrthum aufmerksam machen, der sich bei Aufstellung des allgemeinen Satzes in erwähntem Aufsatze eingeschlichen hat. Der daselbst geführte Beweis stützt sich nämlich auf Eigenschaften der Figur, welche von der dort angenommenen Lage der Winkel a und b abhängen und bei anderer Lage nicht stattfinden. Es kann demnach nur folgender Satz allgemein aufgestellt werden: Wird eine Gerade von zwei Strahlen geschnitten, und ist die Linie, welche aus dem Schnittpunkt des Einen auf den Andern gezogen wird, gleich der Linie, welche aus dem Schnittpunkt des Andern auf den Ersteren gezogen ist, so sind die Gegenwinkel, unter denen jene Strahlen die Gerade schneiden, einander gleich, wenn jene gleichen Linien diese Winkel in gleichen Verhältnissen schneiden.

Nach der Bemerkung, welche der Herr Professor Steiner seinem Aufsatze „Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und sphärische Dreieck" im 28. Bande des Crelle'schen Journals vorausschickt, kam demselben im Jahre 1840 von Herrn

Professor Lehmus folgende Aufgabe zu, mit der Bitte „eine rein geometrische Lösung derselben zu finden."

„Wenn in einem geradlinigen Dreieck die zwei Geraden, welche dessen Winkel an der Grundlinie hälften und die bis an die Gegenseiten verlängert genommen werden, gleich lang sind, so ist die Frage, ob dann das Dreieck gleichschenklig sei?" —

Darauf habe er folgende Lösung dem Hrn. Professor Lehmus mitgetheilt, die er unter anderen desshalb veröffentliche, da ein grosser Kenner der Geometrie, Herr Sturm, der von seinen Zuhörern und Andern verschiedene Lösungen besässe, die Seinige für die elementarste gehalten habe.

Ueber die Schwierigkeit der erwähnten Aufgabe sagt der Herr Professor Steiner in demselben Aufsatze: „die Schwierigkeit, welche die Aufgabe darbietet, mag ihren Grund darin haben, dass die eine Voraussetzung nicht so absolut bestimmt ist, wie man auf den ersten Blick leicht glauben möchte, denn wenn gesagt wird „die Winkel an der Grundlinie werden gehälftet", so ist dies sowohl auf die innern als auf die äussern Winkel an der Grundlinie anzuwenden, was dann im Wesentlichen drei verschiedene Fälle giebt, indem nämlich, wenn man die bis an die Gegenseiten verlängerten Strahlen, welche die inneren Winkel hälften, durch a und b und diejenigen, welche die äusseren Winkel hälften, durch a_1 und b_1 bezeichnet, entweder

$$1)\ a=b,\ 2)\ a_1=b_1,\ 3)\ a_1=b \text{ oder } a=b_1$$

angenommen werden kann.

Im ersten Falle Taf. VI. Fig. 1., wo also die inneren Winkel gehälftet werden, würde die Annahme, dass die Winkel α und β ungleich wären, etwa $\alpha > \beta$, einmal zu dem Schluss führen, dass der Winkel ADB, nämlich $2R-(\alpha+2\beta)$, grösser sei als der Winkel BEA, nämlich $2R-(\beta+2\alpha)$. Andererseits aber folgt aus derselben Annahme, wenn man das Dreieck AEB so an das Dreieck BDA legt, dass A in B, B in A und E in E_1 fällt, dass, da $DB > AE = BE_1$ wäre, $y > x$ sein müsste, mithin, da $n=m$ ist, der Winkel $x+n$ kleiner sein, als $y+m$, oder Winkel ADB kleiner als der Winkel BEA. Dieser Widerspruch zeigt die Unrichtigkeit der Annahme und dass unter obiger Bedingung das Dreieck gleichschenklig ist.

„Im zweiten Falle, wo also die äusseren Winkel gehälftet „werden, kommt es noch auf eine nähere Untersuchung an, ob „nämlich α) beide Strahlen a_1 und b_1 die verlängerten Gegensei„ten jenseits der Spitze C oder beide dieselben unterhalb der „Grundlinie AB treffen, oder ob β) der eine die Gegenseite jen„seits der Spitze und der andere sie unterhalb der Grundlinie „trifft. Unter der Bedingung α) ist das Dreieck gleichschenklig, „dagegen unter β) nicht."

Denn wenn Taf. VI. Fig. 2. die Aussenwinkel gehälftet sind, und die Strahlen a_1 und b_1 die Gegenseiten jenseits der Spitze

C treffen, so führt die Annahme, dass die Winkel α und β nicht gleich wären, etwa $\alpha > \beta$, einerseits zu dem Schlusse, dass der Winkel DAB, nämlich $2R - \alpha_1$, kleiner als der Winkel EBA, nämlich $2R - \beta_1$, also dass $DB > AE$ sein müsste. Andererseits folgt, da $y > x$ ist, bei derselben Construction wie oben, dass der Winkel $E_1DB < DE_1B$, also $DB > BE_1$ oder $DB > AE$. — Dieser Widerspruch zeigt die Unrichtigkeit obiger Annahme und dadurch, dass das Dreieck gleichschenklig ist.

„Wenn dagegen beide Strahlen a_1 und b_1 den Gegenseiten „unterhalb der Grundlinie begegnen, wie in Taf. VI Fig. 3., so „scheint der Beweis nicht auf analoge Weise Statt zu finden.“ Daher giebt der Herr Professor **Steiner** folgenden minder einfachen Beweis.

Aus der Annahme, dass α und β ungleich wären, etwa $\alpha > \beta$, folgt $BF > AF$, und daraus $FD > FE$. Man nehme (Taf. VI. Fig. 3.) $FG = FA$ und $FH = FE$ und ziehe GH, so ist, wegen der Congruenz der Dreiecke HFG und EFA, der Winkel $\alpha_2 = \alpha_1$ also $\alpha_2 > \beta_1$, woraus folgt, dass die Gerade GH der Seite CB jenseits D, etwa in K, begegnet, und zwar unter einem Winkel $\gamma = \alpha_2 - \beta_1 = \alpha - \beta = 2\varepsilon$, denn $\alpha - \varepsilon = AGF = \beta + \varepsilon$. — Da der Winkel α_1, also auch $\alpha = C + D$ ist, so ist $\alpha > D$, also $BD > AB$. Nimmt man $BL = BA$, so wird BAG und BGC congruent, also $\varepsilon = \varepsilon_1$. Da aber $\varepsilon_1 > \gamma$ ist, so ist auch $\varepsilon > \gamma$, was dem Obigen $2\varepsilon = \gamma$ widerspricht. Es muss also $\alpha = \beta$ angenommen werden, woraus folgt, dass das Dreieck ACB gleichschenklig sein muss.

„Im dritten Falle, wo also ein innerer und ein äusserer Win- „kel an der Grundlinie gehälftet wird, ist das Dreieck nicht „gleichschenklig. (Nur scheint die Möglichkeit vorhanden zu sein, „dass es in ganz besonderem Falle gleichschenklig sein kann, „wobei es dann aber ein der Form nach ganz bestimmtes Dreieck „ist, d. h. bestimmte Winkel hat*). — Da nun die Aufgabe alle

---

*) Sollte das Dreieck ACB (Taf. VI. Fig. 5) gleichschenklig sein, während $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ ist, so folgt, wenn $\delta = \alpha$ gemacht wird,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{2R - a}{2a + \alpha},$$

denn

$$\beta = a + E_1 = a + E = 2a + \delta = 2a + \alpha.$$

Für $\alpha = \frac{1}{n} a$ findet man

$$a = \frac{R}{n+1}.$$

Wenn also zwischen den Grössen a und n diese Gleichung besteht. ist das Dreieck gleichschenklig. Ist $n = 2$, also, wenn die Winkel gehälftet sein sollen, so muss

„diese Fälle für die Rechnung stillschweigend zugleich umfasst, „so begreift man, wie diese, wenn sie nicht geschickt angegriffen „wird, auf höhere Gleichungen führen muss."

Für die Lage Taf. VI. Fig. 1. und 2. lässt sich auf dieselbe Weise wie oben zeigen, dass auch in dem Falle, wo die Winkel nur unter gleichem Verhältniss getheilt werden, das Dreieck gleichschenklig sei. Für Taf. VI. Fig. 3. ist aber der Beweis dem Obigen nicht analog zu führen, uud auch kein anderer Beweis für diesen Fall gegeben.

Die Untersuchung geht nun noch auf das sphärische Dreieck (Taf. VI. Fig. 4.) über, für den Fall, dass die Winkel gehälftet sind. „Es wird „gezeigt, dass, wenn die Winkel ungleich genommen würden, etwa „$\alpha > \beta$, so auch $BF > AE$ und daher $FD > FE$ wäre. Nimmt „man nun $FG = FE$ und $FH = FA$, so sind die Dreiecke AFE „und HFG symmetrisch gleich, also $x_1 = x$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. Da das „Dreieck BFD grösseren Inhalt hat, als das Dreieck HFG, so „muss auch die Winkelsumme grösser sein als die des letzteren. Den „Winkel bei F haben sie gemein und von den übrigen ist $\alpha_2 > \beta_1$ „(weil $\alpha_2 = \alpha_1 > \beta_1$); daher muss Winkel $y > x_1$ und somit auch „$y > x$ sein. Da ferner die Dreiecke BAD und ABE zwei Paar „gleiche Seiten und dazwischen die ungleichen Winkel $\alpha > \beta$ haben, „so ist Seite $d > e$ (d. i. $BD > AE$). Man denke sich nun das „Dreieck ABE in der Lage von BAE_1, wo nämlich Winkel $x_2 = x$, „$\gamma = \alpha + \alpha_1$, Seite $e_1 = e$ ($BE_1 = AE$) etc. ist, so wird man — falls „der Winkel $DBE_1 = \gamma + \beta + \beta_1 < \pi$, d. h. falls die Summe der „Winkel an der Grundlinie AB im gegebenen Dreieck ACB kleiner „als zwei Rechte ist — durch Hülfe des Hauptkreisbogens „DE_1 auf ganz gleiche Weise wie oben bei Taf. VI. Fig. 2. auf den „Widerspruch geführt, dass $e_1 > d$, also $e > d$ sein müsste; woraus „sodann auf die Gleichheit von α und β und daraus auf die „Gleichheit von AC und BC geschlossen wird."

„Für die andere, allgemeinere Aufgabe, wo die Winkel an der „Grundlinie, statt gehälftet, in irgend einem gleichen Verhältniss „getheilt werden, folgt auf gleiche Weise, dass das Dreieck gleich„schenklich sein muss, falls die Summe der beiden Winkel an „der Grundlinie kleiner als zwei Rechte ist."

„Wenn dagegen die Summe der Winkel an der Grundlinie „grösser als zwei Rechte ist, so wird der Beweis für beide Auf„gaben unbrauchbar. — Ich begnüge mich, — schliesst der Herr „Professor Steiner seinen Aufsatz — mit dieser Andeutung und „überlasse es den Liebhabern, die vollständige, aber möglichst „elementare Lösung aufzufinden."

$$a = \frac{1}{3} R = 30^\circ$$

sein.

Durch die Freundlichkeit des Herrn Professor Lehmus bin ich in den Stand gesetzt, folgende, von ihm gefundene Beweise des einfachen Satzes mitzutheilen.

„*Lehrsatz.* Wenn die, zwei Winkel eines Dreiecks „halbirenden Transversalen einander gleich sind, so „sind es auch die halbirten Winkel, d. h. das Dreieck „ist gleichschenklich, oder (Taf. VI. Fig. 1.):

Voraussetzung: $EAD = DAB$

$DBE = EBA$

$AD = BE$

Behauptung: $EAD = DBE$.

„I. Beweis. Aus der Annahme $EAD > DBE$ würde folgen

$$FAD = DBE$$

„und hieraus (durch Addition)

1) $BAF > ABD$;

2) die vier Punkte A, F, D, B liegen in der Peripherie dessel- „ben Kreises. Da nun aber in Folge der Voraussetzung BAF „$< 90^0$, so entstünde $BF > AD$ und um so mehr $BE > AD$, als „Widerspruch gegen die dritte Voraussetzung.

„II. Beweis durch Calcul.

„Man nenne die Dreiecksseiten a, b, c und die halbirenden „Transversalen d.

Aus

$$ac = d^2 + \frac{ab^2c}{(a+c)^2},$$

$$bc = d^2 + \frac{ab^2c}{(b+c)^2}$$

„folgt, wenn d eliminirt wird,

$$(a+b+c)c(a-b)[c^3+(a+b)(ab+c^2)+3abc] = 0;$$

„welcher Gleichung nur durch $a-b=0$ Genüge geschieht."

Was den Satz in Betreff des sphärischen Dreiecks betrifft, so lässt sich der Beweis ganz in derselben Art, wie ich ihn beim

ebenen Dreleck gegeben habe, führen, wenn man nämlich bedenkt, dass alle Ebenen, die durch den Schenkel eines Winkels gehen und auf denen Linien liegen, welche mit dem andern Schenkel einen Winkel von der bestimmten Grösse ϱ bilden, den Kegel schneiden, dessen Axe der andere Schenkel, und dessen Erzeugungswinkel ϱ ist. Denkt man demnach um jeden Schenkel eines Winkels einen Kegel mit demselben Erzeugungswinkel ϱ und aus dem einen Schenkel (A) eine Schnittebene durch den Kegel des andern Schenkels (B), und die Ebenen zwischen je einer Schnittlinie und der Axe des zugehörigen Kegels, während man sich vorstellt, dass eine Ebene aus dem Schenkel (B) sich um B um 360° drehe, und dass fortwährend die Ebenen durch die Schnittlinien (derselben mit dem Kegel (A)) und dessen Axe gelegt werden; so lassen sich in Bezug der Neigungswinkel der erwähnten Ebenen gegen die Ebene des ursprünglichen Winkels dieselben Schlüsse anwenden wie im obigen Beweise.

Im Allgemeinen braucht wohl nicht erst darauf hingewiesen zu werden, dass die in den Figuren zu meinem Beweise vorkommenden Kreise nur gebraucht wurden, um der Vorstellung mehr Halt zu geben, und dass, wie in einer zweiten Bearbeitung*) geschehen, nur die elementarsten Lehrsätze der Geometrie benutzt sind. — Ferner möchte die von mir gegebene Beweisführung vielleicht desshalb einige Beachtung verdienen, da sie direct zu Werke geht und ein einheitliches Ganze bildet.

---

*) Diese zweite Bearbeitung soll auf den Wunsch des Herrn Vfs. in einem der nächsten Hefte des Archivs noch mitgetheilt werden, da jetzt kein Raum dazu war, und ich nur zuerst verschiedene Beweisarten mittheilen wollte. G.

VII.

Die continuirliche Function und ihre Abgeleiteten.

Von

Herrn Professor Franke,

zweitem Director der polytechnischen Schule zu Hannover.

In den Exercices d'Analyse tome II. p. 54. sagt Cauchy: die Function fx kann nach Maclaurins Formel in eine convergente Reihe nach den aufsteigenden Potenzen von x entwickelt werden, wenn der Modul der reellen oder imaginären Variabeln x einen kleineren Werth behält als der, für welchen die Function (oder deren erste Abgeleitete) aufhört, continuirlich zu sein. In dieser Gestalt hatte schon früher Cauchy den Satz aufgestellt, jedoch ohne den in der Klammer stehenden Zusatz beizufügen. Der Satz ist von grosser Wichtigkeit, weil er die Anwendbarkeit der gedachten Reihe an eine klare, feste Bestimmung knüpft. Indessen scheint er nicht richtig zu sein, und ohne die Gründe für diese Behauptung vorzuführen, welche in Cauchy's Beweise selbst liegen, will ich vielmehr direct die Grenzen der Anwendbarkeit der Reihe dadurch versuchen, dass ich in der ersten Nummer die doppelte Form des Differentials, in der zweiten die Beziehung der continuirlichen Function zu ihren Abgeleiteten, und in der dritten die Reihe Maclaurins selbst entwickele.

1.

Es sei Fx eine Function von x, die zwischen x_1 und x_1+h entweder nur zunimmt oder nur abnimmt und die zwischen denselben Grenzen continuirlich bleibt, d. h. die um unendlich kleine Grössen derselben oder einer höhern Ordnung zu- oder abnimmt, als die Veränderliche x selbst. Das Differential der Function ist

$$F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'x,$$

wenn α eine unendlich kleine Zunahme bedeutet. Diese Gleichung ist aber nur genau bis auf das Unendlich-Kleine der zweiten Ordnung, so dass vollständig dafür zu setzen ist

$$1) \qquad F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'x+\alpha^2 k_1,$$

wenn k_1 eine endliche Zahl bezeichnet, und x zwischen den angegebenen Grenzen liegt. Lässt man nun x immer um die unendlich kleine Grösse α zunehmen, bis sie den Werth $x+h$ erhält, so entstehen die streng wahren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
F(x+\alpha)-Fx&=\alpha F'x+\alpha^2 k_1,\\
F(x+2\alpha)-F(x+\alpha)&=\alpha F'(x+\alpha)+\alpha^2 k_2,\\
\vdots \qquad\quad \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
F(x+[n-1]\alpha)-F(x+[n-2]\alpha)&=\alpha F'(x+[n-2]\alpha)+\alpha^2 k_{n-1},\\
F(x+n\alpha)-F(x+[n-1]\alpha)&=\alpha F'(x+[n-1]\alpha)+\alpha^2 k_n;
\end{aligned}$$

in welchen die Grössen $k_2, \ldots k_{n-1}, k_n$ dieselbe Bedeutung beibehalten als k_1. Addirt man diese Gleichungen und ordnet rechts nach Grössen derselben Art, so erhält man

$$2) \qquad \begin{aligned}F(x+n\alpha)-F\alpha=\alpha\{F'x+F'(x+\alpha)+..+F'(x+[n-2]\alpha)+F'(x+[n-1]\alpha)\}\\
+\alpha^2\{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+k_n\},\end{aligned}$$

eine Gleichung, welche wie Gleichung 1) streng richtig ist.

Offenbar giebt es einen Werth von x, der zwischen x und $x+n\alpha$ liegt, nemlich $x+m\alpha$, für welchen $F'(x+m\alpha)$ das arithmetische Mittel der Glieder der Reihe

$$F'x,\ F'(x+\alpha), \ldots F'(x+[n-2]\alpha),\ F'(x+[n-1]\alpha)$$

bedeutet, wenn m eine ganze oder gebrochene Zahl bezeichnet, die zwischen Null und n liegt. Wenn nun m eine Bruchzahl $\frac{s}{r}$, zwischen den Ganzzahlen p und $p+1$ gelegen, ist, so dass die Reihenfolge der Zahlen

$$p,\ p+\frac{s}{r},\ \ p+1$$

statt findet, so kann man immer die Zunahme α mit der kleineren $\frac{\alpha}{r}$ vertauschen, weshalb die Reihenfolge zwischen p und $p+1$ in die Reihe der ebenfalls ganzen Zahlen

$$rp,\ rp+1, \ldots rp+s,\ rp+s+1, \ldots rp+r$$

übergeht, und es ist klar, dass die Gleichung 1), folglich auch Gleichung 2), für kleinere α gültig bleibt.

Auf gleiche Weise wird es einen Mittelwerth k_q der Grössen

$$k_1, k_2, \ldots k_{n-1}, k_n$$

geben, für welche der Zeiger q zwischen 0 und n liegt.

Werden nun diese Mittelwerthe mit n multiplicirt und in Gleichung 2) eingeschaltet, so entsteht

$$F(x+n\alpha)-Fx=n\alpha F'(x+m\alpha)+n\alpha^2 k_q,$$

oder, wenn man $n\alpha$ mit h vertauscht,

$$3) \qquad F(x+h)-Fx=h\{F'(x+m\alpha)+\alpha k_q\}.$$

In dieser Gleichung ist k_q von der Veränderlichen x, sowie von der Form der Function Fx abhängig; es wird daher immer einen Werth $x+\mu\alpha$ geben, für welchen

$$F'(x+\mu\alpha)=F'(x+m\alpha)+\alpha k_q$$

besteht. Hier bedeutet μ wieder eine Zahl zwischen Null und n; denn $F'(x+m\alpha)$ ist von $F'(x+\mu\alpha)$ um die unendlich kleine Zahl αk_q verschieden, man kann daher αk_q als das Differential

$$F(x+m\alpha)-F(x+m\alpha-\beta)$$

ansehen, in welcher Differenz die unendlich kleine Zahl β so gewählt werden kann, dass die Gleichung

$$F(x+m\alpha)-F(x+m\alpha-\beta)=\alpha k_q$$

in aller Strenge bestehe, dass daher

$$F'(x+m\alpha)+\alpha k_q$$

in die Differenz

$$F(x+[m+1]\alpha)-F(x+m\alpha-\beta),$$

das ist in

$$(\alpha+\beta)\,F'(x+m\alpha-\beta),$$

und die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{F(x+[m+1]\alpha)-F(x+m\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}=F'(x+m\alpha-\beta)$$

in

$$F'(x+\mu\alpha)$$

übergeht, wenn man $m\alpha - \beta$ mit $\mu\alpha$ vertauscht. Die Gleichung 3) verwandelt sich sonach in

$$4) \qquad F(x+h) - Fx = hF'(x+\mu\alpha).$$

Schreibt man endlich $\Delta . n\alpha$ oder Δh statt $\mu\alpha$, so bedeutet $\Delta = \frac{\mu}{n}$ einen ächten Bruch, und aus Gleichung 4) entsteht

$$5) \qquad F(x+h) - Fx = hF'(x+\Delta h).$$

In der vorausgehenden Entwicklung liegt der Grund, dass die Gleichung 5) noch für eine Function gilt, welche innerhalb der Grenzen x und $x+h$ nicht mehr continuirlich bleibt; denn in diesem Falle sind zwar einzelne der Werthe

$$F'x, \; F'(x+\alpha), ... F'(x+[n-2]\alpha), \; F'(x+[n-1]\alpha),$$

sowie

$$k_1, \; k_2, ... k_{n-2}, \; k_{n-1}$$

unendlich gross, aber immer wird ein Mittelwerth $F'(x+m\alpha)$ für die erste und k_q für die zweite Reihe, sowie $F'(x+\mu\alpha)$ für die Summe von $F'(x+m\alpha)$ und αk_q möglich sein, dergestalt, dass die Zahlen m, q, μ zwischen Null und n liegen.

Eben so unterliegt es keinem Zweifel, dass Gleichung 5) für unendlich kleine Zunahmen h gelten müsse, es mag die gegebene Function continuirlich oder discontinuirlich sein; sonach ist für ein unendlich kleines α

$$6) \qquad F(x+\alpha) - Fx = \alpha F'(x+\Delta\alpha).$$

Ist daher die Function continuirlich, so giebt es zwei Formen, welche das Differential ergänzen, nemlich

$$F(x+\alpha) - Fx = \alpha F'x + \alpha^2 k,$$
$$F(x+\alpha) - Fx = \alpha F'(x+\Delta\alpha);$$

und es ist in der ersten dieser Gleichungen k, sowie in der zweiten Δ eine endliche Zahl, denn aus

$$\Delta h = \Delta n\alpha = \mu\alpha \text{ folgt } \Delta = \frac{\mu}{n},$$

und wenn h selbst unendlich klein wird, so wird n endlich, folglich die Bruchzahl $\frac{\mu}{n}$ selbst endlich.

Die Gleichungen 5) und 6) gelten nur unter der zu Anfange gestellten Bedingung, dass Fx zwischen x und $x+h$ entweder immer zunehme oder immer abnehme. Nimmt nun die Function

zwischen x und $x+h'$ zu und zwischen $x+h'$ und $x+h'+h$ ab, oder umgekehrt, so gelten nach Gleichung 5) die Beziehungen

$$F(x+h')-Fx=h'F'(x+\Delta'h')$$

und

$$F(x+h'+h)-F(x+h')=hF'(x+h'+\Delta h),$$

wenn Δ' und Δ ächte Bruchzahlen bedeuten, und es entsteht durch Addition dieser Gleichungen

$$F(x+h'+h)-Fx=h'F'(x+\Delta'h')+hF'(x+h'+\Delta h);$$

für die rechte Seite wird aber immer ein Mittelwerth von der Form

$$(h'+h)F'(x+h'+h+\Delta''[h'+h])$$

sich finden oder denken lassen, in welchem Δ'' wieder einen ächten Bruch bezeichnet.

2.

Aus der Gleichung 5) in Nr. 1. lässt sich eine Beziehung zwischen einer continuirlichen Function und ihren Abgeleiteten entwickeln. Es sei nemlich Fx zwischen den Werthen x_0 und x_1 von x continuirlich, so gilt innerhalb dieser Grenzen

$$1.\quad \begin{cases} F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'(x+\Delta\alpha), \text{ und} \\ F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'x+\alpha^2 k; \end{cases}$$

in welchen Gleichungen Δ und k endliche Zahlen bedeuten, wenn, wie vorausgesetzt wird, α unendlich klein ist. Ob nun auch $F'x$ continuirlich oder discontinuirlich sein mag, immer gilt, wie in Nro. 1. nachgewiesen, die Gleichung

$$F'(x+\Delta\alpha)-F'x=\Delta\alpha F''(x+\Delta'\alpha);$$

in welcher Δ' einen ächten Bruch von $\Delta\alpha$ bezeichnet. Wird nun aus dieser Gleichung der Werth von $F'(x+\Delta\alpha)$ in die erste der Gleichungen 1. eingeschaltet, so dass dieselbe in

$$F(x+\alpha)-Fx=\alpha F'x+\Delta\alpha^2F''(x+\Delta'\alpha)$$

übergeht, und diese Gleichung mit der zweiten der gedachten Gleichungen 1. verglichen, so erhält man

$$k=\Delta F''(x+\Delta'\alpha).$$

Nun ist Δ eine endliche ächte Bruchzahl, und k ebenfalls eine endliche, wenigstens nicht eine unendlich grosse Zahl, da-

her kann $F''(x+\Delta'\alpha)$, das ist $F''x$, zwischen den Grenzen x_0 und x_1 nicht unendlich gross werden, wird also höchstens endlich bleiben. Wenn aber die abgeleitete Function $F''x$ einer gegebenen Function $F'x$ innerhalb bestimmter Grenzen von x höchstens endlich ist, so wird für unendlich kleine Zunahmen von x auch $F'x$ um unendlich kleine Grössen sich verändern, das heisst, $F'x$ wird innerhalb der gedachten Grenzen continuirlich sein.

Wenn also Fx eine zwischen zwei Grenzen continuirliche Function bedeutet, so ist die erste Abgeleitete derselben zwischen denselben Grenzen ebenfalls continuirlich.

Sowie der Schluss von Fx auf $F'x$ gilt, so ist er in gleicher Weise von $F'x$ auf $F''x$, von $F''x$ auf $F'''x$, ... gültig, weil $F''x$ die erste Abgeleitete von $F'x$, u. s. w. ist, daher der Satz:

Wenn eine Function von x innerhalb zweier Grenzen continuirlich ist, so bleiben auch die abgeleiteten Functionen derselben innerhalb derselben Grenzen continuirlich.

Dieser Satz gilt für jede $n$te Abgeleitete einer zwischen zwei Grenzen continuirlichen Function, so lange n eine endliche Zahl bleibt; wird aber n unendlich gross, so erleidet er eine Einschränkung, weil er nur die Beziehung einer Function und deren Abgeleiteten enthält, welche von der Variabeln x abhängig ist. Allein jede Abgeleitete einer Function ist, ausser von dieser Variabeln, auch vom Zeiger n abhängig, deshalb kann für wachsende n die Abgeleitete ins Unendliche wachsen, wenn der Zeiger n als Factor der von x abhängigen Function auftritt, wie bei der Abgeleiteten der Function

$$(a+bx^r)^m,$$

in welcher m jede reelle positive gebrochene oder negative Ganzzahl bedeutet.

Denn nach Gleichung 6) in Nr. 1. hat die erste Abgeleitete von Fx die Form:

$$\frac{F(x+\alpha)-Fx}{\alpha}=F'(x+\Delta'\alpha),$$

wenn Δ einen endlichen, ächten Bruch bedeutet. Daher ist für das unendlich kleine α die zweite Abgeleitete:

$$\frac{F'(x+\alpha+\Delta'\alpha)-F'(x+\Delta'\alpha)}{\alpha}=F''(x+\Delta'\alpha+\Delta''\alpha),$$

und, schliesst man weiter, die $n$te Abgeleitete

$$F^{(n)}(x+\Delta'\alpha+\Delta''\alpha+\Delta'''\alpha+\ldots+\Delta^{(n)}\alpha),$$

wenn diese Gleichungen für die Abgeleiteten in aller Strenge richtig sein sollen. Die Zahl

$$x+\Delta'\alpha+\Delta''\alpha+\Delta'''\alpha+\ldots+\Delta^{(n)}\alpha$$

kann nun innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 liegen oder nicht. Der erste Fall, für welchen diese Summe grösser als die untere Grenze x_0, und kleiner als die obere Grenze x_1 der Continuität der Function ist, ist es, den unser Satz voraussetzt. Ist aber diese Summe grösser, als die obere, oder kleiner, als die untere Continuitäts-Grenze, so hört auch die $n$te Abgeleitete auf, continuirlich zu sein.

In dieser Einschränkung unseres Satzes liegt der Grund, warum nicht jede Function, die mit ihren Abgeleiteten von endlicher Zahl innerhalb zweier Grenzen continuirlich bleibt, nach Maclaurin's Theorem in eine convergente Reihe sich entwickeln lässt; denn die eben angedeutete Form der Abgeleiteten, so wie selbst die Form des Theorems zeigt ohne Beweis, dass

1) die Function eine convergente Reihe giebt, wenn der Werth der $n$ten Abgeleiteten mit n nicht ins Unendliche wächst, und dass

2) die Function eine divergente oder halb convergente Reihe giebt, wenn der Werth der $n$ten Abgeleiteten mit n in's Unendliche zunimmt.

3.

Aus Gleichung 5) in Nro. 1. lässt sich zugleich Maclaurins Reihe mit dem Restgliede entwickeln. Bedeutet nemlich Fx eine zwischen x_0 und x_1 continuirliche Function von x, so hat man für irgend einen Werth k von x, der innerhalb dieser Grenzen liegt, die identische Gleichung

$$F(k)=F(x+[k-x]),$$

in welcher man $k-x$ als Zunahme von x betrachten kann, so dass nach Gleichung 5) in Nro. 1) die Beziehung entsteht:

$$1)\qquad F(k)=F(x)+(k-x)F(x+\Delta[k-x]).$$

In dieser Gleichung muss k, sowie x, zwischen x_0 und x_1 liegen, und für jeden der Werthe von k kann x unendlich verschiedene Werthe annehmen; es kann daher x sich ändern, ohne eine Veränderung des Werthes von k herbeizuführen. Differentiirt man daher mehrmals die Gleichung 1) in Bezug auf x, und schreibt der Kürze wegen u' statt $F(x+\Delta[k-x])$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$0=F'x-u'+(k-x)u'',$$
$$0=F''-2u''+(k-x)u''',$$

$$0 = F'''x - 3u''' + (k-x)u^{IV},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$0 = F^{(n)}x - nu^{(n)} + (k-x)u^{(n+1)};$$

aus welchen für u', u'', u''', ... $u^{(n)}$ die Werthe folgen:

$$u' = F'x + (k-x)u'',$$

$$u'' = \frac{F''x}{2} + \frac{(k-x)^2}{2}u''',$$

$$u''' = \frac{F'''x}{2.3} + \frac{(k-x)^3}{2.3}u^{IV},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$u^{(n)} = \frac{F^{(n)}x}{2.3..n} + \frac{(k-x)^n}{2.3...n}u^{(n+1)}.$$

Diese Werthe aber wandeln die Gleichung 1) in folgende um:

$$2) \qquad F(k) = Fx + (k-x)F'x + \frac{(k-x)^2}{2}F''x + \frac{(k-x)^3}{2.3}F'''x$$
$$+ \dots + \frac{(k-x)^n}{2.3...n}F^{(n)}x + \frac{(k-x)^n}{2.3...n}u^{(n+1)},$$

in welcher

$$u^{(n+1)} = F^{(n+1)}(x + \Delta[k-x])$$

ist. Bleibt nun die Function Fx für den Werth $x=0$ continuirlich, sind sonach mit Fx auch alle Abgeleiteten derselben, in endlicher Anzahl genommen, continuirlich, so geht, wenn man z für k schreibt, Gleichung 2) über in

$$3) \qquad Fz = F0 + zF'0 + \frac{z^2}{2}F''0 + \frac{z^3}{2.3}F'''0 + \dots + \frac{z^n}{2.3...n}F^{(n)}0$$
$$+ \frac{z^n}{2.3...n}F^{(n+1)}(\Delta z).$$

VIII.

Auflösung der vom Herausgeber des Archivs gestellten Aufgabe: Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, der einen anderen gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers des letztern Kreises schneidet.

Von dem

Herrn Doctor T. Clausen,

Observator an der Sternwarte zu Dorpat.

---

1. Es seien die gegebenen Punkte A und B (Taf. VII. Fig. 1.) und FGE der gegebene Kreis, dessen Mittelpunkt in D. Theilt man AB in zwei gleiche Theile in J und zieht JC senkrecht auf AB, so liegen die Mittelpunkte aller durch A und B gehenden Kreise auf der Geraden JC. Es sei C der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Zieht man CD und FDE senkrecht auf dieselbe, so sind E und F die beiden Durchschnitte der beiden Kreise. Also wenn man

$$AJ=\alpha,\ JC=\varrho,\ CD=r,\ DF=a$$

setzt, und den Durchmesser des gesuchten Kreises $AC=CF=X$:

$$X^2=\alpha^2+\varrho^2=a^2+r^2. \qquad (1)$$

Der geometrische Ort aller Punkte, in denen diese Gleichung zwischen den Entfernungen von J und von D Statt findet, ist eine Gerade, die auf der JD senkrecht steht. Nimmt man nemlich JD als Axe der x und J als den Anfangspunkt rechtwinklichter Coordinaten, $JD=f$, und nennt x und y die Coordinaten eines der gesuchten Punkte; so wird

$$a^2+x^2+y^2=a^2+(x-f)^2+y^2$$

oder

$$\alpha^2=a^2-2fx+f^2.$$

Man braucht also nur einen Punkt dieser Geraden zu kennen, um sie ziehen zu können. Einen solchen findet man aber äusserst leicht, da der Gleichung 1) durch folgende Annahme Genüge geleistet wird:

$$\varrho^2=f^2+a^2,\quad r^2=f^2+\alpha^2.$$

Zieht man demnach DG senkrecht auf JD, bis sie den Kreis in G schneidet, und errichtet $JH=JA$ senkrecht auf JD; so ist in diesem besondern Falle $\varrho=JG$, $r=DH$. Man mache also $JK=JG$ und $DK=DH$ und fälle KC auf JD senkrecht, bis sie die Gerade JC in C schneidet; so ist C der gesuchte Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Es erhellet zugleich, dass es in jedem Falle nur einen solchen Kreis giebt.

2. Man kann die Aufgabe auf eine andere Art lösen, indem man den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise sucht, die durch einen gegebenen Punkt A gehen, und den gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmesser dieses Kreises durchschneiden; und nachher auf dieselbe Weise in Beziehung auf B verfährt. Der gemeinschaftliche Punkt dieser beiden geometrischen Oerter ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Es sei C der Mittelpunkt des gegebenen Kreises (Taf. VII. Fig. 2.), dessen Halbmesser R, CA die Axe der x, C der Anfangspunkt der rechtwinklichten Coordinaten, $CA=a$, die Coordinaten des Mittelpunkts eines der erwähnten Kreise ξ, v; dessen Halbmesser R'; so sind die Gleichungen für die Coordinaten des Durchschnitts dieser beiden Kreise x und y:

$$x^2+y^2=R^2\ldots(1);\ (x-\xi)^2+(y-v)^2=R'^2\ldots(2);$$

und die Bedingungsgleichung, dass der gesuchte Kreis durch den Punkt A geht, ist:

$$(a-\xi)^2+v^2=R'^2\ldots(3).$$

Subtrahirt man (1) von (2), so ergiebt sich:

$$\xi^2+v^2-2\xi x-2vy+R^2=R'^2,$$

und wenn man wiederum von dieser die Gleichung (3) subtrahirt:

$$2\xi(a-x)-2vy=a^2-R^2\ldots(4)$$

eine Gleichung einer Geraden, die die Durchschnittspunkte beider Kreise enthält. Die Bedingung, dass sie durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreise gehe, oder dass sie für $x=0$, $y=0$ gelte, giebt:

$$2a\xi=(a-R)(a+R)\ldots(5).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Mittelpunkte aller durch A gehenden Kreise, die den gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers schneiden, in einer auf AC senkrechten Geraden liegen. Nun ist aber, wenn man die Gerade AC bis B, ihrem Durchschnitte mit dem gegebenen Kreise, verlängert, und eine beliebige Grade AE zieht, die den Kreis in E und F schneidet:

$$AF.AE = AD.AB = (a-R)(a+R).$$

Macht man also $AE = a$, oder beschreibt man mit dem Halbmesser $AC = a$ einen Kreis, der den gegebenen in E schneidet, zieht darauf AE, die den gegebenen Kreis noch in F schneidet, und nimmt

$$2\xi = AF, \text{ oder } \xi = CG = \frac{1}{2} AF,$$

errichtet die Senkrechte GC' auf AC; so ist diese der gesuchte geometrische Ort aller solchen Kreise.

Verfährt man völlig eben so in Beziehung auf den Punkt B, indem man um B mit dem Halbmesser BC den Kreisbogen CE' beschreibt, bis er den gegebenen Kreis in E' schneidet; zieht die Gerade BE', die den Kreis in einem zweiten Punkte F' schneidet, macht auf der Geraden BC, $CG' = \frac{1}{2} BF'$ und errichtet in G' die Senkrechte $G'C'$ auf BC; so ist diese hinwiederum der geometrische Ort aller durch B gehenden Kreise, die den gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers schneiden.

Der Durchschnitt C' der beiden Geraden GC', $G'C'$, und nur dieser allein, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, der durch die Punkte A und B geht, und den gesuchten Kreis in den Endpunkten H und J desselben Durchmessers schneidet.

IX.

Auflösung der Aufgabe: Durch vier gegebene Punkte vier Gerade zu ziehen, die ein Quadrat bilden.

Von dem

Herrn Doctor T. Clausen,

Observator an der Sternwarte zu Dorpat.

Es seien in Taf. VII. Fig. 3. die gegebenen Punkte A, B, C, D und das gesuchte Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$. Zieht man $CE = AB$ senkrecht auf AB; so ist E ein zweiter Punkt der Seite, die durch D geht. Man ziehe also, um das Quadrat zu bilden, DE und durch C eine mit ihr parallele, ferner durch A und B zwei auf diese beiden senkrechte; so bilden diese vier Geraden das gesuchte Quadrat. Eben so würde ein Quadrat entstanden sein, wenn man den Punkt E auf der andern Seite von C auf der Geraden CE genommen hätte. Zwei andere fände man, wenn man von B eine senkrechte auf AC, und wieder zwei andere, wenn man diese senkrecht auf AD zöge. Es giebt also in allem sechs Auflösungen, den Fall ausgenommen, wenn der Punkt E mit D zusammenfällt, wo es deren eine unendliche Anzahl giebt.

Um die Richtigkeit der Auflösung zu zeigen, braucht man nur nachzuweisen, dass $\alpha\beta = \beta\delta$, da nach der Construction alle Winkel rechte sind. Es sei der Durchschnitt der beiden Geraden CE und $B\delta$ in ε: der beiden Geraden CE und AB in η. Es ist $\angle \varepsilon\eta B = \angle \varepsilon\delta E$ durch die Construction beide rechte Winkel, $\angle \delta\varepsilon E = \angle \eta\varepsilon B$, als Scheitelwinkel, also in den beiden Dreiecken $\varepsilon\eta B$, $\varepsilon\delta E$ auch $\angle \eta B\varepsilon = \angle \delta E\varepsilon$, oder $\angle ABa = \angle CEc$. Sei Aa senkrecht auf $B\delta$, also parallel mit $\alpha\beta$ und derselben gleich; Cc senkrecht auf cE, also Cc parallel mit $\beta\delta$ und derselben Geraden gleich.

Es sind demnach, da die beiden Dreiecke ABa und CEc rechtwinklicht sind, einen gleichen Winkel überdiess haben, und die den rechten Winkel gegenüberstehenden Seiten AB und CE einander gleich sind: beide Dreiecke einander gleich, und also auch die den beiden gleichen Winkeln $\angle ABa$ und $\angle CEc$ gegenüberstehenden Seiten Aa und Cc oder $\alpha\beta$ und $\beta\delta$ einander gleich.

X.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Satz von dem Herrn Doctor T. Clausen, Observator an der Sternwarte zu Dorpat.

Man kann in Taf. VII. Fig. 4. die Gerade AB ohne Zirkel halbiren, wenn man bloss zwei beliebige Gerade durch A und B zieht, die sich in C schneiden; darauf eine mit AB parallele Gerade zieht, die AC in D und BC in E trifft. Eine durch den Durchschnitt F der beiden Geraden BD und AE aus C gezogene Gerade CG halbirt die AB in G.

Druckfehler in der Abhandlung Thl. XIII. Nr. XVI.

Man setze:

Seite 195 Zeile 2 v. u. (7) statt (1).
„ 197 „ 3 v. u. im Zähler $-3)+$ statt $-3+$.
„ 202 „ 1 im Zähler r^n statt r^2.
„ „ „ 3 und 12 $(lr)^{2p+1}$ statt $(lr)^{2p}$.
„ „ „ 4 v. u. $de\,lr$ statt (lr).
„ 204 „ 2 v. u. } (q) statt (9).
„ 205 „ 7 und 9 }
„ 206 „ 1 im Zähler $\operatorname{Cos}^2 x$ statt $\operatorname{Cos} x$.
„ „ „ 9 ϱ^m statt ϱ^π.
„ 208 „ 3 $2\operatorname{Cos}^2 x-1$ statt $2\operatorname{Cos}^2 x=1$.
„ „ „ 4 $=\pi$ statt $-\pi$.
„ „ „ 13 (k) statt (h).
„ „ „ 16 (80) statt (81).
„ 209 „ 19 $\int_0^{2\pi}$ statt $\int_0^{\pi}$.
„ 210 „ 16 (71) statt (91).
„ 211 „ 10 (57) statt (67).
„ 216 „ 13 $\int_0^{2\pi}$ statt $\int_0^{\pi}$.
„ 217 „ 5 $\frac{\pi}{2}$ statt $\frac{\pi}{4}$,
„ 219 „ 10 (G_3) statt (G_2).

Druckfehler im 15ten Theile.

S. 63. Z. 3 statt „$a=$“ (vorn auf der Seite) setze man „$u=$“,

S. 106. Z. 6. v. u. statt „$+\frac{1}{2}\operatorname{Lim}.\,iy^2{}_b-\frac{1}{2}\operatorname{Lim}.\,iy'^2{}_b$“ setze man „$-\frac{1}{2}\operatorname{Lim}.\,iy^2{}_b+\frac{1}{2}\operatorname{Lim}.\,iy'^2{}_b$“.

XI.

Ueber den Begriff der Combinations-Lehre und die Bezeichnung in derselben und einige neue Sätze über die Combinationen mit beschränkten Wiederholungen.

Von dem

Herrn Hofrath Oettinger

zu Freiburg i. B.

I.

Begriff und Bezeichnung der Combinationen.

§. 1.

Es ist nicht zu verkennen, dass die Lehre von den Combinationen seit ihrer Begründung durch Hindenburg, Kramp, Pfaff, Rothe, Weingärtner etc. an Inhalt und Umfang sich sehr erweitert hat. Eine einfache Vergleichung der diese Wissenschaft behandelnden Schriften aus der frühern Zeit mit denen aus der neuern und neuesten bestätigt diese Behauptung für jeden, der sie mit unbefangenem Auge betrachtet, hinlänglich. Sollte nun auch von mancher Seite ein ungünstiges Urtheil über diese Wissenschaft gefällt werden wollen, so behauptet sie doch durch ihre Anwendbarkeit und Brauchbarkeit in so verschiedenen Zweigen der Mathematik ihre Bedeutung und dadurch eine Stellung, welche ihren Einfluss auf die weitere Ausbildung der mathematischen Wissenschaften mehr und mehr sichern wird. Denn nicht nur in der sogenannten combinatorischen Analysis, wofür sie ihre ersten Begründer benutzten, bewährt sie eine unbestrittene Anwendbarkeit und Brauchbarkeit, sondern auch in der Differenzen- und Summenrechnung, in der Lehre von den Fakultäten (und

hiedurch indirect in der Differenzial- und Integralrechnung), bei der Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche, und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung leistet sie unverkennbare und nicht leicht auf anderem Wege ersetzbare Dienste, wie ich durch eine Reihe von Abhandlungen, welche grösstentheils in Crelle's Journal erschienen sind, nachzuweisen mich bemühte, und auch in einem Aufsatze in diesem Archiv (13. Theil. 1. Heft. Nr. II.) andeutete. Sie wird diese gewiss auch in andern Zweigen, z. B. in der Lehre von den continuirlichen Brüchen, in der Zahlenlehre nicht versagen, wenn sie zu diesem Zwecke benutzt und bearbeitet werden wird. Ein Versuch dürfte wohl der Mühe lohnen, selbst wenn der erste nicht gelingen sollte, und der Erfolg dürfte nicht zweifelhaft sein, wenn der Gegenstand von der richtigen Seite angefasst wird.

Wendet man nun den combinatorischen Gebilden seine Aufmerksamkeit zu, so drängen sich sogleich zwei grosse Uebelstände auf. Der eine ist: die verschiedene Benennung ihrer Grundbegriffe und Grundgebilde, der andere die Verschiedenheit, Zerfahrenheit und Unsicherheit in ihrer Zeichensprache, so dass kaum ein leitender Gedanke zu erkennen ist. Jede Wissenschaft bedarf einer Terminologie, denn sie muss ihre Begriffe feststellen und benennen. Je einfacher die Grundlage, worauf diese gebaut ist, desto leichter und klarer wird sich ihre weitere Entwicklung geben lassen. Der Name ist die Bezeichnung der Sache, deswegen aber nicht gleichgültig, denn er wird, wenn er richtig gewählt ist, das Verständniss sehr erleichtern. Gleich bei der ersten Begründung einer Wissenschaft wird daher eine scharfe Sichtung des in ihr zu behandelnden Stoffes nöthig. An ihn muss sich dann Name und Darstellung knüpfen.

Dieser Grundbedingung steht in der Mathematik die Bezeichnung des Begriffes zur Seite, denn in dieser Wissenschaft ist neben dem Begriff und der Benennung auch noch das Zeichen sorgfältig zu beachten. Das Zeichen oder das Symbol kann den Begriff nur andeuten, nicht entwickeln. Zwischen ihm und dem zugehörigen Begriffe findet kein innerer Zusammenhang statt. Es ist etwas Sinnliches, Zufalliges, nicht Haupt- sondern Nebensache und unterliegt der Wahl. Obgleich das Zeichen für etwas Aeusserliches und Zufälliges erklärt werden muss, so ist doch die Wahl desselben nicht gleichgültig, denn hieran knüpfen sich wesentliche Vortheile. Es unterstützt das Gedächtniss, die Auffassung und Darstellung der Begriffe, es erleichtert die Entwicklung und Ausbildung des Systems. Zur Verdeutlichung wird genügen, auf einen Fall, nämlich die Bezeichnung der Wurzelgrössen durch $\sqrt[m]{a}$ und $a^{\frac{1}{m}}$ aufmerksam zu machen. Während die erste Bezeichnungsweise für die Entwicklung schwerfällig und mühevoll ist, wirkt die zweite sehr erleichternd und fördernd. Ein Gleiches gilt von der Zeichensprache in der Combinations-Lehre, und es ist nicht zu verkennen, dass die Verschiedenheit und Zerfahrenheit in der Bezeichnung sehr ungünstig in der Lehre von den Combinationen gewirkt hat und noch wirkt; denn hat sich der Leser

die Zeichensprache einer Schrift zu eigen gemacht, so ist da durch der Schlüssel für eine zweite und dritte noch nicht gefunden.

Für die weitere Ausbildung der Combinations-Lehre ist daher eine Feststellung der Grundbegriffe und Bezeichnungsweise von Wichtigkeit. Zu dem Ende mögen folgende Bemerkungen hier ihre Stelle finden, die sich an die in meiner Combinations-Lehre gegebenen Begründungen und Erörterungen anschliessen.

§. 2.

Begriffs-Bestimmung und Eintheilung der Combinationen.

Die Combinationen zerfallen, wie sich leicht bei der ersten Anschauung der durch sie hervorgebrachten Gruppen ergibt, in zwei Arten und zwar:

a) in solche, worin die einzelnen Elemente, welche die Gruppen einer bestimmten Classe hervorbringen, in ihrer Stellung und Aufeinanderfolge unter einander betrachtet werden, und dann

b) in solche, worin die Stellung oder Ordnung der auf einander folgenden Elemente in den einzelnen Gruppen nicht in Betracht kommt, sondern nur darauf Rücksicht genommen wird, in wie fern sich die Gruppen einer bestimmten Classe von einander durch die in ihnen auftretenden Elemente unterscheiden.

In der ersten Art bildet nach dem angegebenen Begriffe die Ordnung, worin die erzeugenden Elemente unter einander erscheinen, das Merkmal der Unterscheidung, und es können mehrere Gruppen die gleichen Elemente, jedoch in veränderter Stellung enthalten; in der zweiten Art fällt dieses Merkmal weg, die Ordnung oder Stellung, worin die erzeugenden Elemente unter einander erscheinen, ist ganz gleichgültig und die Gruppen unterscheiden sich durch die Verschiedenheit der in ihnen vorkommenden Elemente.

Stellt man der Deutlichkeit wegen Combinationen nach dieser Begriffsbestimmung hier zusammen, so hat man für die Gruppen der dritten Classe aus vier Elementen, worin die Stellung der Elemente unter einander beachtet wird, oder für die Gruppen der ersten Art folgende Zusammenstellung:

abc	*bac*	*cab*	*dab*
abd	*bad*	*cad*	*dac*
acb	*bca*	*cba*	*dba*
acd	*bcd*	*cbd*	*dbc*
adb	*bda*	*cda*	*dca*
adc	*bdc*	*cdb*	*dcb*.

Für die Gruppen der dritten Classe aus vier Elementen, worin die Stellung nicht, sondern nur der Zutritt neuer Elemente beachtet wird, also für Gruppen der zweiten Art hat man folgende Zusammenstellung:

abc
abd
acd
bcd.

In den Gruppen der ersten Art kommen je sechs vor (*abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* u. s. w.), die sich immer nur durch die Ordnung oder Stellung, worin die Elemente unter einander vorkommen, unterscheiden. In den Gruppen der zweiten Art ist dieses Merkmal nicht vorhanden. Alle diese sechs Formen haben nur einen Repräsentanten (*abc*) und diese Gruppe unterscheidet sich von der Gruppe *abd*, *acd*, *bcd* durch die Aufnahme von wenigstens einem neuen Elemente.

Die erste Art dieser Gebilde soll mit dem deutschen Namen Versetzungen (die Elemente erscheinen unter einander versetzt); die der zweiten Art mit dem Namen Verbindungen (die Elemente erscheinen unter einander auf verschiedene Art verbunden) bezeichnet, und beide zusammen unter dem allgemeinen Namen Combinationen begriffen werden.

Untersucht man nun beide Arten von Combinationen näher, so können in jeder einzelnen Gruppe beider Arten nur verschiedene Elemente vorkommen. Diess ist in den oben angegebenen Zusammenstellungen der Fall. Es kann aber auch in den einzelnen Gruppen wenigstens ein Element (also auch alle) oder auch nur bestimmte Elemente wiederholt erscheinen, und zwar auf allen Stellen der einzelnen Gruppen oder nur auf bestimmten. Dadurch wird man ferner auf den Begriff der Combinationen mit Wiederholungen geführt, welcher sich auf die beiden vorhin genannten Arten von Combinationen ausdehnt, und man erhält sofort Versetzungen mit Wiederholungen und Verbindungen mit Wiederholungen.

Hiebei unterscheiden sich nun zwei Unterarten von selbst. Es können nämlich bestimmte Elemente ein oder mehrere mal in den einzelnen Gruppen, worin sie erscheinen, wiederholt erscheinen, oder es können alle Elemente, woraus die Gebilde erzeugt werden, wiederholt erscheinen. Im ersten Falle können dabei die Wiederholungen selbst auf verschiedene Weise beschränkt vorkommen. Hiernach zerfallen diese Arten von Combinationen in solche mit beschränkten Wiederholungen und in solche mit unbeschränkten Wiederholungen.

Da die Begriffsbestimmungen dieses Paragraphen die Grundlage der nachfolgenden Erörterungen bilden, und eine klare Einsicht vor allem hier erfordert wird, so soll nun auch eine Zusammenstellung dieser verschiedenen Combinationsarten hier gegeben werden. Wir verfolgen das oben gegebene Beispiel weiter.

Die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen aus vier Elementen zur dritten Classe sind:

aaa	*aca*	*baa*	*bca*	*caa*	*cca*	*daa*	*dca*
aab	*acb*	*bab*	*bcb*	*cab*	*ccb*	*dab*	*dcb*
aac	*acc*	*bac*	*bcc*	*cac*	*ccc*	*dac*	*dcc*
aad	*acd*	*bad*	*bcd*	*cad*	*ccd*	*dad*	*dcd*
aba	*ada*	*bba*	*bda*	*cba*	*cda*	*dba*	*dda*
abb	*adb*	*bbb*	*bdb*	*cbb*	*cdb*	*dbb*	*ddb*
abc	*adc*	*bbc*	*bdc*	*cbc*	*cdc*	*dbc*	*ddc*
abd	*add*	*bbd*	*bdd*	*cbd*	*cdd*	*dbd*	*ddd*

Die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen aus vier Elementen zur dritten Classe sind:

aaa	*bbb*	*ccc*	*ddd*
aab	*bbc*	*ccd*	
aac	*bbd*	*cdd*	
aad	*bcc*		
abb	*bcd*		
abc	*bdd*		
abd			
acc			
acd			
add			

In den Gruppen der ersten Art macht sich der Begriff der Versetzung der einzelnen Elemente in einer Gruppe geltend, wie in *bcd*, *bdc*, *cbd*, *cdb*, *dbc*, *dcb* u. s. w. und zugleich der der Wiederholung, wie in *aaa*, *bbb*,.... und endlich beide in Verbindung mit einander, wie in *aab*, *aba*, *baa*, oder in *abb*, *bab*, *bba* u. s. w. Sie führen daher mit Recht den Namen Versetzungen mit Wiederholungen, denn ihre Eigenthümlichkeit ist durch beide Worte festgehalten.

In den Gruppen der zweiten Art macht sich vorerst der oben unter *b*) gegebene Begriff geltend. Die einzelnen Gruppen unterscheiden sich von einander nicht durch die Stellung der in ihnen vorkommenden Elemente, sondern dadurch, dass in den verschiedenen Gruppen nicht dieselben, sondern verschiedene Elemente vorkommen, und es genügt, wenn auch nur eines unter den vorkommenden Elementen verschieden ist, wie in den Gruppen *aaa*, *aab*, *bcd*, *bdd*.... Ferner macht sich neben der Art, wie die Elemente in den verschiedenen Gruppen mit einander in Verbindung treten, der Begriff der Wiederholung geltend, wie in den Gruppen *aab*, *bbc*, *ccc*.... Diese Gruppen werden in ihrer

Eigenthümlichkeit ganz gut durch den Namen **Verbindungen mit Wiederholungen** bezeichnet.

Die Combinationen mit beschränkten Wiederholungen sollen hier nicht besonders hervorgehoben werden, da wir später auf sie zurückkommen werden.

Die hier gemachten Bemerkungen führen nun zu folgendem Schema über Eintheilung der Combinationen:

1) *Versetzungen.*
   a) Versetzungen ohne Wiederholungen,
   b) Versetzungen mit Wiederholungen.
      α) Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen,
      β) Versetzungen mit unbeschränkten Wiederholungen.

2) *Verbindungen.*
   a) Verbindungen ohne Wiederholungen,
   b) Verbindungen mit Wiederholungen.
      α) Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen,
      β) Verbindungen mit unbeschränkten Wiederholungen.

Dieses Schema empfiehlt sich einerseits durch seine Einfachheit, andererseits durch den Zusammenhang, welcher zwischen beiden Combinationsarten herrscht. Man kann nämlich, wie man sich leicht aus der vorstehenden Zusammenstellung der Gruppen für dieselben überzeugt, von den Gruppen der **Versetzungen** (mit oder ohne Wiederholungen) zu einer bestimmten Classe auf die Gruppen der **Verbindungen** (mit oder ohne Wiederholungen) zu derselben Classe übergehen, wenn man aus den Gruppen der Versetzungen die **Aufeinanderfolge** der Elemente ausstösst, also nur die unter sich verschiedenen Gruppen berücksichtigt; und umgekehrt kann man von den Gruppen der **Verbindungen** (mit und ohne Wiederholungen) zu einer bestimmten Classe auf die Gruppen der **Versetzungen** zur nämlichen Classe übergehen, wenn man in die Gruppen der Verbindungen die verschiedene **Aufeinanderfolge** der Elemente oder die **Versetzungen**, welche die Elemente einer jeden Gruppe unter sich eingehen können, einführt.

Man könnte auch zur Benennung der verschiedenen Arten von diesen Gebilden nur den Namen **Combinationen** wählen; dann würden aus dem oben vorgelegten Schema folgende Namen zur Unterscheidung der in Frage stehenden Gebilde fliessen:

a) Combinationen mit Versetzungen.
b) Combinationen mit Versetzungen und Wiederholungen.

α) **Combinationen mit Versetzungen und beschränkten Wiederholungen,**

β) **Combinationen mit Versetzungen und unbeschränkten Wiederholungen.**

c) **Combinationen ohne Versetzungen.**

d) **Combinationen ohne Versetzungen mit Wiederholungen.**

α) **Combinationen ohne Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen,**

β) **Combinationen ohne Versetzungen mit unbeschränkten Wiederholungen.**

Diese Benennungen bezeichnen, wie man sieht, dieselben Dinge und Begriffe. Sie sind aber sehr schwerfällig, stehen jedenfalls den zuerst gegebenen an Kürze und Zweckmässigkeit nach und empfehlen sich deswegen keineswegs zur Annahme.

§. 3.

Geschichtliche Notizen über Begriffsbestimmung und Benennung der Combinationen nebst Kritik.

Wir stellen nun dem im vorigen Paragraphen aufgestellten ersten Schema die von Hindenburg gegebene Eintheilung der Combinationen entgegen. Nach ihm zerfallen sie (Novi systematis Permutationum, Combinationum ac Variationum primae lineae. Lips. 1781. pg. 4. u. ff.) in folgende drei:

a) Versetzungen (Permutationes sive transpositiones),

b) Verbindungen (Combinationes sive complicationes),

c) Variationen (Variationes sive complicationes cum permutationibus).

Unter Versetzungen (permutationes) versteht Hindenburg diejenigen Gebilde, welche immer die nämlichen Elemente (res) führen und sich nur durch die Stellung, welche die erzeugenden Elemente unter einander einnehmen, unterscheiden (cum datae res, servata earum multitudine, sed non ordine, omnibus quibus possunt modis coordinantur et transponuntur). Dabei können unter sich gleiche Elemente, aber immer gleich vielmal wiederholt erscheinen (wie z. B. *abb*, *bab*, *bba*). Aus der weitern Ausführung und auch aus der weitern Bestimmung der zugehörigen Gruppenzahl (pg. 23. u. f. des oben angeführten Werkes) geht hervor, dass die Zahl der erzeugenden Elemente der Classenzahl gleich kommen muss. Nach der hier gewählten Terminologie sind es die Versetzungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zur $n$ten Classe und bestimmte Fälle der Versetzungen

mit beschränkten Wiederholungen (also beides nur specielle Fälle zweier Combinationsarten).

Unter Verbindungen (Combinationes) versteht er solche Gebilde, worin die Elemente aus irgend einer gegebenen Anzahl einfach oder zu zweien (Biniones), zu dreien (Terniones) u. s. w. zusammengestellt werden, die Ordnung aber, worin die Elemente auf einander folgen, ausser Acht gelassen wird (nullo tamen ordinis singularum (rerum) vicissitudinisve habito respectu). Dabei können die erzeugenden Elemente wiederholt erscheinen oder nicht.

Unter Variationen versteht er die Gebilde, welche entstehen, wenn in den Gruppen der Verbindungen (ohne und mit Wiederholungen) auch die Versetzungen vorkommen (Variationes sive Complicationes cum Permutationibus). Hiebei wird die unter *a*) gegebene Beschränkung aufgehoben, dass die Elementenzahl mit den Classenexponenten übereinstimmen müsse, und es können die einzelnen Gruppen weniger Elemente führen. Hierunter werden also nach unserer Ausdrucksweise die Versetzungen mit und ohne Wiederholungen aus *n* Elementen in den verschiedenen Classen verstanden, mit Ausnahme der genannten besondern Fälle. Die von Hindenburg gegebene Begriffsbestimmung wird von ihm jedoch nicht sehr strenge gehalten, denn er führt auch noch andere Fälle bei Aufstellung der zugehörigen Zahlenausdrücke unter dieser Benennung auf.

Einen allgemeinen Namen, welcher die drei von ihm aufgeführten Arten dieser Gebilde umschliesst, hat Hindenburg nicht gegeben.

Die von Hindenburg aufgestellte Eintheilung der Combinationen wurde in den meisten, die Combinationslehre behandelnden Schriften beibehalten. So von Weingärtner (Lehrbuch der combinatorischen Analysis. 2 Thle), Stahl (Einleitung in das Studium der Combinationslehre), Lorenz (Lehrbegriff der Syntaktik oder Combinationslehre), Spehr (Lehrbegriff der reinen Combinationslehre), Thibaut (Grundriss der allgemeinen Arithmetik oder Analysis) u. A.

In der gebrauchten Benennung zeigt sich jedoch einige Verschiedenheit. So werden die Verbindungen auch mit dem Namen „Combinationen überhaupt“ mit und ohne Wiederholungen, auch „Combinationen im engern“, oder „eigentlichen Sinne“ bezeichnet. Auch kommen die Namen „geordnete, wohl geordnete“ oder „gut geordnete Combinationen“ vor, so dass man unwillkührlich an die Titel „wohlgeboren, hochwohlgeboren“ etc. erinnert wird.

Der hier gegebene Begriff der Variationen ohne und mit Wiederholungen fällt offenbar mit dem der Versetzungen ohne und mit Wiederholungen, wie er oben in dem von mir aufgestellten Schema vorkommt, zusammen. Nur ist dort weiter, wie es in der Natur der Sache liegt, zwischen beschränkten und un-

beschränkten Wiederholungen unterschieden. Die Gebilde, welche Hindenburg und seine Nachfolger unter dem unter a) aufgeführten Namen Versetzungen (Permutationes) bezeichneten, sind nach der Hindenburg'schen Terminologie in der That nichts anderes als Variationen ohne Wiederholungen aus n Elementen zur $n$ten Classe, worin auch eine bestimmte Zahl von Elementen einander gleich sein kann, verstanden.

Die von Hindenburg aufgestellte Eintheilung der Combinationen in drei Arten: in Permutationen, Combinationen und Variationen, ist nun nicht in der Natur der Sache begründet, widerspricht sogar einer richtigen Anschauungsweise und ist daher unrichtig. Sie charakterisirt einen besondern Fall einer bestimmten Unterart als allgemeinen Begriff, coordinirt ihn anstatt ihn unterzuordnen.

Alle Combinationen (Versetzungen und Verbindungen) zerfallen nach der Zahl der in den einzelnen Gruppen vorkommenden Elemente in verschiedene Classen oder Ordnungen und unterliegen in dieser Zergliederung durchweg den gleichen Gesetzen. Daher ist nicht abzusehen, warum die Gruppen des bestimmten Falles, wenn gerade so viel Elemente in ihnen vorkommen als der Classenexponent Einheiten enthält (Versetzungen aus n Elementen zur $n$ten Classe) einen besondern Namen führen und sogar zu einem Gattungsbegriff erhoben werden sollen. Diess geschieht aber offenbar in dem vorliegenden Falle nach der Hindenburg'schen Eintheilungsweise. Wollte man consequent verfahren, so müsste man den Verbindungen aus n Elementen zur $n$ten Classe (mit und ohne Wiederholungen) und den Versetzungen und Wiederholungen aus n Elementen zur $n$ten Classe auch einen besondern Namen beilegen und sie zu einem Gattungsbegriff erheben, was offenbar gegen jede richtige Schlussfolgerung verstösst.

Diese Erörterung dürfte einem unbefangenen Blicke unzweifelhaft darthun, dass die Hindenburg'sche Eintheilung der Combinationen in drei unter sich verschiedene und coordinirte Arten (Permutationen, Combinationen und Variationen) unrichtig ist, und dass eine richtige Zerlegung des Begriffes nur zwei unter sich verschiedene und coordinirte Arten zulässt, die von Hindenburg Combinationes sive Complicationes und Variationes sive Complicationes cum permutationibus genannt wurden, und die ich mit dem schon lange gebräuchlichen, deutschen Namen „Verbindungen und Versetzungen“ bezeichne und wobei nur der Unterschied vorkommt, dass die Benennung „Variationen“ durch „Versetzungen“ ersetzt ist. Diess schien mir um so zulässiger, da das Wort „Versetzungen“ den oben gegebenen Begriff ganz gut und richtiger bezeichnet als das Wort „Variationen“, denn letzteres Wort bedeutet „Verwechslung, Abwechslung“ und entspricht dem fraglichen Begriffe durchaus nicht.

Hindenburg hat keinen allgemeinen Namen für die in Frage stehenden Gebilde aufgestellt, wie der Titel des oben angeführten Werkes besagt. Sie lassen sich ganz zweckmässig mit dem

Namen „Combinationen" bezeichnen. Dafür hat auch der Sprachgebrauch entschieden, wie die Ausdrücke „combinatorische Analysis, Combinations-Lehre, combinatorisches Verfahren etc." deutlich dartbun, wodurch im Allgemeinen die Operationen, welche die Combinationslehre lehrt und die Analysis gebraucht, mit allen sich daran knüpfenden Geschäften, angedeutet werden.

Ganz unstatthaft ist die Benennung „geordnete, wohlgeordnete oder gut geordnete (rite ordinatae) Combinationen". Sie bezieht sich nur auf die Methode, wie die Gruppen dieser Verbindungen gebildet werden (wobei man zur Erleichterung des Verfahrens allerdings ganz sachgemäss die Elemente nach einer bestimmten Weise ordnet), nicht aber auf die Gruppen und den Begriff selbst, wie diess auch bei der Gruppenbildung der Versetzungen mit und ohne Wiederholungen geschieht. Die Verbindungen (mit und ohne Wiederholungen) charakterisiren sich nach der in §. 2. gegebenen Begriffsentwicklung vorzugsweise als solche Gebilde, worin gerade die Ordnung, in welcher die Elemente auf einander folgen, ausgeschlossen und daher ganz unwesentlich ist. So stellen z. B. die sechs Formen *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* nur eine Gruppe dar, wenn von den Gruppen der Verbindungen zur dritten Classe die Rede ist, denn *acb* hat in diesem Falle die nämliche Bedeutung wie *cba* oder *bca* u. s. f. und alle zusammen vertreten den nämlichen Begriff. Ist aber von den Versetzungen zur dritten Classe die Rede, dann stellen diese Gebilde sechs verschiedene Gruppen dar und *acb* ist eine andere Gruppe als *abc*, oder *cba*. Sie sind nicht mehr unter einander identisch, sondern dem Begriffe nach unter sich gesonderte Dinge.

§. 4.

Bezeichnung der Combinationen.

Um die so wünschenswerthe Einheit und Einförmigkeit für die Bezeichnung der Combinationen zu gewinnen, werden folgende Sätze, die ich schon in meiner Combinationslehre §. 7. aufgeführt habe, als fördernd zu betrachten sein.

Die zu wählenden Zeichen sollen so beschaffen sein, dass sie

1) den anzudeutenden Begriff richtig aufnehmen und daher klar und erschöpfend vorlegen. Alle zur Erzeugung des Begriffs mitwirkende Elemente müssen zusammengefasst werden, keines darf übersehen, und nichts Unerhebliches oder Zufälliges als wesentlich bezeichnet sein;

2) dass sie sich der Methode, wornach die Zeichen einer Wissenschaft überhaupt gewählt werden, anschliessen. Willkühr und Unsicherheit müssen unterdrückt und allgemeinen Gesichtspunkten untergeordnet werden.

3) Zeichen, die in der Wissenschaft schon eine bestimmte Bedeutung erhalten haben, müssen hiefür ausschliesslich beibehalten und können nicht auf andere Begriffe übergetragen werden. Die Vernachlässigung dieses Punktes bringt Unsicherheit und Verwirrung in die Bezeichnungsweise.

Nach diesen Andeutungen müssen die Zeichen in der Combinationslehre so gewählt werden, dass in ihnen alle, von einem Begriffe umschlossenen Geschäfte enthalten und ausgesprochen sind. Das Zeichen muss daher angeben:

a) die Art der Combinationen, welche gebildet werden sollen, als da sind: Versetzungen oder Verbindungen, ohne und mit Wiederholungen, mit beschränkten und unbeschränkten;

b) die Elemente, woraus die Gruppen gebildet werden sollen, aus einer oder mehreren Elementenreihen. Viele von den bisher gewählten Zeichen übersehen diese Bedingung ganz, und dürften deswegen unzulässig sein;

c) die Classe, oder Ordnung, d. i. die Zahl der Elemente, welche in jeder der zu bildenden Classen zusammengestellt werden sollen

Ausser diesen drei Grundbedingungen, die in keinem Zeichen fehlen dürfen, können noch andere Nebenbegriffe aufgenommen werden, wie z. B. Summen, welche die zusammenwirkenden Elemente hervorbringen sollen, oder Abtheilungen oder Fächer, worein sie gebracht werden sollen und dergleichen mehr.

Stillschweigend werden wohl in jedem Werke, worin auch nur die ersten Elementarsätze der Combinationslehre behandelt werden, und selbst von denen, die keine Zeichen gebrauchen, sondern den darzustellenden Begriff mit Worten geben, die hier aufgestellten Bedingungen als massgebend anerkannt. Bis zu einer gleichförmigen Bezeichnungsweise hat sich aber diese Anerkennung noch nicht gesteigert. Jeder geht der hergebrachten Gewohnheit nach. Ein richtiges Zeichen aber ist die kürzeste Terminologie, erspart viele Worte und erleichtert die weitere Ausbildung der Wissenschaft ungemein. Die Mathematik erfreut sich dieses Vorzugs. Die Einigung aber scheint auch in diesem Gebiete eine Sisyphus-Arbeit zu sein. Sie kann nicht von dem Einzelnen durchgeführt, sondern muss durch das Zusammenwirken Einzelner angebahnt und durch allmälige Verbesserung bewerkstelligt werden. Hier soll nun der Versuch einer solchen Anbahnung in wohlgemeinter Absicht gemacht werden, der sich vielleicht dadurch empfehlen dürfte, dass die von Hindenburg gewählte aber nicht durchgeführte, in vielen Schriften auch schon angenommene, von andern wieder verlassene Bezeichnungsweise zu Grunde gelegt wird, die überdiess den Vorzug grosser Bildsamkeit und Brauchbarkeit bietet, wie aus meiner Combinationslehre hervorgeht, wo sie sich systematisch weiter ausgebildet und durchgeführt findet.

Die Versetzungen werden dieser Methode zufolge durch P (Anfangsbuchstabe des Wortes Permutatio), die Verbindungen durch C (Anfangsbuchstabe des Wortes Combinatio) angedeutet, die Elemente werden neben an geschrieben, durch Kommata getrennt und in Klammern eingeschlossen. Rechts oben an die Schlussklammer kommt die Classenzahl als Exponent zu stehen, so wie die unter a) — c) aufgestellten Sätze es fordern. Die Wiederholungen werden durch einen Strich angezeigt, der oben rechts an den Buchstaben P und C nach dem Vorgange der meisten Schriften gesetzt wird. Beschränkte Wiederholungen werden durch Exponenten angedeutet, welche oben an die zu wiederholenden Elemente angeschrieben werden, wie diess bekanntlich längst gebräuchlich ist.

Hiernach werden die Versetzungen ohne Wiederholungen aus den Elementen a_1, a_2, $a_3 .... a_n$ (n Elementen) zur $q$ten Classe bezeichnet durch

4) $$P(a_1, a_2, a_3 .... a_n)^q.$$

Die Versetzungen mit Wiederholungen (unbeschränkt) aus denselben Elementen zu derselben Classe durch

5) $$P'(a_1, a_2, a_3, ... a_n)^q.$$

Die Versetzungen, worin ein Element (a_2) $k$mal, ein anderes (a_4) $h$mal wiederholt erscheint (mit beschränkten Wiederholungen) durch

6) $$P(a_1, a^k{}_2, a_3, a^h{}_4, a_5, ... a_n)^q.$$

Hierin ist bekanntlich

$$1+k+1+1+h+1+....=q.$$

Die Verbindungen ohne und mit Wiederholungen aus den oben genannten Elementen zur $q$ten Classe werden analog durch folgende Zeichen angedeutet:

7) $$C(a_1, a_2, a_3, ... a_n)^q,$$

8) $$C'(a_1, a_2, a_3, ... a_n)^q$$

9) $$C(a_1, a^k{}_2, a_3, a^h{}_4, a_5, ... a_n)^q.$$

Sollen Combinationen in irgend einer Classe zu einer bestimmten Summe bezeichnet werden, so tritt noch ein neues Element hinzu, das in das Zeichen aufgenommen werden muss. Diess wird dadurch angedeutet, dass man in die Klammer vor die Elemente den kleinen lateinischen aber langen Buchstaben (f) und neben ihn die verlangte Summe schreibt, und dann ein Semikolon vor den Elementen folgen lässt. Alles andere bleibt an der Bezeichnung ungeändert. Die Combinationen (Versetzungen und Verbindungen) mit und ohne Wiederholungen aus irgend einer

Elementenzahl in der $q$ten Classe zur Summe m werden sofort der Reihe nach bezeichnet durch:

10) $P(\int m; a_1, a_2, a_3, \ldots)^q$,

11) $P'(\int m; a_1, a_2, a_3 \ldots a_{m-q+1})^q$,

12) $C(\int m; a_1, a_2, a_3 \ldots)^q$,

13) $C'(\int m; a_1, a_2, a_3 \ldots a_{m-q+1})^q$.

Sollen Combinationen zu bestimmten Unterschieden angedeutet werden, so werden sie auf die vorstehende Weise, nur mit der Abänderung dargestellt, dass man allenthalben d statt $\int$ schreibt und alles Uebrige in dem Zeichen unverändert lässt. Kommen mehrere Elementenreihen in Frage, so werden sie in die Klammer eingetragen.

Die Zahlenausdrücke der bisher angedeuteten Begriffe lassen sich einfach durch eckige Klammern statt runder angeben. Man hat dann

14) $P[a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]^q = n^{q|-1} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$.

Die hier gegebene Bezeichnungsweise beurkundet ihre Zweckmässigkeit insbesondere dadurch, dass sie sehr leicht noch anderweitige Bestimmungen in sich aufnimmt, und dass sich noch andere Arten von Combinationen und vielerlei mit ihnen vorzunehmende Geschäfte durch sie andeuten lassen, die bisher durch Worte, also auf viel umständlichere Weise, ausgedrückt wurden. Diess ist bei der Verbindung der aus verschiedenen Elementenreihen erzeugten Gruppen unter einander, bei der Vertheilung der Elemente einer oder mehrerer Elementenreihen in Fächer u. s. w. der Fall, wie man sich aus meiner Combinationslehre, aus meiner Abhandlung „die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren Elementenreihen u. s. w.“ überzeugen kann. Sollen z. B. die Gruppen der Combinationen verschiedener Elementenreihen so mit einander verbunden werden, dass je h Elemente der ersten Reihe mit je k Elementen einer zweiten, mit je l Elementen einer dritten u. s. w. zusammentreten und zwar so, dass sich die Elemente verschiedener Reihen nicht unter einander vermischen, so kann man diess dadurch darstellen, dass man die Dimensionen, in welchen die Elemente neben einander treten, als Exponenten neben einander schreibt und durch Kommata von einander trennt. Hierdurch entstehen folgende Zeichen:

15) $P(a_1, a_2, a_3 \ldots a_m; b_1, b_2, b_3, \ldots b_n; c_1, c_2, \ldots c_p \ldots)^{h,k,l,\ldots}$

16) $C(a_1, a_2, \ldots a_m; b_1, b_2, b_3 \ldots b_n; c_1, c_2, \ldots c_p; \ldots)^{h,k,l,\ldots}$

die auch für die Versetzungen und Verbindungen mit Wiederholungen gelten.

Es wird genügen, die Grundzüge dieser Bezeichnungsweise hier festgestellt zu haben. Wegen der weitern Ausführung verweise ich auf den Inhalt der Abschnitte IV—VIII. meiner Combinations-Lehre, wo das Hieher-Gehörige nachzusehen ist.

§. 5

Geschichtliche Bemerkungen.

Die Elemente wurden anfänglich durch die Buchstaben des Alphabetes

$$a, b, c, d, e, f, \ldots\ldots$$

oder durch Zahlen,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$$

bezeichnet und zwar so, dass a das erste, b das zweite, c das dritte Element u. s. w. darstellte. Jedem Elemente wurde auf diese Weise ein Ordnungswerth beigelegt. So bei Hindenburg, Weingärtner, Stahl u. s. w. In spätern Schriften von Thibaut, Scherk u. A. wurde diese Darstellungsweise wieder verlassen und man findet nur ein Element, und über dasselbe die Ordnungszahl geschrieben auf folgende Weise:

$$\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \overset{5}{a}, \overset{6}{a} \ldots \overset{n}{a}.$$

Diese Bezeichnung ist im Schreiben sehr zeitraubend und für den Druck ungeeignet. Die oben in §. 4. angenommene Bezeichnungsweise der Elemente durch Anhängen der Stellenzahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_n$$

vermeidet diese Nachtheile und fördert den Ueberblick sehr.

Das Vorschreiben der grossen Buchstaben P und C vor die in Klammern eingeschlossenen Elemente zur Bezeichnung der verschiedenen Combinationsarten steht mit der Methode, welche in der neueren Zeit zur Bezeichnung der Begriffe in der Mathematik in Anwendung gebracht wurde, vollkommen in Einklang. Man darf sich nur an die Bezeichnung der Differenzen, Logarithmen, Sinus, Cosinus etc. erinnern. Schon Hindenburg fasste diese Idee auf und sagt p. 41. des oben angeführten Werkes: „Operationes combinatoriae optime et simplicissime indicantur praeponendo ipsa verba, vel literas initiales literis sive numeris, positis pro rebus (Elemente), quibuscum operatio instituі debet" und schlägt folgende Zeichen vor:

Permutationes $(a, b, c, d, \ldots)$ sive $P(1, 2, 3, 4, \ldots)$,
Complicationes $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ vel $C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$,
Variationes $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ sive $V(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$;

hält aber den Gedanken nicht fest, und wählt sogar eine Bezeichnungsweise, worin die den Begriff erzeugenden Momente gar nicht zu erkennen sind. So bezeichnet er z. B. die Verbindungen aus n Elemente zur ersten, zweiten, dritten Classe u. s. w. durch

$$'A, \ 'B, \ 'C, \ 'D, \ldots$$

Diese Bezeichnungsweise wird von Weingärtner, Stahl u. A. festgehalten. Dem Classenexponenten wird aber in all diesen Darstellungen keine Rücksicht getragen. In spätern Schriften wird der Exponent über den die Gebilde andeutenden Buchstaben und die Elemente oder Zahlen werden unten oder rechts zur Seite angeschrieben auf folgende Weise:

$$\overset{q}{C}(a, \ b, \ c, \ldots n) \text{ oder } \overset{q}{C}(1, \ 2, \ 3, \ldots n)$$

oder

$$\underset{(a, \ b, \ c, \ldots n)}{\overset{q}{C}} \quad \text{oder} \quad \underset{(1, \ 2, \ 3, \ldots n)}{\overset{q}{C}}.$$

Unzweifelhaft gebührt dem Zeichen

$$C(a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots a_n)^q$$

vor den genannten der Vorzug. In manchen Fällen und namentlich bei Collectiv-Bezeichnungen können zur Raum-Ersparung die Elemente unten angeschrieben werden.

Sollte nun noch der Begriff der Summe aufgenommen werden, so würde die sie bezeichnende Zahl rechts oder links oben angeschrieben. Diese Stelle gebührt aber nicht der Summe, sondern dem Exponenten; daher muss das die Summe vertretende Zeichen eine andere Stelle einnehmen, wie diess auch schon oben durchgeführt ist.

Um nun zu zeigen, auf welche Weise die Bezeichnungen in den Combinationen durch einander laufen, soll hier Einiges zusammen und den oben gegebenen Zeichen gegenüber gestellt werden. Wir geben das Schema mit unseren Zeichen und denen von Hindenburg, Thibaut, Eytelwein und Spehr gebrauchten:

		Hindenburg	Thibaut	Eytelwein	Spehr
1) Versetzungen ohne Wieder holungen	$P(a_1,a_2,\ldots a_n)^m$,	M'(lieg. M),	$\overset{m}{V'}$,	V_m;	
2) Versetzungen mit Wiederholungen	$P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^m$,	$'M$(lieg. M),	$'\overset{m}{V}$,	$'V_m$,	$\overset{m}{V}$;
3) Versetzgn. mit Wiederhol. zu best. Summen	$P'(fn;a_1;a_2,..)^m$,	^nM(lieg. M),	$^n\overset{m}{V}_m$,	$^nV'_m$,	$^n\overset{m}{V}$;
4) Verbindungen ohne Wiederholungen	$C(a_1,a_2,\ldots a_n)^m$,	M'(steh.M),	$\overset{m}{C'}$,	C_m,	$\overset{m}{C'}$;
5) Verbindungen mit Wiederholungen	$C'(a_1,a_2,\ldots a_n)^m$,	'M(steh.M),	$'C^m$,	$C'_{\overline{m}}$,	$\overset{m}{C}$;
6) Verbind. mit Wiederh. zu best. Summen	$C'(fn;a_1,a_2,..)^m$,	m^nM(steh.M),	$c^n\overset{m}{C}$,	$\mu^v C'_m$,	$p^n\overset{m}{C}$.

Wer ein treues Bild von dieser verwirrenden Bezeichnungsweise wünscht, der wird sie in der Schrift über „die Bezeichnung in der combinatorischen Analysis von Weingärtner“ finden, wo noch weitere Zusammenstellungen hierüber gegeben sind. Jedenfalls wird das Streben, und das ist hier Hauptsache, gerechtfertigt erscheinen, Ordnung in diese Unsicherheit und systemlose Zerfahrenheit und Verwirrung zu bringen. Zu diesem Zweck ist auch eine Schrift von C. G. Scheibert erschienen unter dem Titel „Ein Versuch die Combinationslehre als Wissenschaft zu begründen und die Wort- und Zeichensprache in ihr festzustellen“. Ferner hat der Herr Herausgeber dieses Archivs schon längst (1. Supplem.-Bd. zu Klügel's Wörterbuch der Mathematik S. 409. u. f.) auf das Bedürfniss und die Nothwendigkeit hingewiesen, auf möglichste Vereinfachung der Bezeichnung in der Combinationslehre hinzuwirken und sich zu einer gleichförmigen und gemeinschaftlichen Bezeichnungsweise zu vereinigen. Diesem Bedürfnisse soll die von mir vorgeschlagene Bezeichnungsweise entgegen kommen. Ich bin weit entfernt, sie für die einzig richtige zu erklären. Sie soll eine Grundlage sein, auf welcher man weiter aufbauen kann. Der Vorzug dürfte ihr wenigstens zuzusprechen sein, dass man durch sie und auf ganz consequente und systematische Weise weiter gelangt, als man mit jeder der bisher vorgeschlagenen und angenommenen gekommen ist. Man verbessere oder suche sie zu verbessern. Genügt sie nicht und ist das Mangelhafte an ihr nachgewiesen, so verlasse man sie. Es wird immer ein Gewinn sein, auf dem Wege des Ungenügenden zu dem Bessern vorgeschritten zu sein.

Aus den hier vorgelegten Gründen kann ich mich auch nicht der Ansicht derer anschliessen, die bei der genannten Sachlage in der neuesten Zeit auf die Begriffsbestimmung und Benennung

aus der Zeit des ersten Anfangs der Combinationslehre von Hindenburg wieder zurückkehren, da sich diese Bestimmungen und Bezeichnungen den gemachten Bemerkungen zufolge ungenügend erweisen.

Diess ist der Fall in einer Abhandlung von Herrn Weiss, welche im 34. Bande S. 255. und 38. Bd. S. 107. in Crelle's Journal erschienen ist und den Titel führt: „Einige Aufgaben aus der Combinationslehre". Der von dem Verfasser gewählte Gegenstand ist gut und gründlich durchgearbeitet. Man findet aber dort „im Einklange mit ältern Werken" wie es heisst, die Definitionen, Eintheilung und Benennungen wieder, wie sie oben §. 3. von Hindenburg aufgestellt wurden, und wornach sie in „Permutationen, Combinationen und Variationen" (S. 255. Crelle's Journ.) zerfallen. Ich glaube es dem Urtheile des Lesers überlassen zu sollen, ob nach dem in §. 3. Gesagten diese Eintheilung zulässig ist oder nicht, und bedauere nur, dass der Verfasser, der mit sehr grosser Gewandtheit seinen Stoff behandelt hat, nicht Veranlassung genommen hat, die Gründe anzugeben, warum er diese Eintheilung und Benennung festhält, und warum eine Aenderung derselben, die sich meines Dafürhaltens im Laufe der Zeit doch schon fühlbar gemacht hat, unzulässig erscheinen dürfte. Es hätten sich gewiss hieran Anhaltpunkte zur Verbesserung und Berichtigung und dadurch unmittelbar oder mittelbar zur Feststellung der Begriffe und der Zeichen knüpfen lassen. Wir vermissen diess um so mehr, da Herr Weiss in seiner Abhandlung einen bisher noch wenig beachteten Zweig der Combinationslehre „die Combinationen (Versetzungen und Verbindungen) mit beschränkten Wiederholungen" behandelt hat, der ihm gewiss Gelegenheit zu weitern Andeutungen für richtige Bezeichnungsweise gegeben hätte. Den Gegenstand selbst hat er in einer Ausdehnung untersucht, wie er bisher in den hierher gehörigen Schriften nicht untersucht wurde. Ein Theil der einschlagenden Aufgaben findet sich von Herrn Professor Scherk (Mathematische Abhandlungen, Berlin 1825. S. 67.) bearbeitet, aber nicht bis zu dem Umfange fortgeführt, welchen der Verfasser ihm zu geben wusste.

Wenn nun der genannte Gegenstand auch von mir hier aufgegriffen wird, so geschieht diess einerseits deswegen, weil ich die Bedeutung dieses Gegenstandes in der Combinationslehre und den beiden angeführten Arbeiten gerne anerkenne, andererseits deswegen, weil sich diesem Gegenstand noch eine weitere Ansicht abgewinnen lässt, wodurch sich, im Hinblicke auf die zu erzielenden Resultate, die Ausbeute neuer Sätze noch steigert. Der Gegenstand wird aber hier nicht in seinem ganzen Umfang behandelt werden, da es sich nicht darum handelt, Bekanntes wiederzugeben, sondern nur in so weit, als die Entwicklungsweise verschieden ist, und soweit die Auffindung anderer Sätze etwa Vorbereitung erheischt. Hierbei werde ich mich der oben aufgestellten und in meiner Combinationslehre durchgeführten Bezeichnungsweise bedienen.

II.

Einige Sätze über die Verbindungen und Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen.

§. 6.

Unter

$$1)\qquad C(a_1,\ \overset{p}{a_2},\ a_3,\ \overset{r}{a_4},\ldots a_n)^{q}$$

werden die Gruppen der Verbindungen aus n Elementen zur $q$ten Classe verstanden und zwar so, dass in jeder einzelnen Gruppe das Element a_2 gerade $p$mal (nicht mehr nicht weniger) und das Element a_4 gerade $r$mal und gleichzeitig mit ihnen von den übrigen Elementen jedes nur einmal in der erforderlichen Ergänzung bis zur Classendimension (q) vorkommen soll. Dieser Begriff und das Zeichen 1) steht ganz analog mit dem, was schon längst durch das Zeichen

$$2)\qquad P(a_1,\ \overset{p}{a_2},\ a_3,\ \overset{r}{a_4},\ldots a_n)^{q}$$

ausgedrückt wird.

Die hiedurch bedingte Gruppenanzahl ergibt sich durch Ausscheidung der zu wiederholenden Elemente sehr leicht und es ist

$$3)\quad C[a_1,\overset{p}{a_2},a_3,\overset{r}{a_4},\ldots a_n]^q = \overset{p}{a_2}\overset{r}{a_4}\,C[a_1,a_3,a_5,\ldots a_n]^{q-p-r}$$
$$=(n-2)_{q-p-r}=\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n+p+r-q-1)}{1.2\ldots\ldots(q-p-r)}.$$

Das Gesetz trägt sich auf folgende Weise in's Allgemeine über:

$$4)\quad C[\overset{p_1}{a_1},\overset{p_2}{a_2},\ldots \overset{p_r}{a_r},a_{r+1},a_{r+2},\ldots a_n]^q$$
$$=\overset{p_1}{a_1}\overset{p_2}{a_2}\ldots\overset{p_r}{a_r}\,C[a_{r+1},a_{r+2}\ldots a_n]^{q-p_1-p_2\ldots-p_r}$$
$$=(n-r)_{q-p_1-p_2\ldots-p_r}=\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-q+p_1+p_2\ldots p_r+1)}{1.2\ldots\ldots(q-p_1-p_2-\ldots-p_r)},$$

wenn unter

$$5)\quad (m)_x=\frac{m^{x|-1}}{1^{x|1}}=\frac{m(m-1)\ldots(m-x+1)}{1.2\ldots\ldots x}$$

oder nach Legendre'scher Schreibart

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(m)}$$

verstanden wird. Der Kürze wegen werden wir im Folgenden uns gewöhnlich des Ausdrucks 5) bedienen.

In der vorstehenden Form ist der in 1), 3) und 4) liegende Begriff sehr enge und bald erschöpft. Bemerkt man aber, dass in den Gruppen der Verbindungen mit unbeschränkten Wiederholungen jedes Element für sich alle Wiederholungen bis zum Classenexponenten in allen zwischenliegenden Abstufungen durchlaufen kann, so lässt sich der in 1), 3) und 4) liegende Begriff er²weitern und man kann folgende Probleme zur Beantwortung vorlegen.

Die Gruppen der Verbindungen aus irgend einer Elementenzahl zur $q$ten Classe werden gebildet:

a) wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin eine bestimmte Anzahl von Elementen wenigstens einmal, eine andere wenigstens zweimal, eine dritte wenigstens dreimal u. s. w. wiederholt erscheint?

b) wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin eine bestimmte Anzahl von Elementen höchstens einmal, eine andere höchstens zweimal, eine dritte höchstens dreimal u. s. w. wiederholt erscheint?

Hieran schliessen sich noch folgende in anderer Beziehung nicht uninteressante Aufgaben an.

Die Gruppen der Verbindungen aus irgend einer Elementenzahl zur $q$ten Classe werden gebildet

c) wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin irgend eines der gegebenen Elemente wenigstens $r$mal wiederholt erscheint?

d) wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin es höchstens´$r$mal wiederholt erscheint?

Die unter a) aufgestellte Aufgabe soll so angedeutet werden:

$$6)\quad {}'C(a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \overset{2}{a}_{n_1+2}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{3}{a}_{n_2+1}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4} \ldots \overset{k}{a}_{n_k})^q.$$

Die unter b) aufgestellte so:

$$7)\quad {}^*C(\overset{k}{a}_1, \overset{k}{a}_2, \ldots \overset{k}{a}_{n_k}, \overset{k-1}{a}_{n_k+1}, \ldots \overset{k-1}{a}_{n_{k-1}}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \overset{2}{a}_{n_3+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, a_{n_2+1}, \ldots a_{n_1})^q.$$

In dem Symbole 6) liegen folgende Bedingungen: n_1 Elemente

$$(a_1, a_2, \ldots a_{n_1})$$

sollen wenigstens einmal; n_2 Elemente

$$(\overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2})$$

sollen wenigstens zweimal; n_3 Elemente

$$(\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \dots \overset{3}{a_{n_1}}, \dots \overset{3}{a_{n_2}}, \dots \overset{3}{a_{n_3}})$$

sollen wenigstens dreimal wiederholt u. s. w. in den zu bildenden Gruppen vorkommen. Diess liegt in der Natur der Sache. Denn wenn eine bestimmte Elementenzahl wenigstens einmal vorkommen soll, so muss sie auch zweimal, ferner dreimal u. s. w. und endlich $q$mal (so oft als der Exponent angiebt) vorkommen. Für die Gruppirung der wiederholenden Elementenzahlen ergibt sich daher hinsichtlich der Grösse folgende Bedingung:

$$8) \qquad n_1 < n_2 < n_3 < n_4, \dots < n_k.$$

Hiernach ist n_1 die kleinste und n_k die grösste Zahl. Die zwischen liegenden Werthe von n sind aufsteigend geordnet.

In dem Symbole 7) liegen folgende Bedingungen. n_1 Elemente

$$(a_1, a_2, a_3 \dots a_{n_1}),$$

also alle, sollen höchstens einmal; n_2 Elemente

$$(\overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \overset{2}{a_3} \dots \overset{2}{a_{n_2}})$$

sollen höchstens zweimal oder als Zweifaches; n_3 Elemente

$$(\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \overset{3}{a_3}, \dots \overset{3}{a_{n_3}})$$

sollen höchstens dreimal oder als Dreifaches u. s. w. vorkommen, wie diess auch hier in der Natur der Sache liegt. Es ist ferner n_1 die grösste und n_k die kleinste Zahl. Die übrigen Zahlenwerthe liegen zwischen beiden Grenzen in abnehmendem Werthe. Hieraus ergibt sich folgende Bedingung:

$$9) \qquad n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \dots > n_k.$$

k kann sich höchstens bis zu q erheben. Das Gesagte schliesst jedoch nicht aus, dass in 8) und 9)

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \dots$$

sein kann, oder dass die n alle unter einander oder partienweise unter einander gleich sein können.

Die Aufgaben unter c) und d) stellen sich durch folgende Symbole ganz einfach dar:

$$10) \qquad 'C(\overset{r}{a_1}, \overset{r}{a_2}, \overset{r}{a_3}, \dots \overset{r}{a_n})^q,$$

$$11) \qquad {}^*C(\overset{r}{a_1}, \overset{r}{a_2}, \overset{r}{a_3}, \dots \overset{r}{a_n})^q.$$

Wird $r=1$ in 10), so fällt die Bedeutung von 10) mit $'C(a_1, a_2, \dots a_n)^q$ zusammen, denn es entstehen sofort die Gruppen der Verbindun-

gen mit unbeschränkten Wiederholungen aus n Elementen zur $q$ten Classe, denn es sollen die Gruppen der Verbindungen gebildet werden, worin jedes Element wenigstens einmal vorkommt. Wird $r=q$ in 11), so fällt 11) mit dem nämlichen Begriff zusammen, denn es sollen die Gruppen der Verbindungen aus n Elementen zur $q$ten Classe gebildet werden, worin jedes Element höchstens $q$mal wiederholt vorkommen soll. Mehr als $q$mal kann es nicht wiederholt vorkommen.

Manche werden vielleicht die Symbole 6) und 7) als schwerfällig tadeln. Ich glaube aber nicht, dass dieser Vorwurf gerecht ist, wenn man bedenkt, wie viele Worte erfordert werden, um den Sinn derselben nach *a*) und *b*) anzudeuten, und ferner bedenkt, wie viele Bedingungen in die Zeichen nach dem Inhalte der Aufgabe gelegt werden müssen, die alle anzugeben in Worten noch viel umständlicher ist, und wenn man endlich berücksichtigt, wie mühsam es wird aus den Worten die Bedingungen der Aufgabe sich klar zu machen, was alles durch das Symbol sehr veranschaulicht wird.

Die unter *a*)—*d*) aufgestellten Probleme lassen sich auf die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen anwenden. Die Uebertragung auf die Versetzungen wird dadurch leicht bewirkt, dass man in die Verbindungsgruppen die zugehörigen Versetzungszahlen einführt.

§. 7.

Die im vorigen Paragraphen vorgelegten Aufgaben lassen sich durch die besondere Art von Combinationen lösen, die sich im 5ten Abschnitte meiner Combinationslehre §. 31 — §. 37. S. 73 u. ff. aufgeführt finden, und die durch den Zusammentritt mehrerer Elementenreihen entstehen. Die Gleichung, welche zur Beantwortung dient, ist §. 36. Nro. 112. S. 85. angegeben und folgende:

1) $$C[a_1, a_2, \dots a_n;\ b_1, b_2, \dots b_m; c_1, c_2, \dots c_o; \dots]^{h,k,l,\dots}$$

$$= \frac{n^{h|-1}(m-h)^{k|-1}(o-h-k)^{l|-1}\dots}{1^{h|1}.1^{k|1}.1^{l|1}\dots} = (n)_h(m-h)_k(o-h-k)_l\dots$$

Diese Gleichung bestimmt die Gruppenanzahl der Verbindungen, wenn h Elemente der ersten Elementenreihe, mit k nicht ähnlichen (ungleichartigen) Elementen aus der zweiten und beide mit weitern l nicht ähnlichen oder ungleichartigen aus der dritten Elementenreihe u. s. w. zusammen treten. Unter ähnlichen oder gleichartigen Elementen werden nämlich solche verstanden, welche verschiedenen Elementenreihen zugehören, aber die gleichen Stellenzahlen führen, also die ersten, zweiten, dritten Elemente u. s. w. in den verschiedenen Elementenreihen, wie z. B.

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots..$$

$$a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots..$$

u. s. f. Die Gleichung 1) hat das Eigenthümliche, dass bei den nämlichen Elementenreihen und Classenexponenten die veränderte Ordnung, worin die Elementenreihen mit ihren zugehörigen Classenexponenten auf einander folgen, verschiedene Gruppenanzahlen erzeugt. (S. Combinationslehre S. 74. und 75). Die Gruppenanzahl wird am grössten, wenn die Elementenreihen nach der Zahl ihrer Elemente geordnet werden, so dass die Elementenzahl jeder nachfolgenden Reihe die der vorhergehenden an Grösse übertrifft. Diese Anordnung wird im Folgenden vorausgesetzt und ist schon in 8) §. 6. vorausgesehen. Wird eine andere Anordnung verlangt, oder bedingt, so ändert sich damit die Gruppenzahl.

Die Gleichung 1) kann nun dadurch für den vorliegenden Zweck bei Bildung der Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen benutzt werden, dass man unter den Elementen der verschiedenen Reihen beziehlich solche Elemente versteht, welche als **einfache** oder **gerade einmal wiederholt**, welche als **zweifache** oder **gerade zweimal wiederholt**, als **dreifache** u. s. w. zu betrachten sind. Hiernach ist z. B.

$$C[a_1, a_2, \ldots. a_n; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots. \overset{2}{a_m}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots. \overset{3}{a_p}]^{3,2,1}$$

$$= (n)_3.(m-3)_2(p-5)_1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} \cdot \frac{p-5}{1}$$

und man erhält die Gruppenanzahl der Verbindungen, worin drei unter sich verschiedene Elemente der ersten Reihe als **einfache** oder **gerade einmal wiederholt**, mit zwei weitern unter sich und von den andern verschiedenen Elementen der zweiten Reihe als **zweifache** oder **gerade zweimal wiederholt** und beide sofort mit je einem weitern, von sämmtlichen vorhergehenden verschiedenen Elemente aus der dritten Reihe als **dreifaches** oder **gerade dreimal wiederholt** erscheint. Die hierdurch entstehenden Gruppen gehören der (3.1 + 2.2 + 1.3)ten oder 10ten Classe an. Die allgemeine Darstellung für dieses Gesetz ist

$$2) \quad C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{k}{a_1}, \overset{k}{a_2}, \ldots \overset{k}{a_{n_k}}]^{q_1, q_2, q_3, \ldots}$$

$$= (n_1)_{q_1}.(n_2-q_1)_{q_2}.(n_3-q_1-q_2)_{q_3} \ldots. (n_k-q_1-q_2-\ldots-g_{k-1})_{q_k}$$

$$= \frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-q_1+1)}{1.2\ldots q_1} \cdot \frac{(n_2-q_1)(n_2-q_1-1)\ldots(n_2-q_1-q_2+1)}{1.2\ldots. q_2} \ldots$$

Da diese Darstellung die Grundlage des Calculs bildet, so soll ein besonderer Fall zur bessern Einsicht und Erleichterung des Ueberblickes hier stehen:

3) $C(a_1, a_2, a_3, a_4; a_1^2, a_2^2, \ldots a_5^2, a_6^2; a_1^3, a_2^3, \ldots a_6^3, a_7^3)^{3,2,1}$

$=a_1 a_2 a_3$	$a_4 a_4$	$a_5 a_5$	$a_6 a_6 a_6$	$+\ a_1 a_2 a_4$	$a_3 a_3$	$a_5 a_5$	$a_6 a_6 a_6$
1 2 3	4 4	5 5	7 7 7	1 2 4	3 3	5 5	7 7 7
1 2 3	4 4	6 6	5 5 5	1 2 4	3 3	6 6	5 5 5
1 2 3	4 4	6 6	7 7 7	1 2 4	3 3	6 6	7 7 7
1 2 3	5 5	6 6	4 4 4	1 2 4	5 5	6 6	3 3 3
1 2 3	5 5	6 6	7 7 7	1 2 4	5 5	6 6	7 7 7
$+\ a_1 a_3 a_4$	$a_2 a_2$	$a_5 a_5$	$a_6 a_6 a_6$	$+\ a_2 a_3 a_4$	$a_1 a_1$	$a_5 a_5$	$a_6 a_6 a_6$
1 3 4	2 2	5 5	7 7 7	2 3 4	1 1	5 5	7 7 7
1 3 4	2 2	6 6	5 5 5	2 3 4	1 1	6 6	2 2 2
1 3 4	2 2	6 6	7 7 7	2 3 4	1 1	6 6	7 7 7
1 3 4	5 5	6 6	2 2 2	2 3 4	5 5	6 6	1 1 1
1 3 4	5 5	6 6	7 7 7	2 3 4	5 5	6 6	7 7 7

Diese Darstellung umfasst die Gruppen mit beschränkten Wiederholungen zur 10ten Classe aus sieben Elementen, worin je drei Elemente von den vier ersten gerade einmal mit je zwei andern Elementen von den sechs ersten gerade zweimal und mit je einem weitern Elemente von den sieben ersten gerade dreimal wiederholt zusammen vorkommen. Die Elemente a_5 und a_6 dürfen daher nicht weniger als zweimal, das Element a_7 nicht weniger als dreimal vorkommen, wie klar vorliegt. Die Gruppenanzahl des vorliegenden Falles ist

4) $$C[a_1, a_2, \ldots a_4; a_1^2, \ldots a_6^2; a_1^3, a_2^3, \ldots a_7^3]^{3,2,1}$$
$$=(4)_3(6-3)_2(7-5)_1 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{3.2}{1.2} \cdot \frac{2}{1} = 24.$$

Sollen nun die für die Verbindungen aufgefundenen Sätze 1)—3) auf die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen unter den gleichen Prämissen übergetragen werden, so wird diess sich leicht bewerkstelligen lassen. Betrachtet man nemlich die Darstellung 3), so zeigt sich klar, dass jede Gruppe gleichviel verschiedene und gleichviel wiederholte Elemente führt. Man findet daher für jede einzelne Gruppe nach §. 9. meiner Combinationslehre aus der bekannten Formel die verlangte Versetzungszahl. Da nun jede Gruppe demselben Gesetze unterliegt, so hat man die Gesammtzahl der Gruppen mit der für jede einzelne Gruppe geltenden Versetzungszahl zu vervielfachen. Hiernach ist für den besondern mit 3) correspondirenden Fall

$$P[a_1, a_2, \ldots a_4; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_6}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_7}]^{3,2,1}$$
$$= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2.1.2.3} \times (4)_3 (6-3)_2 (7-5)_1 = 3628800$$
$$= \frac{(3.1+2.2+1.3)^{3.1+2.2+1.3|-1}}{(1^{1|1})^3 . (1^{2|1})^2 . 1^{3|1}} (4)_3 (6-3)_2 (7-5)_1 .$$

Um nun den in 2) aufgestellten Satz auf die Versetzungen überzutragen, hat man jede Gruppe so vielmal zu nehmen, als sich die in ihr vorkommenden Elemente unter einander versetzen lassen.

Es kommen nun in jeder Gruppe vor q_1 Elemente je einmal wiederholt, q_2 Elemente je zweimal, q_3 Elemente je dreimal u. s. w. und endlich q_k Elemente je k mal wiederholt. Daher hat die Dimension der zugehörigen Classe oder der Classenexponent

5) $$q = 1.q_1 + 2.q_2 + 3.q_3 + 4.q_4 + \ldots k.q_k$$

Einheiten. Die hiedurch bedingte Versetzungszahl ist sofort

6) $$\frac{q^{q|-1}}{(1^{1|1})^{q_1} (1^{2|1})^{q_2} (1^{3|1})^{q_3} \ldots (1^{k|1})^{q_k}}$$
$$= \frac{q(q-1)(q-2) \ldots 3.2.1}{(1)^{q_1} (1.2)^{q_2} (1.2.3)^{q_3} \ldots (1.2.3 \ldots k)^{q_k}}$$

mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung 5). Die gesuchte Gruppenanzahl der Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen ist sofort unter den oben angegebenen Voraussetzungen

7) $$P[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}; \ldots \overset{k}{a_1}, \overset{k}{a_2}, \ldots \overset{k}{a_{n_k}}]^{q_1, q_2, \ldots q_k}$$
$$= \frac{1.2.3 \ldots q}{(1)^{q_1} (1.2)^{q_2} (1.2.3)^{q_3} \ldots (1.2.3 \ldots k)^{q_k}} (n_1)_{q_1} (n_2 - q_1)_{q_2} \ldots$$
$$\ldots (n_k - q_1 - q_2 \ldots - q_{k-1})_{q_k} .$$

Die Gleichungen 2) und 7) vereinfachen sich sehr, wenn die Zahl der Elemente in den verschiedenen Reihen gleich und

$$n_1 = n_2 = \ldots n_k = n$$

ist. Für diesen Fall nehmen die begleitenden Fakultäten folgende Gestalt an:

$$\frac{n^{q_1 + q_2 + \ldots q_k|-1}}{1.2 \ldots q_1 . 1.2 \ldots q_2 \ldots 1.2 \ldots q_k}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n - q_1 - q_2 \ldots - q_k + 1)}{1.2 \ldots q_1 . 1.2 \ldots q_2 \ldots 1.2.3 \ldots q_k} .$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in so weit noch verallgemeinern als die Wiederholungsexponenten, welche in einer bestimmten Reihenfolge (1, 2, 3 .....) bisher genommen wurden, auch beliebig angenommen werden können. Diese Bemerkung führt zu folgenden allgemeinen Formen:

8) $$C[\overset{k_1}{a_1}, \ldots\ldots \overset{k_1}{a_{n_1}}; \overset{k_2}{a_1}, \ldots \overset{k_2}{a_{n_2}} \ldots\ldots \overset{k_k}{a_1}, \overset{k_k}{a_2} \ldots\ldots \overset{k_k}{a_{n_k}}]^{q_1, q_2, \ldots\ldots q_k}$$
$$= (n_1)_{q_1} (n_2 - q_1)_{q_2} (n_3 - q_1 - q_2)_{q_3} \ldots\ldots (n_k - q_1 - q_2 \ldots\ldots - q_{k-1})_{q_k}.$$

9) $$P[\overset{k_1}{a_1}, \overset{k_1}{a_2}, \ldots \overset{k_1}{a_{n_1}}; \overset{k_2}{a_1}, \ldots\ldots \overset{k_2}{a_{n_2}}; \ldots\ldots \overset{k_k}{a_1}, \ldots\ldots \overset{k_k}{a_{n_k}}]^{q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_k}$$
$$= \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots q}{(1.2 \ldots\ldots k_1)^{q_1} (1.2 \ldots\ldots k_2)^{q_2} \ldots (1.2.3 \ldots k_k)^{q_k}} (n_1)_{q_1} (n_2 - q_1)_{q_2} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (n_k - q_1 - q_2 \ldots\ldots - q_{k-1})_{q_k}$$

mit der Bedingung, dass in 9) ist

10) $$q = k_1 q_1 + k_2 q_2 + k_3 q_3 \ldots\ldots k_k q_k.$$

Willkührlich ist in diesen Darstellungen

a) die Zahl der Elemente, welche in den einzelnen Reihen vorkommen,

$$n_1; \; n_2; \; n_3 \ldots\ldots n_k$$

mit der in 8) §. 6. angegebenen Beschränkung;

b) die Wiederholungszahlen

$$k_1, \; k_2, \; k_3 \ldots\ldots k_k;$$

c) die Exponenten

$$q_1, \; q_2, \; q_3 \ldots\ldots q_k,$$

welche sich auf die verschiedenen Reihen beziehen. (Vertheilungsexponenten).

Der Classenexponent ist eine Funktion der k und q, also von diesen nach Massgabe der Gleichung 10) abhängig.

Anders stellt sich die Sache, wenn die im vorigen Paragraphen unter *a*) bis *d*) gestellten Fragen beantwortet werden sollen. In diesem Falle sind dann die Wiederholungsexponenten (1,2,3...k) der Elemente und der Classenexponent (q), der für 2) und 7), 8) und 9) gilt, gegeben und man hat nach dem Gesetze der Gleichungen 5) und 10) die Vertheilungsexponenten $q_1, \; q_2, \; q_3 \ldots\ldots q_k$ aus dem Classenexponenten und den Wiederholungsexponenten abzuleiten. Dadurch wird die Aufgabe im Allgemeinen zu einer

unbestimmten. Sie wird jedoch für jeden besondern Fall lösbar und die Auflösung besteht dann darin, dass man alle in ihr enthaltenen besondern Fälle specialisirt und nach den vorstehenden Gleichungen behandelt. Der Inbegriff aller hierdurch erhaltenen Gruppenzahlen ist dann die Antwort auf die in §. 6. vorgelegten Fragen. Wir erörtern zu dem Ende die verschiedenen Classen, daraus wird sich dann ein Bildungsgesetz ableiten lassen.

§. 8.

1) Die Gruppenzahl der Verbindungen zur zweiten Classe soll bestimmt werden

$$'C[a_1,\ a_2, \ldots a_{n_1},\ \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}]^2,$$

worin n_1 Elemente wenigstens einmal und n_2 Elemente zweimal wiederholt erscheinen.

Die Aufgabe umschliesst zwei Fälle. n_1 Elemente sollen als einfache gerade zweimal und n_2 als zweifache erscheinen. Es ist aus 2) §. 7.

$$C[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_1}]^{2,0} = (n_1)_2 = \frac{n(n-1)}{1.2},$$

$$C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}]^{0,1} = (n_2)_1 = n_2.$$

2) Die Gruppenzahl soll bestimmt werden für

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{3}{a}_{n_2+1}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^3.$$

Diese Aufgabe umfasst drei Fälle. n_1 Elemente sollen als einfache gerade dreimal; n_2 Elemente sollen als zweifache mit n_1 Elementen als einfache und n_3 Elemente sollen als dreifache erscheinen. Aus 2) §. 7. ist

$$C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}; \overset{3}{a}_1, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^{3,0,0} = (n_1)_3 = \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)}{1.2.3},$$

$$C[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1 \ldots \overset{2}{a}_{n_2}; \overset{3}{a}_1, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^{1,1,0} = (n_1)(n_2-1) = n_1(n_2-1),$$

$$C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}; \overset{2}{a}_1, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}; \overset{3}{a}_1, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^{0,0,1} = (n_3)_1 = n_3.$$

Man erkennt schon hieraus, dass das Specialisiren der einzelnen Fälle, das sich bei den höhern Classen mehrt, ziemlich

weitläufig wird. Wir wollen es dadurch abkürzen, dass wir für die n_1 Elemente, welche als einfache erscheinen sollen, das Zeichen e^1 als Repräsentanten; für die n_2 Elemente, die als zweifache erscheinen sollen, das Zeichen e^2 als Repräsentanten wählen u. s. w. Hiernach werden die Elemente bezeichnet werden, wie folgt:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_{n_1} \text{ durch } e^1,$$

$$\overset{2}{a}_1,\ \overset{2}{a}_2,\ \overset{2}{a}_3, \ldots \overset{2}{a}_{n_2} \text{ durch } e^2,$$

$$\overset{3}{a}_1,\ \overset{3}{a}_2,\ \overset{3}{a}_3, \ldots \overset{3}{a}_{n_3} \text{ durch } e^3$$

u. s. f. Soll nun die Gruppenzahl bestimmt werden für

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{3}{a}_{n_2+1} \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}]^4,$$

so ergeben sich folgende Fälle. n_1 Elemente sollen als einfache gerade viermal erscheinen; n_2 Elemente sollen als zweifache einmal mit n_1 Elementen als einfache zweimal; n_2 Elemente als zweifache zweimal; n_3 Elemente als dreifache einmal mit n_1 Elementen als einfache einmal; n_4 Elemente als vierfache einmal. Wir deuten diess durch die e^1, e^2, e^3 an und führen dabei diese Symbole zwischen Gleichheitszeichen mit auf, wodurch allmälig das Bildungsgesetz hervortreten wird. Nach 2) §. 7. ist

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{4,0,0,0} = e^1e^1e^1e^1 = (e^1)^4 = (n_1)_4,$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{2,1,0,0} = e^1e^1e^2 = (e^1)^2e^2 = (n_1)_2(n_2-2)_1,$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{0,2,0,0} = e^2e^2 = (e^2)^2 = (n_2)_2,$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{1,0,1,0} = e^1e^3 = (n_1)_1(n_3-1),$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4]^{0,0,0,1} = e^4 = n_4.$$

4) Die Gruppenzahl soll bestimmt werden für

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}]^5.$$

Die Aufgabe umschliesst die Fälle: n_1 Elemente sollen als einfache fünfmal erscheinen; n_2 Elemente als zweifache einmal mit n_1 Elementen als einfache dreimal; n_2 Elemente als zweifache zweimal mit n_1 Elementen als einfache; n_3 Elemente als dreifache mit n_1 Elementen als einfache zweimal; n_3 Elemente als dreifache mit n_2 Elementen als zweifache; n_4 Elemente als vierfache mit n_1 Elementen als einfache; n_5 Elemente als fünffache. Aus 2) §. 7. ist

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4, e^5]^{5,0,0,0,0} = e^1e^1e^1e^1e^1 = (e^1)^5 = (n_1)_5,$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4, e^5]^{3,1,0,0,0} = e^1e^1e^1e^2 = (e^1)^3e^2 = (n_1)_3(n_2-3)_1$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4, e^5]^{1,2,0,0,0} = e^1e^2e^2 = e^1(e^2)^2 = (n_1)_1(n_2-1)_2,$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4, e^5]^{2,0,1,0,0} = e^1e^1e^3 = (e^1)^2e^3 = (n_1)_2(n_3-2),$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4, e^5]^{0,1,1,0,0} = e^2e^3 = (n_2)_1(n_3-1),$$

$$C[e^1, e^2, e^3, e^4, e^5]^{0,0,0,0,1} = e^5 = (n_5)_1.$$

Schon aus den Darstellungen 3) und 4) erkennt man durch die Exponenten der e das Fortgangsgesetz. Sie bilden die Verbindungen mit Wiederholungen zu derjenigen Summe, welche der Classenexponent angibt, durch alle möglichen Classen, oder die Zerfällungen des Classenexponenten in alle möglichen Zahlen, zu einem, zweien, dreien Gliedern u. s. f. In Nro. 3) entsteht die Summe 4, in 4) entsteht die Summe 5) aus den Elementen 1, 2, 3.... mit Wiederholungen.

Man hat nun nicht mehr nöthig alle Verbindungsausdrücke zum Voraus darzustellen, um die nöthigen Specialisirungen zu erhalten. Man kann sogleich mit Darstellung der Gruppen der e beginnen, und die Auffindung aller zusammengehörigen Fälle sich dadurch erleichtern, dass man mit e^1 (dem Exponenten in der ersten Dimension als Einfaches) beginnt, und diesen so oft wiederholt bis der Classenexponent erzeugt ist. Hierauf nimmt man e^2 (den Exponenten in der zweiten Dimension) und lässt so oft e^1 und e^2 (beide zuerst getrennt und dann in Verbindung mit einander) zutreten, bis auf jede mögliche Weise die zu bildende Summe erzeugt ist. Hierauf nimmt man e^3 (den Exponenten in der dritten Dimension oder den Repräsentanten der dreifachen) und lässt so oft e^1, e^2, e^3 (getrennt und in Verbindung mit einander) zutreten, bis die zu bildende Summe auf jede mögliche Weise hervorgebracht ist, und steigt so allmälig zu den höhern Dimensionen auf, bis alle durchlaufen und alle möglichen Fälle durch Zutreten der gleichen und niedern Dimensionen erschöpft sind.

Soll nun die Gruppenzahl für

5) $$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots . \overset{6}{a}_{n_6}]^6$$

angegeben werden, so hat man hiernach folgende Specialisirung und Zusammenstellung:

$$
\begin{aligned}
& e^1e^1e^1e^1e^1e^1 = (e^1)^6, \\
& e^1e^1e^1e^1e^2 + e^1e^1e^2e^2 + e^2e^2e^2 = (e^1)^4e^2 + (e^1)^2(e^2)^2 + (e^2)^3, \\
& e^1e^1e^1e^3 + e^1e^2e^3 + e^3e^3 = (e^1)^3e^3 + e^1e^2e^3 + (e^3)^2, \\
& e^1e^1e^4 + e^2e^4 = (e^1)^2e^4 + e^2e^4, \\
& e^1e^5 = e^1e^5, \\
& e^6 = e^6.
\end{aligned}
$$

Hiefür ergeben sich nun folgende Zahlenausdrücke aus 2) §. 7.

$$
\begin{aligned}
6) \quad & (n_1)_6 + (n_1)_4(n_2-4)_1 + (n_1)_2(n_2-2)_2 + (n_2)_3 \\
& + (n_1)_3(n_3-3)_1 + (n_1)(n_2-1)(n_3-2) + (n_3)_2 \\
& + (n_1)_2(n_4-2)_1 + n_2(n_4-1)_1 \\
& + n_1(n_5-1) + (n_6)_1.
\end{aligned}
$$

Vergleicht man nun die Darstellung 6) mit der Darstellung der e aus 5) auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so kann man die Zahlenausdrücke in 6) direct aus jenen und ohne Beihülfe von 2) §. 7. erhalten, wenn man die Exponenten der e innerhalb der Klammer als Stellenzahlen von n schreibt und die Exponenten ausserhalb der Klammern als Fakultätsexponenten anhängt. Bei dem Zutritt von einem neuen n muss immer die Summe der vorhergehenden Fakultätsexponenten abgezogen werden. Kommt bei einem e kein Exponent ausserhalb der Klammer vor, so ist immer die Einheit als solcher anzunehmen.

Wird nun zu weiterer Verdeutlichung noch der Ausdruck

$$
7) \quad C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{7}{a}_{n_7}]^7
$$

nach dieser Methode behandelt, so hat man sofort als Schema für die e

$$
\begin{aligned}
& e^1e^1e^1e^1e^1e^1e^1 = (e^1)^7, \\
& e^1e^1e^1e^1e^1e^2 + e^1e^1e^1e^2e^2 + e^1e^2e^2e^2 = (e_1)^5e^2 + (e^1)^3(e^2)^2 + e^1(e^2)^3, \\
& e^1e^1e^1e^1e^3 + e^1e^1e^2e^3 + e^1e^3e^3 + e^2e^2e^3 = (e^1)^4e^3 + (e^1)^2e^2e^3 + e^1(e^3)^2 + (e^2)^2e^3 \\
& e^1e^1e^1e^4 + e^1e^2e^4 + e^3e^4 = (e^1)^3e^4 + e^1e^2e^4 + e^3e^4, \\
& e^1e^1e^5 + e^2e^5 = (e^1)^2e^5 + e^2e^5, \\
& e^1e^6 + e^7 = e^1e^6 + e^7.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergiebt sich sofort folgende Gruppenzahl für 7):

$$(n_1)_7 + (n_1)_5(n_2-5) + (n_1)_3(n_2-3)_2 + n_1(n_2-1)_3$$
$$+ (n_1)_4(n_3-4) + (n_1)_2(n_2-2)(n_3-3) + n_1(n_3-1)_2$$
$$+ (n_1)_3(n_4-3) + n_1(n_2-1)(n_4-2) + n_3(n_4-1)$$
$$+ (n_1)_2(n_5-2) + n_2(n_5-1)$$
$$+ n_1(n_6-1) \quad + n_7 .$$

Diese Untersuchungen führen nun zu folgender Zusammenstellung:

$$8) \qquad 'C[a_1, a_2, \ldots a_n]^1 = n,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}]^2 = (n_1)_2 + n_2,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^3 = (n_1)_3 + n_1(n_2-1) + n_3,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}]^4 =$$
$$= (n_1)_4 + (n_1)_2(n_2-2) + (n_2)_2 + n_1(n_3-1) + n_4,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}]^5 =$$
$$= (n_1)_5 + (n_1)_3(n_2-3) + n_1(n_2-1)_2$$
$$+ (n_1)_2(n_3-2) + n_2(n_3-1) + n_1(n_4-1) + n_5,$$

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \overset{6}{a}_{n_6}]^6 =$$
$$= (n_1)_6 + (n_1)_4(n_2-4) + (n_1)_2(n_2-2)_2 + (n_2)_3$$
$$+ (n_1)_3(n_3-3) + n_1(n_2-1)(n_3-2) + (n_3)_2$$
$$+ (n_1)_2(n_4-2) + n_2(n_4-1) + n_1(n_5-1) + n_6$$

u. s. f.

In allen den vorliegenden Problemen findet sich die Forderung, dass eine bestimmte Zahl Elemente wenigstens einmal, eine zweite wenigstens zweimal wiederholt vorkommen soll u. s. f. Es können nun in den Wiederholungszahlen auch Unterbrechungen vorkommen. Diess ändert die Schlussweise und Bildungsmethode in nichts, und man hat die zwischenliegenden fehlenden Wiederholungszahlen sämmtlich der nächstvorhergehenden niedern gleich zu setzen und dann nach der Zusammenstellung 8) die erforderlichen Gruppenzahlen anzugeben. Oder man hat nach der oben angegebenen Vorschrift das Schema der e ohne Rücksicht der n_1, n_2, n_3 .... zu entwerfen und nach Massgabe desselben die zugehörigen Gruppenzahlen (2) §. 7.) abzuleiten. Ist z. B.

$$'C[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{4}{a}_{n_2+1}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}]^5$$

zu bestimmen, so fehlt die Wiederholungszahl 3, und die ihr zugehörige Elementenzahl n_3. Sie ist durch n_2 zu ersetzen, denn das Schema 4) bleibt in Kraft, da n_2 Elemente auch dreimal (weil wenigstens zweimal) vorkommen sollen. Man hat sofort

$$9)\qquad {}'C[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \overset{4}{a}_{n_2+1}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}]^5 =$$
$$= (n_1)_5 + (n_1)_3(n_2-3) + n_1(n_2-1)_2$$
$$+ (n_1)_2(n_2-2) + n_2(n_2-1) + n_1(n_4-1) + n_5.$$

Eben so ist

$$10)\qquad {}'C[a_1, a_2 \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^6 =$$
$$= (n_1)_6 + (n_1)_4(n_2-1) + (n_1)_2(n_2-2) + (n_2)_3$$
$$+ (n_1)_3(n_3-3) + n_1(n_2-1)(n_3-2) + (n_3)_2$$
$$+ (n_1)_2(n_3-2) + n_2(n_3-1) + n_1(n_3-1) + n_3.$$

Die Anwendung auf besondere Fälle ergibt sich nun sehr leicht. Man hat nämlich für den besondern Fall

$$'C[a_1, a_2, \ldots a_8, \overset{2}{a}_9, \overset{3}{a}_{10}, \overset{3}{a}_{11}, \overset{4}{a}_{12}, \overset{5}{a}_{13}, \overset{5}{a}_{13}]^5 =$$
$$= 974 = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} + \frac{8.7.6}{1.2.3}.5 + 8.\frac{7.6}{1.2} + \frac{8.7}{1.2}.10 + 8.11 + 8.11 + 14.$$

Denn es ist

$$n_1 = 8,\ n_2 = 8,\ n_3 = 12,\ n_4 = 12,\ n_5 = 14.$$

Bei allen diesen Gebilden ist Bedingung, dass sich die Wiederholungszahlen bis zum Classenexponenten erheben müssen. Fehlen die spätern, so ist stillschweigende Bedingung, dass sie bis dahin fortgeführt werden. Fehlen aber frühere Wiederholungszahlen, so fallen alle die Gebilde der e aus dem Schema weg und deswegen sind auch die n, welche die fehlende Stellenzahl tragen, in den Darstellungen von 8) gleich 0 zu setzen. Es liegt alsdann die Aufgabe vor, die Summen der Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen in den verschiedenen Classen mit ausgeschlossenen Anfangselementen zu bilden und darauf die Gleichung 2) §. 7. anzuwenden.

Hiernach ist z. B.

$$11)\quad {}'C[\overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{6}{a}_{n_6}]^6 = e^2e^2e^2 + e^2e^4 + e^3e^3 + e^6$$
$$= (n_2)_3 + n_2(n_4-1) + (n_3)_2 + n_6,$$

$$'C[\overset{3}{a}_1, \overset{3}{a}_2, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{9}{a}_{n_9}]^9 = e^3e^3e^3 + e^3e^6 + e^4e^5 + e^9$$
$$= (n_3)_3 + n_3(n_6-1) + n_4(n_5-1) + n_9.$$

§. 9.

Die nämliche Schlussfolgerung, so wie die im vorigen Paragraphen entwickelte Methode, gilt auch für die in 7) §. 6 gestellte Aufgabe

$$^*C(\overset{k}{a}_1, \overset{k}{a}_2, \ldots \overset{k}{a}_{n_k}; \ldots \overset{k-1}{a}_{n_{k-1}}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots a_{n_1}]^q.$$

Man hat zur Darstellung der Gruppenzahlen die nämlichen Schemata der e zu entwerfen. Die Symbole e^1, e^2, e^3, ... vertreten dann der Reihe nach die Elemente

$$a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}; \overset{3}{a}_1, \overset{3}{a}_2, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}; \ldots$$

jedoch mit dem Unterschiede, dass hier

$$n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \ldots > n_k$$

ist, und dadurch die n_1, n_2, n_3, ... in der entwickelten Darstellung die umgekehrte Ordnung wie in §. 8. einnehmen.

Berücksichtigt man diess, was sich leicht durch Specialisirung einiger Fälle rechtfertigt, so hat man sofort zur Darstellung der gesuchten Gruppenzahlen Folgendes:

1) $^*C(a_1, a_2, \ldots a_n]^1 = n;$

$$^*C[\overset{2}{a}_1, \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, a_{n_2+1}, \ldots a_{n_1}]^2 = (n_1)_2 + n_2,$$

$$^*C[\overset{3}{a}_1, \overset{3}{a}_2, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots a_{n_1}]^3 = (n_1)_3 + n_2(n_1-1) + n_3,$$

$$^*C[\overset{4}{a}_1, \overset{4}{a}_2, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots a_{n_1}]^4 = (n_1)_4 + n_2(n_1-1)_2 + (n_2)_2$$
$$+ n_3(n_1-1) + n_4,$$

$$^*C[\overset{5}{a}_1, \overset{5}{a}_2, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots a_{n_1}]^5 =$$
$$= (n_1)_5 + n_2(n_1-1)_3 + (n_2)_2(n_1-2) + n_3(n_1-1)_2$$
$$+ n_3(n_2-1) + n_4(n_1-1) + n_5,$$

$$^*C[\overset{6}{a}_1, \overset{6}{a}_2, \ldots \overset{6}{a}_{n_6}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots a_{n_1}]^6 =$$
$$= (n_1)_6 + n_2(n_1-1)_4 + (n_2)(n_1-2)_2 + (n_2)_3$$
$$+ n_3(n_1-1)_3 + n_3(n_2-1)(n_1-2) + (n_3)_2$$
$$+ n_4(n_1-1)_2 + n_4(n_2-1) + n_5(n_1-1) + n_6$$

u. s. w, Die Wiederholungszahlen und die mit ihnen correspondirenden Stellenzahlen der n können sich höchstens bis zum Classenexponenten erheben. Fehlen die höhern Wiederholungszahlen von oben herab, so fallen die sie vorstellenden e aus dem Schema und die n mit den correspondirenden Stellenzahlen werden 0. Fehlt eine zwischenliegende Wiederholungszahl, oder mehrere, so tritt so lange die nächst höhere Wiederholungszahl an ihre Stelle, bis wieder andere folgen. Fehlen die niedersten, so ergänzt die nächst höhere sämmtliche fehlende Stellen. Hiernach ist z. B.

$$2)\ {}^*C[\overset{5}{a_1},\ \overset{5}{a_2},\ldots \overset{5}{a_{n_5}},\ldots \overset{4}{a_{n_4}},\ldots \overset{3}{a_{n_3}}]^5 =$$
$$=(n_3)_5+n_3(n_3-1)_3+(n_3)_2(n_3-2)+n_3(n_3-1)_2$$
$$+n_3(n_3-1)+n_4(n_3-1)+n_5,$$

denn es ist $n_1=n_3$, $n_2=n_3$, weil $a_1, a_2, \ldots a_{n_3}$ Elemente höchstens dreimal, also auch zweimal und einmal vorkommen sollen, und ferner

$$3)\ {}^*C[\overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2},\ldots \overset{4}{a_{n_4}},\ldots \overset{3}{a_{n_3}},\ldots \overset{2}{a_{n_2}}\ldots a_{n_1}]^6 =$$
$$=(n_1)_6+n_2(n_1-1)_4+(n_2)_2(n_1-2)_2+(n_2)_3$$
$$+n_3(n_1-1)_3+n_3(n_2-1)(n_1-2)+(n_3)_2$$
$$+n_4(n_1-1)_2+n_4(n_2-1),$$

weil keine fünf- und sechsfachen Elemente, also auch nicht n_5 und n_6 vorkommen sollen u. s. w. Die besondern Fälle bestimmen sich leicht. So ist nach 1)

$${}^*C[\overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2},\ldots \overset{4}{a_6},\ \overset{2}{a_7},\ \overset{2}{a_8},\ \overset{2}{a_9}]^5 = 1146$$
$$=\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}+9.\frac{8.7.6}{1.2.3}+\frac{9.8}{1.2}.7+6.\frac{8.7}{1.2}+6.8+6.8,$$

denn es ist

$$n_1=9,\ n_2=9,\ n_3=6,\ n_4=6,\ n_5=0.$$

Ebenso hat man

$${}^*C[\overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2},\ldots \overset{4}{a_4},\ \overset{2}{a_5},\ldots \overset{2}{a_8},\ a_9\ a_{10}]^4$$
$$=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}+8.\frac{9.8}{1.2}+\frac{8.7}{1.2}+4.9+4$$
$$=566,$$

denn es ist

$$n_1=10,\ n_2=8,\ n_3=4,\ n_4=0.$$

Der Ausdruck, der auch geschrieben wird:

$$^*C[\overset{6}{a_1}, \overset{4}{a_2}, \overset{4}{a_3}, \overset{4}{a_4}, \overset{2}{a_5}, \overset{2}{a_8}, a_9 . a_{10}]^4,$$

ist nicht wohl zulässig, denn die Wiederholungen können nicht höher als der Exponent (4) steigen.

§. 10.

Die in §. 6. unter *c*) und *d*) genannten Aufgaben lassen sich nun ohne alle Schwierigkeit lösen. Sie charakterisiren sich als besondere Fälle der in den beiden vorhergehenden Paragraphen beantworteten allgemeineren. Sollen nun die Gruppenanzahlen im einzelnen Falle bestimmt werden, so hat man die verschiedenen Elementenzahlen gleich und

$$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots n_k = n$$

zu setzen, und die nöthigen Schemata nach §. 8. aufzustellen, oder man kann auch die Zusammenstellnng 8) §. 8. und 1) §. 9. direct benutzen, indem man diejenigen Ausdrücke unterdrückt, welche vermöge der Aufgabe nicht vorkommen dürfen. Diess Unterdrücken hängt von der Stellenzahl der n ab. Nach der Aufgabe *c*) §. 6. müssen nämlich alle Ausdrücke in 8.) §. 8., worin alle Stellenzahlen der n ausschliesslich niederer als r sind, ausgestossen werden. Nach der Aufgabe *d*) §. 6. müssen aber diejenigen Ausdrücke ausgestossen werden, worin Stellenzahlen der n vorkommen, welche höher als r sind.

Im letzten Falle ist die Sache an und für sich klar. Weniger klar dürfte die Sache im ersten Falle sein. Es werden aber einige Worte genügen, um sie festzustellen. Soll die Gruppenzahl der Verbindungen aus n Elementen zur $q$ten Classe bestimmt werden, worin irgend ein Element wenigstenst r mal wiederholt erscheint, so ist dadurch nicht ausgeschlossen, dass die andern Elemente nicht in niederer Anzahl wiederholt vorkommen dürfen, denn die Aufgabe verlangt, dass irgend ein Element entweder r, oder $(r+1)$, oder $(r+2)$ mal u. s. w. vorkommen solle. An diese Forderung können sich nun alle die Erscheinungen in den einzelnen Gruppen knüpfen, die mit dem Sinne der Aufgabe nicht in Widerspruch stehen, als da sind das Vorkommen einzelner Elemente in geringerer Wiederholungszahl. Sollte der Zutritt der so eben berührten Elemente ausgeschlossen sein, so müsste die Aufgabe so formulirt sein: Die Gruppenzahl der Verbindungen aus n Elementen in der $q$ten Classe soll bestimmt werden, worin kein Element weniger als r mal wiederholt erscheint, oder worin jedes mitwirkende Element wenigstens r mal wiederholt erscheint". Der Sinn dieser Aufgabe ist aber offenbar ein ganz anderer als der hier in Frage stehende und unter *c*) §. 6. ausgesprochene. Die hierher gehörigen Fragen können, wie leicht zu erkennen ist, mit den vorhandenen

Mitteln nur im einzelnen Falle bestimmt werden, lassen sich aber immer beantworten. Hiernach hat man z. B. für die Gruppenzahl der Verbindungen aus n Elementen in der 6ten Classe, worin irgend ein Element wenigstens dreimal wiederholt erscheint,

$$1)\ 'C[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2},\ldots\overset{3}{a_n}]^6 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3) + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)}{1.2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2) + 2n(n-1) + n.$$

Die Gruppenzahl der Verbindungen aus n Elementen in der 6ten Classe, worin irgend ein Element höchstens dreimal wiederholt erscheint, ist aus 1) §. 9.

$$2)\ {}^{*}C[\overset{3}{a_1},\overset{3}{a_2},\ldots\overset{3}{a_n}]^6 = \frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{1.2\ldots n} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.2.3.4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)}{1.2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.$$

Dass die hier gemachten Schlüsse richtig sind, bestätigt sich dadurch, dass man von den Gruppenanzahlen der Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen auf die mit unbeschränkten übergehen kann. So ist aus 8) §. 8.

$$'C[\overset{1}{a_1},\ \overset{1}{a_2},\ldots\overset{1}{a_n}]^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3} + n(n-1) + n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$
$$= 'C[a_1,\ a_2,\ldots a_n]^3,$$

wie diess sein muss, wenn die Gruppen der Verbindungen aus n Elementen zur 3ten Classe gebildet werden, worin die Elemente wenigstens einmal (also auch zwei und dreimal) wiederholt erscheinen sollen. Ebenso ist aus 1) §. 9.

$${}^{*}C[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2},\ldots\overset{3}{a_n}]^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3} + n(n-1) + n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$
$$= C'[a_1,\ a_2,\ldots a_n]^3,$$

wie diess sein muss, weil die Elemente in den Gruppen höchstens dreimal (also auch zwei und einmal) wiederholt erscheinen sollen. Diess bestätigt sich auch an Zahlenbeispielen. So ist

$$C[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2},\ldots\overset{3}{a_6}]^6 = 321$$
$$= \frac{6.5.4}{1.2.3}.3 + 6.5.4 + \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5}{1.2}.4 + 2.6.5 + 6,$$

$${}^*C[\overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2},\ldots\overset{2}{a_6}]^6=141$$

$$=\frac{6.5..2.1}{1.2..6}+\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4}+\frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{4.3}{1.2}+\frac{6.5.4}{1.2.3}.$$

Beide Ausdrücke ergänzen sich zur vollständigen Gruppenanzahl mit unbeschränkten Wiederholungen, und es ist, wie sein muss,

$$C'[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2},\ldots\overset{3}{a_6}]^6+{}^*C[\overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2},..\overset{2}{a_6}]^6=321+141=462,$$

$$C'[a_1,\ a_2,\ldots a_6]^6=\frac{6.7.8.9.10.11}{1.2.3.4.5.6}=462;$$

also

$$C'[a_1,\ a_2,..a_6]^6={}'C[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2},\ldots\overset{3}{a_6}]^6+{}^*C[\overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2},..\overset{2}{a_6}]^6.$$

§. 11.

Die Gruppenanzahlen der Versetznngen, ohne und mit Wiederholungen, lassen sich aus den Gruppenanzahlen der Verbindungen (ohne und mit Wiederholungen) ableiten, wenn man in die einzelnen Gruppen der Verbindungen die Versetzungen einführt, welche die in ihnen vorkommenden Elemente unter einander eingehen können.

Wendet man das Gesagte auf die in §. 7.—§. 10. gefundenen Sätze an, so beantworten sich folgende Probleme:

Die Versetzungen aus irgend einer Elementenzahl zur $q$ten Classe werden gebildet. Wie gross ist

a) die Anzahl der Gruppen, worin eine bestimmte Anzahl von Elementen wenigstens einmal, eine andere wenigstens zweimal, eine dritte wenigstens dreimal u. s. w. wiederholt erscheinen? Diess stellt sich in Zeichen so dar:

1) $${}'P[a_1,\ a_2,\ldots a_{n_1},\ \overset{2}{a_{n_1+1}},\ldots \overset{2}{a_{n_2}},..\overset{3}{a_{n_3}},\ldots \overset{k}{a_{n_k}}]^q;$$

b) die Anzahl der Gruppen, worin eine bestimmte Anzahl von Elementen höchstens einmal, eine andere höchstens zweimal, eine dritte höchstens dreimal u. s. w. wiederholt erscheinen? In Zeichen

2) $${}^*P[\overset{k}{a_1},\ \overset{k}{a_2},\ldots \overset{k}{a_{n_k}},\ \overset{k-1}{a_{n_k+1}},\ldots \overset{k-1}{a_{n_{k-1}}},\ldots \overset{2}{a_{n_2}},\ldots a_{n_1-1},\ a_{n_1}]^q;$$

c) die Anzahl der Gruppen, worin irgend ein Element wenigstens r mal wiederholt erscheint?

3) $$'P[\overset{r}{a_1},\ \overset{r}{a_2}, \ldots \overset{r}{a_n}]^q;$$

d) die Anzahl der Gruppen, worin irgend ein Element höchstens $r$mal wiederholt erscheint?

4) $$^{*}P[\overset{r}{a_1},\ \overset{r}{a_2}, \ldots \overset{r}{a_n}]^q.$$

Man hat zu dem Ende nach Angabe von §. 8. die nöthigen Schemata zu entwickeln, hieraus die Funktionen der n, wie dort geschehen, abzuleiten und mit jeder einzelnen nach 6) und 7) §. 7. die gehörige Versetzungszahl zu verbinden, denn jede Funktion von n bezieht sich auf gleichartige Gebilde der Gruppen.

Die Versetzungszahlen leiten sich dadurch aus den Gebilden der e unmittelbar leicht ab, wenn man bemerkt, dass alle zusammengehörige Ausdrücke eines Schemas einer und derselben Dimension oder Classe zugehören. Jede einzelne Gruppe der e führt daher auf eine Bruchfakultät, deren Zähler die so vielte um die Einheit steigende Fakultät von der Einheit ist als die Summe aller in ihr vorkommenden Exponenten von e angiebt, und deren Nenner aus so vielen um die Einheit steigenden Fakultäten besteht, als e vorkommen. Die Exponenten der e bilden dann die Exponenten der einzelnen Fakultäten. Kommt man auf das Schema 5) in §. 8. zurück, so gehört zu

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1 = (e^1)^6 \quad \text{die Versetzungszahl} \quad \frac{1^{6|1}}{1^{1|1}1^{1|1}1^{1|1}1^{1|1}1^{1|1}1^{1|1}},$$

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2 \quad = (e^1)^4 e^2 \quad „ \quad „ \quad \frac{1^{6|1}}{1^{1|1}1^{1|1}1^{1|1}1^{1|1}1^{2|1}},$$

$$e^1\ e^1\ e^2\ e^2 \quad = (e^1)^2(e^2)^2 \quad „ \quad „ \quad \frac{1^{6|1}}{1^{1|1}1^{1|1}1^{2|1}1^{2|1}},$$

$$e^2\ e^2\ e^2 \quad = (e^2)^3 \quad „ \quad „ \quad \frac{1^{6|1}}{1^{2|1}1^{2|1}1^{2|1}},$$

$$e^3\ e^3 \quad = (e^3)^2 \quad „ \quad „ \quad \frac{1^{6|1}}{1^{3|1}1^{3|1}},$$

u. s. f. Bringt man nun diese Zahlenausdrücke mit den zugehörigen Fakultäten der n in Verbindungen, so erhält man für die Gruppenanzahlen der Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen für die verschiedenen Classen folgende Zusammenstellung:

5) $$'P[a_1,\ a_2, \ldots a_n]^1 = n,$$

$$'P[a_1,\ a_2 \ldots a_{n_1},\ \overset{3}{a}_{n_1+1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}] = n_1(n_1-1) + n_2,$$

$$'P[a_1,\ a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}]^3 = n_1(n_1-1)(n-2) + 3n_1(n_2-1) + n_3,$$

$$'P[a_1,\ a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}]^4 = n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)$$
$$+\frac{4.3}{1.2} n_1^{2|-1}(n_1-2) + 3n_2(n_2-1) + 4n_1(n_3-1) + n_4,$$

$$'P[a_1,\ a_2 \ldots a_{n_1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{5}{a}_n]^5 =$$
$$= n_1^{5|-1} + 10.n_1^{3|-1}(n_2-1) + 15.n_1(n_2-1)^{2|-1}$$
$$+ 10n_1^{2|-1}(n_3-2) + 10n_2(n_3-1) + 5n_1(n_4-1) + n_5,$$

$$'P[a_1,\ a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots \overset{6}{a}_{n_6}]^6 =$$
$$= n_1^{6|-1} + 15n_1^{4|-1}(n_2-4) + 45n_1^{2|-1}(n_2-2)^{2|-1} + 15n_2^{3|-1}$$
$$+ 20n_1^{3|-1}(n_3-3) + 60n_1(n_2-1)(n_3-2) + 10n_3^{2|-1} + 15n_1^{2|-1}(n_4-2)$$
$$+ 15n_2(n_4-1) + 6n_1(n_5-1) + n_6,$$

u. s. w.

Die Zahlenausdrücke für die Gruppen der in 2), 3) und 4) angedeuteten Versetzungen ergeben sich nun aus 1) §. 9. und aus dem Gesagten leicht. Man hat daher aus gleichen Gründen:

6) $^{*}P[a_1,\ a_2, \ldots a_n]^1 = n,$

$$^{*}P[\overset{2}{a}_1,\ \overset{2}{a}_2, \ldots \overset{2}{a}_{n_2},\ a_{n_2+1}, \ldots a_{n_1}]^2 = n_1^{2|-1} + n_2,$$

$$^{*}P[\overset{3}{a}_1, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots a_{n_1}]^3 = n_1^{3|-1} + 3n_2(n_1-1) + n_3,$$

$$^{*}P[\overset{4}{a}_1, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{3}{a}_{n_3}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}, \ldots a_{n_1}]^4 =$$
$$= n_1^{4|-1} + 6n_2(n_1-1)^{2|-1} + 3n_2^{2|-1} + 4n_3(n_1-1) + n_4,$$

$$^{*}P[\overset{5}{a}_1, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}, \ldots \overset{4}{a}_{n_4}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2} \ldots, a_{n_1}]^5 =$$
$$= n_1^{5|-1} + 10n_2(n_1-1)^{3|-1} + 15n_2^{2|-1}(n_1-2) + 10n_3(n_1-1)^{2|-1}$$
$$+ 10n_3(n_2-1) + 5n_4(n_1-1) + n_5,$$

$$^{*}P[\overset{6}{a}_1, \ldots \overset{6}{a}_{n_6}, \ldots \overset{5}{a}_{n_5}, \ldots \overset{2}{a}_{n_2}; \ldots a_{n_1}]^6 =$$
$$= n_1^{6|-1} + 15n_2(n_1-1)^{4|-1} + 45n_2^{2|-1}(n_1-2)^{2|-1} + 15n_2^{3|-1}$$
$$+ 20n_3(n_1-1)^{3|-1} + 60n_3(n_2-1)(n_1-2) + 10n_3^{2|-1}$$
$$+ 15n_4(n_1-1)^{2|-1} + 15n_4(n_2-1) + 6n_5(n_1-1) + n_6,$$

u. s. w. Bei diesen Fakultäten-Ausdrücken ist die Kramp'sche-Bezeichungsweise $m^{x|-1} = m(m-1)(m-2)\dots(m-x+1)$ gebraucht. Hiernach ist:

$$*P[\overset{4}{a_1}, \dots \overset{4}{a_4}, \overset{3}{a_5}, \overset{3}{a_6}, \overset{3}{a_7}, \overset{2}{a_8}, \overset{2}{a_9}, a_{10}, a_{11}, a_{12}]^4 =$$
$$= 12.11.10.9 + 6.9.11.10 + 3.9\,8 + 4.7.11 + 4 = 18348$$

für

$$n_1 = 12,\ n_2 = 9,\ n_3 = 7,\ n_4 = 4.$$

Würde man schreiben

$$*P[\overset{6}{a_1}, \overset{5}{a_2}, \overset{4}{a_3}, \overset{4}{a_4}, \overset{3}{a_5}, \overset{3}{a_6}, \overset{3}{a_7}, \overset{2}{a_8}, \overset{2}{a_9}, a_{10}, a_{11}, a_{12}]^4$$

wie auch geschieht, so hat $\overset{6}{a_1}, \overset{5}{a_2}$ keine Bedeutung, da die Wiederholungsexponenten nicht höher als der Classenexponent werden können.

§. 12.

Die in §. 6. — §. 11 geführte Untersuchung hat die darin aufgestellten Probleme gelöst, aber keine geschlossene Ausdrücke geliefert, um die dort vorgelegten Fragen zu beantworten. Wir wenden uns nun zu einer zweiten Auflösungsmethode, die dieser Beschränkung nicht unterliegt, und stellen folgendes Problem zur Untersuchung auf:

Die Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $q$ten Classse werden gebildet. Wie gross ist die Zahl der Gruppen, worin irgend ein Element wenigstens $r$mal erscheint?

Die Aufgabe stellt sich in Zeichen dar:

$$'C[\overset{r}{a_1}, \overset{r}{a_2}, \overset{r}{a_3} \dots \overset{r}{a_n}]^q.$$

Eine nothwendige Bedingung ist, dass $r \overset{=}{<} q$ ist. Die Methode, welche wir betreten, besteht darin, dass wir uns die Gruppen gebildet denken und nach einer Richtung hin (von der Linken zur Rechten) dieselben untersuchen und fragen, in welchen sich die auflösenden Gruppen finden können und dann die hiedurch bedingte Zahl angeben.

Din auflösenden Gruppen sind

$$(a_1)^r,\ (a_2)^r,\ (a_3)^r, \dots (a_n)^r.$$

Diese Gruppen können entweder auf den r ersten Stellen, oder auf r Stellen von der zweiten Stelle an, oder auf r Stellen von

der dritten an u. s. f., oder auf den r letzen Stellen erscheinen. Mit jeder eingenommenen Stellung werden bestimmte Bedingungen eintreten, die nicht übersehen werden dürfen. Es kann nämlich, so verlangt es die Bildungsweise der Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen, keiner der genannten Gruppen ein Element vorausgehen, welches die gleiche oder gar eine höhere Stellenzahl führt, und ein Element folgen, welches eine niedere Stellenzahl führt. Elemente mit der gleichen Stellenzahl dürfen folgen. Nach dieser Bemerkung beginnen wir mit der Untersuchung der einzelnen Fälle.

a) Die auflösenden Gruppen nehmen die r ersten Stellen ein. In diesem Falle kann auf den $(q-r)$ letzten Stellen jede beliebige Zusammenstellung von Elementen folgen, welche den oben gestellten Grundbedingungen nicht widerspricht. Hieraus hat man folgende der Aufgabe genügende Aufstellungen:

$$(a_1)^r\, C'(a_1,\ a_2, \ldots a_n)^{q-r},$$
$$(a_2)^r\,(C'(a_2,\ a_3 \ldots . a_n)^{q-r},$$
$$(a_3)^r\, C'(a_3,\ a_4, \ldots a_n)^{q-r},$$
$$\vdots$$
$$(a_{n-1})^r\, C'(a_{n-1},\ a_n)^{q-r},$$
$$a_n{}^r\, C'(a_n)^{q-r}.$$

Bestimmt man die jedem einzelnen Ausdrucke zugehörige Gruppenzahl, so hat man folgende Reihe:

$$A_1 = [n]_{q-r} + [n-1]_{q-r} + [n-2]_{q-r} + \ldots . [3]_{q-r} + [2]_{q-r} + [1]_{q-r}$$
$$= [n]_{q-r+1}.$$

Hierin bedeutet

$$[m]_x = \frac{m(m+1) \ldots . (m+x-1)}{1.2. \ldots . . x} = \frac{m^{x|1}}{1^{x|1}}.$$

b) Die auflösenden Gruppen erscheinen auf r Stellen von der zweiten Stelle an. Ein Element kann daher vorausgehen und $(q-r-1)$ Elemente können folgen. Vorausgehen und folgen darf keines, den oben genannten Bedingungen widersprechendes Element. Diess führt zu folgender Aufstellung:

$$a_1\,(a_2)^r\, C'(a_2,\ a_3 \ldots . a_n)^{q-r-1},$$
$$C'(a_1,\ a_2)^1 (a_3)^r\, C'(a_3,\ a_4, \ldots a_n)^{q-r-1},$$
$$C'(a_1,\ a_2,\ a_3)^1 (a_4)^r\, C'(a_4,\ a_5, \ldots . a_n)^{q-r-1},$$
$$\vdots$$
$$C'(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-2})^1 (a_{n-1})^r\, C'(a_{n-1},\ a_n)^{q-r-1},$$
$$C'(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-1})^1 (a_n)^r\, C(a_n)^{q-r-1}.$$

Hierdurch wird folgende Gruppenzahl herbeigezogen:

$$A_2 = 1.[n-1]_{q-r-1} + \frac{2}{1}[n-2]_{q-r-1} + \frac{3}{1}[n-3]_{q-r-1} \ldots + \frac{n-2}{1}[2]_{q-r-1} + \frac{n-1}{1}[1]_{q-r-1}$$

$$= [n-1]_{1+q-r-1+1} = [n-1]_{q-r+1},$$

denn die Gruppenform

$$a_1 (a_1)^r C'(a_1, a_2, \ldots a_n]^{q-r-1}$$

kann als den Bedingungen widersprechend nicht aufgenommen werden und ist auch in der That schon unter *a*) vorgesehen.

Die Reihe A_2 und alle hierhergehörigen Reihen werden nach folgendem Gesetze summirt:

$$1) \quad [m]_k [1]_p + [m-1]_k [2]_p + \ldots\ldots [2]_k [m-1]_p + [1]_k [m]_p$$

$$= [m]_{k+p+1} = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+k+p)}{1.2.3\ldots(k+p+1)} = \frac{m^{k+p+1|1}}{1^{k+p+1|1}}.$$

c) Die auflösenden Gruppen erscheinen von der dritten Stelle an. Zwei Elemente können vorausgehen und $(q-r-2)$ Elemente können folgen. Diess führt zu folgendem Aggregate:

$$C'(a_1)^2 (a_2)^r C'(a_2, a_3 \ldots a_n)^{q-r-2},$$

$$C'(a_1\ a_2)^2 (a_3)^r C'(a_3, a_4, \ldots a_n)^{q-r-2},$$

$$C'(a_1\ a_2, a_3)^2 (a_4)^r C'(_4, a_5', \ldots a_n)^{q-r-2},$$

$$\vdots$$

$$C'(a_1, a_2, \ldots a_{n-2})^2 (a_{n-1})^r C'(a_{n-1}, a_n)^{q-r-2},$$

$$C'(a_1\ a_2, \ldots a_{n-1})^2 (a_n)^r C'(a_n)^{q-r-2}.$$

Werden die einzelnen Gruppen gezählt, so erhält man nach 1)

$$A_3 = [1]_2 [n-1]_{q-r-2} + [2]_2 [n-2]_{q-r-2} + \ldots [n-2]_2 [2]_{q-r-2} + [n-1]_2 [1]_{q-r-2}$$

$$= [n-1]_{q-r+1}.$$

d) Rücken die auflösenden Gruppen auf *r* Stellen vor von der vierten an, so hat man folgende Zusammenfassung:

$$C'(a_1)^3 (a_2)^r C'(a_2, a_3, \ldots a_n)^{q-r-3},$$

$$C'(a_1, a_2)^3 (a_3)^r C'(a_3, a_4, \ldots a_n)^{q-r-3},$$

$$C'(a_1, a_2, a_3)^3) (a_4)^r C'(a_4, a_5, \ldots a_n)^{q-r-3},$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$C^r(a_1\ a_2,\dots a_{n-2})^3(a^n{}_{-1})^r\ C^r(a_{n-1},\ a_n)^{q-r-3},$$

$$C^r(a_1\ a_2\dots a_{n-1})^3(a_n)^r\ C^r(a_n)^{q-r-3}.$$

Hieraus und aus 1) ergibt sich die Zahl der Gruppen

$$A_4=[1]_3[n-1]_{q-r-3}+[2]_3[n-1]_{q-r-3}\dots[n-2]_3[2]_{q-r-3}+[n-1]_3[1]_{q-r-3}$$

$$=[n-1]_{q-r+1}.$$

Diese Schlüsse wiederholen sich. Jede einzelne Aufstellung führt zur nämlichen Gruppenzahl, denn die den auflösenden Gruppen vorausgehenden und nachfolgenden Gebilde ergänzen sich immer zu gleichen Dimensionen. Hiernach erzeugt sich der Ausdruck $[n-1]_{q-r+1}$ im Ganzen $(q-r)$ mal. Denn er kommt in allen Fällen mit Ausnahme des ersten (a), also in den $(q-r)$ letzten Stellungen vor. Die Summe aller auf diese Weise in Betrachtung kommenden Gruppen ist

$$A_1+A_2++A_3+\dots\dots A_{q-r+1}=M,$$

und sie führt zu folgendem Ausdrucke:

$$2)\quad M=[n]_{q-r+1}+(q-r)[n-1]_{q-r+1}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\dots\dots(n+q-r)}{1.2.3\dots\dots(q-r+1)}+(q-r)\frac{(n-1)n(n+1)..(n+q-r-1)}{1.2.3\dots(q-r+1)}.$$

Diese Schlüsse führen so lange zu einem richtigen Resultate, bis die vorausgehenden Gruppen zur $r$ten Classe angewachsen sind. Geschieht diess, dann enthalten die vorausgehenden Gruppen selbst wieder Gebilde, welche der Aufgabe genügen. Diese müssen sofort gezählt und ausgeschieden werden. Die Darstellung, wodurch die erste Ausscheidung bedingt wird, hat folgende Gestalt:

$$C^r(a_1)^r\ (a_2)^r\ C^r(a_2,\ a_3,\dots a_n)^{q-2r},$$

$$C^r(a_1,\ a_2)^r\ (a_3)^r\ C^r(a_3,\ a_4,\dots a_n)^{q-2r},$$

$$C^r(a_1\ a_2,\ a_3)^r\ (a_4)^r\ C^r(a_4,\ a_5,\dots a_n)^{q-2r},$$

$$\vdots$$

$$C^r(a_1,\ a_2,\dots a_{n-2})^r\ (a_{n-1})^r\ C^r(a_{n-1},\ a_n)^{q-2r},$$

$$C^r(a_1,\ a_2,\dots a_{n-1})^r\ (a_n)^r\ C^r(a_n)^{q-2r}.$$

Die Ausscheidungen können durch die Gleichung 2) bewerkstelligt werden, indem man der Reihe nach wegen der vorausgehenden Ausdrücke $q=r$ und statt n allmählig die Elementenanzahlen, also 1, 2, 3, 4,...., $n-1$ setzt. Wegen des ersten Ausdrucks ist dann auszuscheiden:

$$[1]_1[n-1)_{q-2r},$$

wegen des zweiten

$$[2]_1\ [n-2]_{q-2r}\ ,$$

wegen des dritten

$$[3]_1\,[n-2]_{q-2r}$$

u. s. w. wegen des letzten

$$C(a_1,\ a_2 \dots a_{n-1})^r\ (a_n)^r\ C'(a_n)^{q-2r}\ ,$$

endlich

$$[n-1]_1\,[1]_{q-2r}\ .$$

Die Summe aller dieser Ausscheidungen bedingt folgende Reihe:

$$B_1 = 1\,[n-1]_{q-2r} + [2]_1[n-2]_{q-2r} + [3]_1\,[n-2]_{q-2r} \dots [n-1]_1[1]_{q-2r}$$
$$= [n-1]_{q-r2+2}.$$

Die Darstellung, wodurch die zweite Ausscheidung bedingt ist, fasst sich in Folgendem zusammen:

$$C'(a_1)^{r+1}(a_2)^r\ C'(a_2,\ a_3 \dots a_n)^{q-2r-1},$$
$$C'(a_1\ \ a_2)_r{}^{+1}(a_3)^r\ C'(a_3,\ a_4, \dots, a_n)^{q-2r-1},$$
$$C'(a_1\ \ a_2,\ a_3)^{r+1}(a_4)^r\ C'(a_4,\ a_5, \dots a_n)^{q-2r-1},$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$C'(a_1\ \ a_2, \dots a_{n-1})^{r+1}(a_n)^r\ C'(a_n)^{q-2r-1}.$$

Um alle hieraus auszuscheidende Gruppen zu erhalten, hat man $r+1$ statt q und 1, 2, 3.... $(n-1)$ statt n in 2) zu setzen und mit den nachfolgenden ergänzenden Gruppenzahlen zu vervielfachen. Es entsteht sodann:

$$[[1]_2 + 1.[0]_2]\,[n-1]_{q-2r-1},$$
$$[[2]_2 + 1.[1]_2]\,[n-2]_{q-2r-1}\ ,$$
$$[[3]_2 + 1.[2]_2]\,[n-3]_{q-2r-1}\,,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$[[n-1]_2 + 1.[n-2]]_2\,[1]_{q-2r-1}\,.$$

Wird nun vervielfacht, so entstehen zwei Reihen, die sich nach der Gleichung 1) summiren lassen, und man erhält

$$[1]_2\,[n-1]_{q-2r-1} + [2]_2\,[n-2]_{q-2r-1} \dots$$
$$\dots [n-1]_2\,[1]_{q-2r-1} = [n-1]_{q-2r+2}\,,$$

$$[1]_2[n-2]_{q-2r-1}+[2]_2[n-3]_{q-2r-1}\ldots$$
$$\ldots[n-2]_2[1]_{q-2r-1}=[n-2]_{q-2r+2}.$$

Die hiedurch bedingte auszuscheidende Gruppenzahl ist

$$B_2=[n-1]_{q-2r+2}+1\,[n-2]_{q-2r+2}.$$

Die dritte Ausscheidung ist durch folgende Zusammenstellung bedingt:

$$C'(a_1)^{r+2}(a_2)^r\;C'(a_2,\;a_3\ldots a_n)^{q-2r-2},$$
$$C'(a_1,\;a_2)^{r+2}(a_3)^r\;C'(a_3,\;a_4,\ldots a_n)^{q-2r-2},$$
$$C'(a_1,\;a_2,\;a_3)^{r+2}(a_4)^r\;C'(a_4,\;a_5,\ldots a_n)^{q-2r-2},$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$C'(a_1,\;a_2,\ldots a_{n-1})^{r+2}(a_n)^r\;C'(a_n)^{q-2r-2}.$$

Die hieraus hervorgehenden Gruppenzahlen ergeben sich, wenn $r+2$ statt q und allmählig $1,\;2,\;3,\ldots.n-1$ statt n in 2) gesetzt wird. Dadurch entsteht

$$([1]_3+2.0)\,[n-1]_{q-2r-2},$$
$$([2]_3+2\,[1]_3)\,[n-2]_{q-2r-2},$$
$$([3]_3+2\,[2]_3)\,[n-3]_{q-2r-2},$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$([n-1]_3+2\,[n-2]_3)\,[1]_{q-2r-2}.$$

Wird hier vervielfacht, so entstehen wieder zwei Reihen, die sich nach 1) summiren lassen und man erhält sofort für die durch obige Anfstellung bedingten Ausscheidungen

$$B_3=[n-1]_{q-2r+2}+2[n-2]_{q-2r+2}.$$

Diese Ausscheidungen führen sich nun leicht weiter fort. Die Darstellung, wozu man bei der letzten Ausscheidung gelangt, ist:

$$C'(a_1)^{q-r}(a_2)^r,$$
$$C'(a_1\;\;a_2)^{q-r}(a_3)^r,$$
$$C'(a_1\;\;a_2,\;a_3)^{q-r}(a_4)^r,$$
$$\vdots$$
$$C'(a_1\;\;a_2\ldots a_{n-1})^{q-r}(a_n)^r.$$

Um die hiedurch bedingte Gruppenzahl zu erhalten, hat man in 2) $q-r$ statt q und $1,\;2,\;3\ldots(n-1)$ statt n zu setzen. Man erhält:

$$[1]_{q-2r+1} \quad + (q-2r).0,$$
$$[2]_{q-2r+1} \quad + (q-2r)[1]_{q-2r+1},$$
$$[3]_{q-2r+1} \quad + (q-2r)[2]_{q-2r+1}.$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$[n-1]_{q-2r+1} + (q-2r)[n-2]_{q-2r+1}.$$

Diese zwei Reihen vereinigen sich in folgenden Ausdruck:

$$B_{q-2r+1} = [n-1]_{q-2r+2} + (q-2r)[n-2]_{q-2r+2}.$$

Alle die auf diesem Wege erhaltenen Ausscheidungen werden durch die Summe

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + \ldots B_{q-2r+1} = N$$

angegeben, welche $(q-2r+1)$ Glieder hat. Alle B enthalten den Ausdruck

$$[n-1]_{q-2r+2}.$$

Dieser Ausdruck kommt daher $(q-2r+1)$ mal vor. Die $(q-2r)$ letzten B enthalten noch einen zweiten Ausdruck, der einem bestimmten Gesetze unterliegt, sich auf folgende Weise darstellt und zusammenziehen lässt:

1. $$[n-2]_{q-2r+2} + 2[n-2]_{q-2r+2} + 3[n-2]_{q-2r+2} + \ldots$$
$$\ldots [q-2r][n-2]_{q-2r+2}$$

$$= \frac{(q-2r)(q-2r+1)}{1\,.\,2}[n-2]_{q-2r+2} = [q-2r]_2 . [n-2]_{q-2r+2}.$$

Die Gruppenzahl, welche daher von 2) ausgeschieden werden muss, begreift sich in folgendem Ausdruck:

3) $$N = [q-2r+1]_1 [n-1]_{q-2r+2} + [q-2r]_2 [n-2]_{q-2r+2}$$
$$= (q-2r+1)\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n+q-2r)}{1\,.\,2\ldots.(q-2r+2)}$$
$$+ \frac{(q-2r)(q-2r+1)}{1\,.\,2}\,\frac{(n-2)\,(n-1)n\ldots.(n+q-2r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.(q-2r+2}.$$

Diese Ausscheidungen sind so lange richtig, bis sich die den auflösenden Gruppen vorangehenden Verbindungsclassen bis zur $(2r)$ten Dimension erheben. In diesem Falle sind zu viel ausgeschieden worden und zwar alle unter den ausgeschiedenen begriffene Gruppen, welche die Eigenschaft der auflösenden Gruppen selbst haben.

Die Gleichung 3) kann nun benutzt werden, um die Ausscheidungen zu bewerkstelligen, denn sie zeigt die Gruppen an, welche die Eigenschaft des wiederholten Zusammentrittes haben. Es

wird nun nicht mehr nöthig die erforderlichen Zusammenstellungen zu geben. Mat hat nur $2r$, $2r+1$, $2r+2, \ldots q-r$ statt q und allmählig 1, 2, 3 .... (n 1) statt n bei jedem einzelnen Werthe von q in 3) zu setzen, und jedes einzelne Glied mit der ergänzenden Verbindungszahl zu vervielfachen. Es werden auch hier immer Reihen entstehen, die sich nach 1) summiren lassen. Die Ausdrücke, welche hiedurch erzeugt werden, sind der Reihe nach folgende:

$$C_1 = [1]_1 . [1]_2 [n-2]_{q-3r} = [1]_1 [n-2]_{q-3r+3}$$
$$[1]_1 . [2]_2 [n-3]_{q-3r}$$
$$[1_1] . [3]_2 [n-4]_{q-3r}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$[1]_1 . [n-2]_2 [1]_{q-3r} .$$

Wird nun $2r+1$ statt q und allmälig 1, 2, ... $(n-1)$ statt n in 3) gesetzt und werden die hieraus sich ergebenden Ausdrücke mit den ergänzenden Verbindungsclassen verbunden, so entsteht in Rücksicht auf 1)

$$C_2 = (2[1]_3 + [1]_2 0)[n-2]_{q-3r-1} = 2[n-2]_{q-3r+3} + [1]_2 [n-3]_{q-3r+3}$$
$$(2[2]_3 + [1]_2 [1]_3)[n-3]_{q-3r-1}$$
$$(2[3]_3 + [1]_2 [2]_3)[n-4]_{q-3r-1}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$(2[n-2]_3 + [1]_2 [n-3]_3)[1]_{q-3r-1};$$

Ferner wird für $2r+2$ statt q und unter den oben angegebenen Bedingungen:

$$C_3 = (3[1]_4 + [2]_2 [0]_4)[n-2]_{q-3r-2} = 3[n-2]_{q-3r+3} + [2]_2 [n-3]_{q-3r+3}$$
$$(3[2]_4 + [2]_2 [1]_4)[n-3]_{q-3r-2}$$
$$(3[3]_4 + [2]_2 [2]_4 [n-4]_{q-3r-2}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$(3[n-2]_4 + [2]_2 [n-3]_4)[1]_{q-3r-2}$$

u. s. w. Man erkennt nun leicht, welchem Gesetze die sämmtlichen C unterliegen. Es entstehen zwei Reihen, wovon die erste $(q-3r+1)$ Glieder und die andere $(q-3r)$ Glieder zählt, die sich auf folgende Weise behandeln lassen:

$$(1+2+3+4 \ldots + (q-3r+1))[n-2]_{q-3r+3}$$
$$= \frac{(q-3r+1)(q-3r+2)}{1 \; . \; 2} [n-2]_{q-3r+3},$$

$$([1]_2+[2]_2+[3]_2\ldots+[q-2r]_2)[n-3]_{q-3r+3}=[q-2r]_3[n-3]_{q-3r+3}$$

Für die aus 3) auszuscheidende Gruppenanzahl ist sofort

$$4)\qquad P=[q-3r+1]_2[n-2]_{q-3r+3}+[q-2r]_3[n-3]_{q-3r+3}$$

$$=\frac{(q-3r+1)(q-3r+2)}{1\,.\,2}\,\frac{(n-2)(n-1)\ldots.(n+q-3r)}{1\,.\,2\ldots.(q-3r+3)}$$

$$+\frac{(q-2r)(q-2r+1)(q-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(n-3)(n-2)\ldots.(n+q-3r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(q-3r+3)}.$$

Setzt man nun diese Schlussweise fort, so erhält man für die Zahl aller auflösenden Gruppen (A)

$$5)\qquad A=M-N+P-Q+\ldots..$$

Hieraus entsteht durch Einführung der aufgefundenen Werthe:

$$6)\quad {}'C[\overset{r}{a_1},\overset{r}{a_2},\overset{r}{a_3},\ldots..\overset{r}{a_n}]^q=$$

$$\begin{array}{ll}
=[n]_{q-r+1} & +[q-r]_1[n-1]_{q-r+1}\\
-[q-2r+1]_1[n-1]_{q-2r+2} & -[q-2r]_2[n-2]_{q-2r+2}\\
+[q-3r+1]_2[n-2]_{q-3r+3} & +[q-3r]_3[n-3]_{q-3r+3}\\
-[q-4r+1]_3[n-3]_{q-4r+4} & -[q-4r]_4[n-4]_{q-4r+4}\\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+q-r)}{1\,.\,2\,..\,(q-r+1)}+\frac{q-r}{1}\,\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\ldots(n+q-r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(q-r+1)}$$

$$-\frac{q-2r+1}{1}\cdot\frac{(n-1)n\ldots..(n+q-2r)}{1.2\ldots(q-2r+2)}$$

$$-\frac{(q-2r)(q-2r+1)}{1\,.\,2}\,\frac{(n-2)(n-1)\ldots.(n+q-2r-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-2r+2)}$$

$$+\frac{(q-2r+1)(q-2r+2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{(n-2)(n-1)\ldots(n+q-3r)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-3r+3)}$$

$$+\frac{(q-2r)(q-2r+1)(q-2r+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{(n-3)(n-2)\ldots(n+q-3r-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(q-3r+3)}.$$

$$\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots$$

Diese Darstellung lässt sich auch so umformen:

$$7)\quad A=\frac{1^{n+q-r|1}}{1^{n-1|1}\,1^{q-r+1|1}}+\frac{q-r}{1}\cdot\frac{1^{n+q-r-1|1}}{1^{n-2|1}\,1^{q-r+1|1}}$$

$$-\frac{q-2r+1}{1}\,\frac{1^{n+q-2r|1}}{1^{n-2|1}\,1^{q-2r+2|1}}-\frac{(q-2r)^{2|1}}{1^{2|1}}\,\frac{1^{n+q-2r-1|1}}{1^{n-3|1}\,1^{q-2r+2|1}}$$

$$+\frac{(q-3r+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\frac{1^{n+q-3r|1}}{1^{n-3|1}1^{q-3r+3|1}}+\frac{(q-3r)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{1^{n+q-3r-1|1}}{1^{n-4|1}1^{q-3r+3|1}}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Werden hierin die Fakultäten im Nenner, welche den Exponenten q führen, ausgeschieden, so ergibt sich folgende Darstellung:

$$8) \qquad 'C[\overset{r}{a_1},\ \overset{r}{a_2}, \ldots \overset{r}{a_n}]^q =$$

$$=\frac{(q-r+2)^{n-1|1}}{1^{n-1|1}} \qquad +\frac{q-r}{1}\frac{(q-r+2)^{n-2|1}}{1^{n-2|1}}$$

$$-\frac{q-2r+1}{1}\frac{(q-2r+3)^{n-2|1}}{1^{n-2|1}} \qquad -\frac{(q-2r)^{2|1}}{1^{2|1}}\frac{(q-2r+3)^{n-3|1}}{1^{n-3|1}}$$

$$+\frac{(q-3r+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(q-3r+4)^{n-3|1}}{1^{n-3|1}}+\frac{(q-3r)^{3|1}}{1^{3|1}}\frac{(q-3r+4)^{n-4|1}}{1^{n-4|1}}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Bei kleinen n wird sich diese Darstellung vortheilhaft gebrauchen lassen.

Die Anwendung dieser Gleichungen auf besondere Fälle ist sehr bequem. So ist z. B.

$$'C[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_6}]^6 = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4}+3.\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}-1.\frac{5.6}{1.2}$$

$$=126+3.70-15=321,$$

wenn man $r=3$, $n=6$, $q=6$ in Nr. 6) setzt, wie schon oben §. 10. gefunden wurde.

Die Gruppenanzahl der Verbindungen, worin irgend ein Element höchstens $r$mal wiederholt erscheint, ergibt sich aus 6) leicht. Man hat zu dem Ende $(r+1)$ statt r zu setzen und das erhaltene Resultat von der Gesammtzahl der Gruppen mit unbeschränkten Wiederholungen abzuziehen, denn die gesuchte Gruppenanzahl ist die Ergänzung zu der vollständigen Gruppenanzahl. Hiernach ist

$$9) \qquad {}^{*}C[\overset{r}{a_1},\ \overset{r}{a_2},\ \overset{r}{a_3}, \ldots \overset{r}{a_n}]^q =$$

$$=[n]_q$$

$$-[n]_{q-r}-[q-r-1]_1\,[n-1]_{q-r}$$

$$+[q-2r-1]_1\,[n-1]_{q-2r}+[q-2r-2]_2\,[n-2]_{q-2r}$$

$$-[q-3r-2]_2\,[n-2]_{q-3r}-[q-3r-3]_3\,[n-3]_{q-3r}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$-[q+1]$

$+[q-\frac{1}{2}...]$

$-[q-\frac{1}{2}...]$

Mit diesen ...

Die Verm...
menten zur ...
die Zahl der ...
mal wiederh...

Dieses Pr...
begleitendes E...
auflösenden G...
stimmt sich ...
und das so er...

10) $A_r = C_{...}$
$= C_{...}$

Durch $C_{n,r}$ und ...
deuteten Zahlen ...
wickelten Dars...

Dieser Satz ...

11) $A_{r,s} = 'C_{...}$
$= C_{n,r} - C_{...}$

Man hat $(r+s+1)$ ...
sultat von 6) ...
des Problem.

Die Verb...
menten zur ...
die Gruppen...
und höchsten...
$r+1, r+2,$...

Hiebei ist ...

12) $C_{n,...}$

ist, wie sich ...
Verbindungen ...
Classe.

§. 13.

...ch übrig folgendes Problem zu lösen:

...ungen mit Wiederholungen aus n Ele-
...n Classe werden gebildet. Wie gross
...r Gruppen, worin irgend ein Element
...l wiederholt erscheint? In Zeichen

$$P[a_1{}^r,\ a_2{}^r,\ldots a_n{}^r]^q.$$

...gen, welche zu der Aufgabe des vorigen
... wurden, gelten mit wenigen Abänderungen
...abe wird deswegen auf eine ähnliche und
...t:

...n Gruppen

$$...{}_1)^r,\ (a_2)^r,\ (a_3)^r,\ldots(a_n)^r$$

...sten Stelle an. In diesem Falle können
...terschied auf den letzten $(q-r)$ folgenden
...gen Anordnung aufrücken. Hieraus ergibt

$$= P'(a_1{}^r,\ a_2{}^r,\ldots a_n{}^r)^1\, P'(a_1, a_2\ldots a_n)^{q-r},$$

$$\ldots\text{in } P'(a_1{}^r,\ a_2{}^r,\ldots a_n{}^r)^1$$

... wird.

...ch bedingten Gruppen ist

$$...{}_1 = n\,.\,n^{q-r}.$$

... Stelle weiter, so kann ein **fremdes**
...nden Gruppen treten, ohne dass die
...fgehoben werden. Die Elemente der
... auf den r ersten Stellen
...gesehen. Daher muss
...n Stellen erscheinen,
... den nachfolgenden
... ohne Unterschied
...:

$$...{}_n)^{q-r-1}$$

$$...{}_n)^{q-r-1}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen soll an einigen besondern Fällen nachgewiesen werden.

Die Gruppen der Verbindungen aus 6 Elementen zur 6ten Classe sollen gezählt werden, worin irgend ein Element gerade dreimal wiederholt erscheint. Man findet sie, wenn man $q=6$, $n=6$ und $r=3$, dann $r=4$ in Nr. 6. setzt. Hiernach ist

$$A_3 = C_{6,3} - C_{6,4} = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} + 3.\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4} - 1.\frac{5.6}{1.2} = 321 - 126 = 195.$$
$$- \frac{6.7.8}{1.2.3} - 2.\frac{5.6.7}{1.2.3}$$

Löst man die Aufgabe nach der in 8) angegebenen Methode, so hat man für die e folgendes Schema:

$$e^3\ e^1\ e^1\ e^1 + e^3\ e^2\ e^1 + e^3\ e^3,$$

woraus sich folgende Gruppenzahl ableitet:

$$A_3 = \frac{6.5.4.3}{1.2.3} + 6.5.4 + \frac{6.5}{1.2} = 195.$$

Die Gruppen der Verbindungen zur 6ten Classe aus 6 Elementen sollen bestimmt werden, worin ein Element wenigstens zweimal und höchstens viermal wiederholt erscheint. Man hat $q=6$, $n=6$, $r=2$ und $r=5$ zu setzen, und es ist

$$A_{2,4} = C_{6,2} - C_{6,5} = \frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5} + 4.\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5} - 3.\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4} - 3.\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{4.5.6}{1.2.3}$$
$$- \frac{6.7}{1.2} - \frac{5.6}{1.2}$$
$$= 461 - 36 = 425.$$

Löst man auch hier die Aufgabe nach dem Schema der e, so ist

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2 + e^1\ e^1\ e^2\ e^2 + e^2\ e^2\ e^2$$
$$e^1\ e^1\ e^1\ e^3 + e^1\ e^2\ e^3 + e^3\ e^3$$
$$e^1\ e^1\ e^4 + e^2\ e^4,$$

wodurch folgende Anzahl bedingt ist:

$$A_{2,4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.2 + \frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{4.3}{1.2} + \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{6.5.4}{1.2.3}.3 + 6.5.4$$
$$+ \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5}{1.2}.4 + 6.5 = 30 + 90 + 20 + 60 + 120 + 15 + 60 + 30$$
$$= 425.$$

§. 13.

Es ist nun noch übrig folgendes Problem zu lösen:

Die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $q$ten Classe werden gebildet. Wie gross ist die Zahl der Gruppen, worin irgend ein Element wenigstens $r$mal wiederholt erscheint? In Zeichen

$$P[a_1{}^r,\ a_2{}^r, \ldots a_n{}^r]^q.$$

Die Vorbedingungen, welche zu der Aufgabe des vorigen Paragraphen gestellt wurden, gelten mit wenigen Abänderungen auch hier. Die Aufgabe wird deswegen auf eine ähnliche und folgende Weise gelöst:

a) Die auflösenden Gruppen

$$(a_1)^r,\ (a_2)^r,\ (a_3)^r, \ldots (a_n)^r$$

erscheinen von der ersten Stelle an. In diesem Falle können alle Elemente ohne Unterschied auf den letzten $(q-r)$ folgenden Stellen in jeder beliebigen Anordnung aufrücken. Hieraus ergibt sich folgendes Schema:

$$\begin{array}{l}(a_1)^r P'(a_1,\ a_2 \ldots a_n)^{q-r} = P'(a_1{}^r,\ a_2{}^r, \ldots a_n{}^r)^1 P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r},\\ (a_2)^r P'(a_1,\ a_2, \ldots a_n)^{q-r}\\ \vdots \qquad\quad \vdots\\ (a_n)^r P'(a_1,\ a_2 \ldots, a_n)^{q-r}\end{array}$$

wenn jede der Gruppen

$$(a_1)^r,\ (a_2)^r, \ldots \text{in } P'(a_1{}^r,\ a_2{}^r, \ldots a_n{}^r)^1$$

als ein Element betrachtet wird.

Die Anzahl der hiedurch bedingten Gruppen ist

$$A_1 = n \cdot n^{q-r}.$$

b) Geht man nun eine Stelle weiter, so kann ein **fremdes** Element in jede der auflösenden Gruppen treten, ohne dass die Bedingungen der Aufgabe aufgehoben werden. Die Elemente der auflösenden Gruppen dürfen aber nicht auf den r ersten Stellen erscheinen, denn dieser Fall ist in a) vorgesehen. Daher muss ein fremdes Element auf einer der r ersten Stellen erscheinen, oder es kann r Stellen durchlaufen. Auf den nachfolgenden $(q-r-1)$ Stellen können alle Elemente ohne Unterschied erscheinen. Hieraus entsteht folgendes Schema:

$$\begin{array}{l}(a_1)^{r-1} P'(a_2,\ a_3 \ldots a_n)^1 \cdot a_1 P'(a_1,\ a_2 \ldots a_n)^{q-r-1}\\ (a_2)^{r-1} P'(a_1,\ a_3, \ldots a_n)^1 \cdot a_2 P'(a_1,\ a_2 \ldots a_n)^{q-r-1}\end{array}$$

$$(a_3)^{r-1} P'(a_1,\ a_2,\ a_4,\ a_n)^1 . a_3\ P'(a_1,\ a_2, \ldots a_n)^{q-r-1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(a_n)^{r-1} P'(a_1 .\ a_2, \ldots a_{n-1})^1 . a_n\ P'(a_1,\ a_2, \ldots a_n)^{q-r-1} .$$

Das getrennte Element hinter dem Punkte nimmt eine feste Stellung ein. Jede Zusammenstellung von

$$(a_1)^{r-1} P'(a_2,\ a_3, \ldots a_n)^1 ;$$

$$(a_2)^{r-1} P'(a_1,\ a_3, \ldots a_n)^1 \ldots . (a_n)^{r-1} P'(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-1})^1$$

bringt wegen des Eintrittes eines fremden Elementes

$$\frac{r(r-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(r-1).1} = \frac{r}{1}$$

Versetzungen hervor. Hieraus ergibt sich folgende der Aufgabe genügende Gruppenzahl:

$$A_2 = \frac{r}{1} . n(n-1) n^{q-r-1} .$$

c) Geht man nun zwei Stellen weiter und dehnt diese Betrachtung auf $(r+2)$ Stellen aus, so können zwei fremde Elemente zwischen die auflösenden Gruppen treten. Die fremden Elemente müssen aber auf den $(r+1)$ ersten Stellen vorkommen, weil sonst die unter *a*) und *b*) vorgesehenen Fälle eintreten würden. Diess führt zu folgendem Schema:

$$(a_1)^{r-1} P'(a_2, a_3 \ldots a_n)^2 . a_1\ P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r-2} .$$

$$(a_2)^{r-1} P'(a, a_3, \ldots a_n)^2 . a_2\ P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r-2}$$

$$(a_3)^{r-1} P'(a_1, a_2, a_4, \ldots a_n)^2 . a_3\ P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r-2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(a_n)^{r-1} P'(a_1, a_2 \ldots a_{n-1})^2 . a_n\ P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-r-2} .$$

Das getrennte Element hinter dem Punkte nimmt auch hier eine feste Stellung ein. Die vorausgehenden $(r+1)$ Elemente können unter sich jede beliebige Stellung einnehmen. Die aus diesen Versetzungen sich ergebende Vervielfachungszahl ist

$$\frac{(r+1)(r)(r-1)\ldots 3.2.1}{1.2.1.2\ldots .(r-1)} = \frac{r(r+1)}{1.2} .$$

Sie gehört jeder einzelnen Gruppe in der vorstehenden Zusammenstellung an. n Gruppen sind es. Die hieraus sich ergebende Zahl der der Aufgabe genügenden Gruppen ist

$$A_3 = \frac{r(r+1)}{1.2} n(n-1)^2 n^{q-r-2} .$$

Setzt man nun die angegebene Schlussweise durch alle Stellen fort und zählt die hieraus fliessenden Gruppen zusammen, so hat man sofort folgende Gesammt-Gruppen-Anzahl:

$$1)\ A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots$$

$$= n\, n^{q-r} + \frac{r}{1} n(n-1) n^{q-r-1} + \frac{r(r+1)}{1.2} n(n-1)^2 n^{q-r-2} + \ldots$$

$$\ldots \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(q-1)}{1.2\ldots(q-r)} n.(n-1)^{q-r}$$

$$= n[n^{q-r} + [r]_1 (n-1) n^{q-r-1} + [r]_2 (n-1)^2 n^{q-r-2} + [r]_3 (n-1)^3 n^{q-r-3} + \ldots$$

$$\ldots [r]_{q-r} (n-1)^{q-r}]$$

$$= n \Sigma_0^x [r]_x (n-1)^x n^{q-r-x}.$$

x durchläuft die Werthe 0, 1, 2, 3....$(q-r)$.

Diese Schlüsse führen so lange auf ein richtiges Resultat, als die eingeschobenen Elemente die $r$te Classe nicht erreichen. Erreichen sie diese und erheben sie sich darüber, so werden zu viele Gruppen gezählt, und zwar alle diejenigen, welche in den Ausdrücken

$$P'(a_2, a_3 \ldots a_n)^r,\ P'(a_1, a_3 \ldots a_n)^r, \ldots P'(a_1, a_2 \ldots a_{n-1})_r$$

und den zugehörigen höhern Classen enthalten sind und die Eigenschaft haben, der Aufgabe zu genügen. Sie müssen fixirt und von 1) ausgeschieden werden.

Die Gruppen, welche in dem Ausdrucke $P'(a_2, a_3 \ldots a_n)^r$ enthalten sind, haben die Form

$$(a_2)^r,\ (a_3)^r,\ (a_4)^r \ldots (a_n)^r.$$

Ihre Zahl ist $(n-1)$, denn die Zahl der Elemente ist um die Einheit verkürzt. Die Ausscheidungen sind durch die Glieder der nachstehenden Reihe:

$$[r]_r n(n-1)^r n^{q-2r},\ [r]_{r+1} n(n-1)^{r+1} n^{q-2r-1},$$

$$[r]_{r+2} n(n-1)^{r+2} n^{q-2r-2}, \ldots$$

und in ihnen durch die Ausdrücke

$$(n-1)^r,\ (n-1)^{r+1},\ (n-1)^{r+2}, \ldots$$

bedingt. Man findet nun die auszuscheidenden Gruppenanzahlen leicht, wenn man die ebengenannten Ausdrücke nach der Gleichung 1) behandelt. Diess geschieht, indem man $n-1$ statt n und allmählig $r, r+1, r+2, \ldots$ statt q schreibt und die fehlenden Stellen durch die Versetzungen mit Wiederholungen ergänzt. Dadurch erhält man folgende auszuscheidende Gruppenanzahlen:

$$2)\quad B_1 = [r]_r\, n\,(n-1)\, n^{q-2r},$$

$$B_2 = [r]_{r+1}\, n\,((n-1)(n-1) + \frac{r}{1}(n-1)(n-2))\, n^{q-2r-1},$$

$$B_3 = [r]_{r+2}\, n\,((n-1)(n-1)^2 + \frac{r}{1}(n-1)(n-2)(n-1) + [r]_2 (n-1)(n-2)^2)\, n^{q-2r-2},$$

$$B_4 = [r]_{r+3}\, n\,((n-1)(n-1)^3 + \frac{r}{1}(n-1)(n-2)(n-1)^2 + [r]_2 (n-1)(n-2)^2 (n-1) + [r]_3 (n-1)(n-2)^3)\, n^{q-2r-3},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$B_{r+1} = [r]_{2r}\, n\,((n-1)(n-1)^r + r(n-1)(n-2)(n-1)^{r-1} + \ldots \ldots [r]_r (n-1)(n-2)^r)\, n^{q-3r},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Man kann nun die Klammern auflösen und anders ordnen. Dadurch geht 2) über in

$$\begin{aligned}
3)\quad B = {} & n(n-1)\,[[r]_r n^{q-2r} + [r]_{r+1}(n-1) \,.\, n^{q-2r-1} + [r]_{r+2}(n-1)^2 n^{q-2r-2} + \ldots] \\
& + r\,.\,n(n-1)(n-2)\,[[r]_{r+1} n^{q-2r-1} + [r]_{r+2}(n-1) n^{q-2r-2} + [r]_{r+3}(n-1)^2 n^{q-2r-3} + \ldots.] \\
& + [r]_2\, n(n-1)(n-2)^2\,[[r]_{r+2} n^{q-2r-2} + [r]_{r+3}(n-1) n^{q-2r-3} + [r]_{r+4}(n-1)^2 n^{q-2r-4} \ldots] \\
& \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& + [r]_r\, n(n-1)(n-2)^r\,[[r]_{2r} n^{q-3r} + [r]_{2r+1}(n-1) n^{q-3r-1} + [r]_{2r+2}(n-1) n^{q-3r-2} + \ldots.] \\
& + [r]_{r+1}\, n(n-1)(n-2)^{r+1}\,[[r]_{2r+1} n^{q-3r-1} + [r]_{2r+2}(n-1) n^{q-3r-2} + [r]_{2r+3}(n-1) n^{q-3r-3} + \ldots] \\
& + [r]_{r+2}\, n(n-1)(n-2)^{r+2}\,[[r]_{2r+2} n^{q-3r-2} + [r]_{2r+3}(n-1) n^{q-3r-3} + [r]_{2r+4}(n-1) n^{q-3r-4} + \ldots] \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Die Darstellung 3) lässt sich mittelst der Σ auf eine die Uebersicht erleichternde Weise wiedergeben und zwar auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
4)\quad B = {} & n(n-1)\, \Sigma_0^x [r]_{r+x} (n-1)^x \,.\, n^{q-2r-x} \\
& + [r]_1\, n(n-1)(n-2)\, \Sigma_0^x [r]_{r+1+x} (n-1)^x \,.\, n^{q-2r-1-x}
\end{aligned}$$

$$+ [r]_2\, n(n-1)(n-2)^2 \sum_0^x [r]_{r+2+x} (n-1)^x n^{q-2r-2-x}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+ [r]_r\, n(n-1)(n-2)^r \sum_0^x [r]_{2r+x} (n-1)^x n^{q-3r-x}$$

$$+ [r]_{r+1}\, n(n-1)(n-2)^{r+1} \sum_0^x [r]_{2r+1+x} (n-1)^x n^{q-3r-1-x}$$

$$+ [r]_{r+2}\, n(n-1)(n-2)^{r+2} \sum_0^x [r]_{2r+2+x} (n-1)^x n^{q-3r-2-x}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

oder:

$$5)\quad B = n(n-1) \sum_0^y [r]_y (n-2)^y \left(\sum_0^x [r]_{r+y+x} (n-1)^x n^{q-2r-y-x}\right).$$

In 5) hat man statt y allmählig die Werthe 0, 1, 2, 3... $q-2r$ (also bis zu der Höhe, wodurch der Exponent von n in 0 übergeht) zu setzen und dann hat man für jeden einzelnen bestimmten Zahlenwerth für y allmählig die Werthe 0, 1, 2, 3... für x einzuführen und zwar bis zu der Höhe, wodurch der Exponent von n in 0 übergeht.

Die hier gemachten Schlüsse sichern so lange ein richtiges Resultat, bis der Exponent von $(n-2)$ sich auf r und darüber erhebt. Von da an sind wieder Ausscheidungen aus 4) zu machen, und zwar in Beziehung auf $(n-2)$, wie sie vorher auf $(n-1)$ gemacht wurden.

In dem Ausdrucke (Nr. 4.)

$$[r]_r\, n(n-1)(n-2)^r \sum_0^x [r]_{2r+x} (n-1)^x n^{q-3r-x}$$

ist $(n-2)^r$ nach der Gleichung 1) zu behandeln und zu dem Ende $q=r$ und $(n-2)$ statt n zu setzen. Dadurch erhält man als auszuscheidende Gruppenzahl

$$[r]_r\, n(n-1) \sum_0^x [r]_{2r+x} (n-1)^x n^{q-3r-x} . (n-2).$$

In dem Ausdrucke

$$[r]_{r+1}\, n(n-1)(n-2)^{r+1} \sum_0^x [r]_{2r+1+x} (n-1)^x n^{q-3r-1-x}$$

von Nr. 4. ist wegen $(n-2)^{r+1}$ in 1) der Werth $(r+1)$ statt q und $(n-2)$ statt n zu setzen. Man erhält sofort

$$(n-2)(n-2) + \frac{r}{1}(n-2)(n-3).$$

Dieser Werth ist in den vorstehenden Ausdruck einzuführen. Hiedurch entsteht die auszuscheidende Gruppenzahl:

$$[r]_{r+1}\, n(n-1) \sum_0^x [r]_{2r+1+x} n^{q-3r-1-x} [(n-2)(n-2) + r(n-2)(n-3)].$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man folgende auszuscheidende Gruppenzahl:

$$6)\quad C=[r]_r n(n-1)(n-2)\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+x}(n-1)^x n^{q-3r-x}$$

$$+[r]_{r+1}\,n(n-1)(n-2)\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+1+x}(n-1)^x n^{q-3r-1-x}$$

$$\times\left[(n-2)+\frac{r}{1}(n-3)\right]$$

$$+[r]_{r+2}\,n(n-1)(n-2)\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+2+x}(n-1)^x n^{q-3r-3-x}$$

$$\times\left[(n-2)^2+r(n-2)(n-3)+[r]_2(n-3)^2\right]$$

$$+[r]_{r+3}\,n(n-1)(n-2)\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+3+x}(n-1)^x n^{q-3r-3-x}$$

$$\times\left[(n-2)^3+r(n-2)^2(n-3)+[r]_2(n-2)(n-3)^2+[r]_3(n-3)^3\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Auch diese Zusammenstellung lässt sich, wie in Nr. 2.—5. geschah, anders ordnen. Stellt man sie nach den Vertikalreihen zusammen, so liegt in ihnen folgendes Gesetz:

$$7)\quad C=n^{3-1}\overset{z}{\Sigma_0}[r]_z(n-3)^z$$

$$\left(\overset{y}{\Sigma_0}[r]_{r+z+y}(n-2)^y\left(\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+z+y+x}(n-1)^x.\,n^{q-3r-z-y-x}\right)\right).$$

In dieser Darstellung durchläuft z allmählig die Werthe von 0, 1, 2, 3, ...$(q-3r)$ (bis zu der Höhe, wodurch der Exponent von n auf 0 sinkt); für jeden bestimmten Werth von z durchläuft dann y die Werthe 0, 1, 2, 3,.... bis zur erforderlichen Höhe (d. h. bis der Exponent von n auf 0 sinkt); und endlich für je zwei bestimmte Werthe von z und y (zusammen genommen) durchläuft x alle Werthe 0, 1, 2, 3,..... bis zur erforderlichen Höhe. Keine der drei veränderlichen Grössen kann für sich den Werth $(q-3r)$ übersteigen. Dasselbe gilt auch von ihrer Gesammtheit.

Das Gesetz für die Gesammtzahl aller auflösenden Gruppen ist hiernach:

$$8)\quad {}'P[\overset{r}{a_1},\ \overset{r}{a_2},\ \overset{r}{a_3},\ldots \overset{r}{a_n}]^q=A-B+C-D\ldots$$

oder

$$9)\quad {}'P[\overset{r}{a_1},\ \overset{r}{a_2},\ \overset{r}{a_3},\ldots \overset{r}{a_n}]^q=n\overset{x}{\Sigma_0}[r]_x(n-1)^x n^{q-r-x}$$

$$-n^{2-1}\overset{y}{\Sigma_0}[r]_y(n-2)^y\left(\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{r+y+x}(n-1)^x n^{q-2r-y-x}\right)$$

$$+n^{3-1}\overset{z}{\Sigma_0}[r]_z(n-3)^z$$

$$\left(\overset{y}{\Sigma_0}[r]_{r+z+y}(n-2)^y\left(\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{2r+z+y+x}(n-1)^x n^{q-3r-z-y-x}\right)\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Das Fortgangsgesetz dieser Darstellung liegt klar vor Augen. Das erste Glied in 9) erzeugt $q-r+1$ Glieder, das zweite $\frac{(q-2r+1)(q-2r+2)}{1\,.\,2}$, das dritte $\frac{(q-3r+1)(q-3r+2)(q-3r+3)}{1\,.\,2\,.\,3}$, das vierte $[q-4r+1]_4$ Glieder u. s. f.

Die Exponenten von x im ersten Gliede, von x, y im zweiten Gliede, von x, y, z im dritten Gliede u. s. f. bilden nämlich die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen $0, 1, 2, 3 \ldots (q-r)$ zur ersten Classe; aus den Elementen $0, 1, 2, 3, \ldots (q-2r)$ zur zweiten; aus den Elementen $0, 1, 2, 3, \ldots (q-3r)$ zur dritten Classe u. s. f. Man kann sich hiedurch ein Schema bilden, welches die Bildung der einzelnen Zahlenausdrücke von 9) sehr erleichtert.

Man kann nun mit den in diesem Paragraphen aufgefundenen Mitteln auch ähnliche Fragen über die Versetzungen mit Wiederholungen beantworten, wie sie im vorhergehenden Paragraphen von den Verbindungen beantwortet wurden.

Hiernach bestimmt sich die **Gruppenanzahl der Versetzungen aus n Elementen zur $q$ten Classe, wenn ein Element höchstens $(r-1)$mal wiederholt erscheint**, durch

$$10)\quad {}^{*}P[\overset{r-1}{a_1}, \overset{r-1}{a_2}, \ldots \overset{r-1}{a_n}]^q = n^q - n\,\overset{x}{\Sigma_0}[r]^x (n-1)^x n^{q-r-x}$$

$$+\, n^{2|-1}\,\overset{y}{\Sigma_0}[r]_y (n-2)^y \,(\overset{x}{\Sigma_0}[r]_{r+y+x} (n-1)^x n^{q-2r-y-x}).$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Eben so kann man nun die Gruppenanzahl dieser Versetzungen bestimmen, worin irgend ein Element gerade $r$mal wiederholt erscheint. Es ist

$$11)\qquad A_r = {}'P[\overset{r}{a_1}, \overset{r}{a_2}, \ldots \overset{r}{a_n}]^q - {}'P[\overset{r+1}{a_1}, \overset{r+1}{a_2}, \ldots \overset{r+1}{a_n}]^q$$

und

$$12)\qquad A_{r;s} = {}'P[\overset{r}{a_1}, \overset{r}{a_2}, \ldots \overset{r}{a_n}]^q - {}'P[\overset{r+s+1}{a_1}, \overset{r+s+1}{a_2}, \ldots \overset{r+s+1}{a_n}]^q.$$

Aus 9) erhält man sofort durch Einführung der betreffenden Werthe die nöthigen Zahlenausdrücke.

Die Gruppenanzahl der Versetzungen aus 6 Elementen zur 6ten Classe soll bestimmt werden, worin irgend ein Element wenigstens dreimal wiederholt erscheint.

Man hat in 9) statt x allmählig 0, 1, 2, 3; $n=6$, $r=3$ im ersten Gliede und 0 statt x, und 0 statt y im zweiten Gliede zu setzen. Dadurch wird

$${}'P[\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_6}]^6 = 6[6^3 + 3\,.\,5\,.\,6^2 + \frac{3\,.\,4}{1\,.\,2}\,.\,5^2\,.\,6 + \frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,5^3]$$

$$-\,6\,.\,5\,.\,\frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$=6[216+540+900+1250]-300=17436-300$$
$$=17136.$$

Behandelt man die Aufgabe nach §. 11. 5), so ist

$$n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=n_6=6$$

zu setzen, und man erhält

$$'P[\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}\ldots\overset{3}{a_6}]^6=20\times6.5.4.3+60\times6.5.4+10\times6.5+15\times6.5.4$$
$$+15\times6.5+6\times6.5+6$$
$$=7200+7200+300+1800+450+180+6$$
$$=17136.$$

§. 14.

Die hier gefundenen Gleichungen lassen manche Anwendung zu. Eine sehr einfache Anwendung ergibt sich auf das Würfelspiel, denn hier kommen die Versetzungen mit unbeschränkten und beschränkten Wiederholungen in Frage.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln einen **Pasch** d. h. wenigstens zwei gleiche Zahlen zu werfen?

Die Zahl der günstigen Fälle ist in folgendem Ausdrucke

$$'P[\overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \overset{2}{a_3},\ldots\overset{2}{a_6}]^3$$

begriffen und ergibt sich aus 9) §. 13. wenn dort $n=6$, $r=2$, und für x die Werthe 0, 1 gesetzt werden. Hiernach ist

$$A=6[6^1+\frac{2}{1}.5]=6.16=96.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist daher für den fraglichen Fall

$$1)\qquad W=\frac{96}{216}=\frac{4}{9}$$

und es ist 4 gegen 5 zu wetten, dass in jedem Wurfe mit drei Würfeln ein Pasch fallen wird.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit sechs Würfeln in einem Wurfe wenigstens zwei gleiche Zahlen zu werfen?

Die Zahl der günstigen Fälle ist in dem Ausdrucke

$$'P[\overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2},\ldots\overset{2}{a_1}]^6$$

begriffen. Sie wird gefunden, wenn $q=6$, $r=2$, $n=6$ gesetzt wird. Hernach hat man für x im ersten Gliede die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, für y und x die Doppelwerthe 0,0; 0,1; 0,2; 1,0; 1,1; 2,0

im zweiten Gliede, und für z, y, x die Werthe 0,0,0 im dritten Gliede zu setzen. Hiernach ist

$$A=6\left[6^4+2.5.6^3+\frac{2.3}{1.2}.5^2.6^2+\frac{2.3.4}{1.2.3}5^3.6+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}.5^4\right]$$

$$-6.5\left[\frac{2.3}{1.2}.6^2+\frac{2.3.4}{1.2.3}.5.6+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}.5^2\right]$$

$$-6.5.\frac{2}{1}.4.\left[\frac{2.3.4}{1.2.3}.6+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}.5\right]$$

$$-6.5.\frac{2.3}{1.2}.4^2.\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}.6^0$$

$$+6.5.4.\frac{2.3}{1.2}.\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4},$$

oder, wenn die angezeigten Zahlen-Werthe ermittelt werden:

$$A=6[1296+2160+2700+3000+3125]=+73686$$
$$-30[108+120+125]=-10590$$
$$-250[24+25]=-11760$$
$$-1440.5=-7200$$
$$+120.15=+1800$$
$$=75486-29550=45936.$$

Hiernach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

2) $$W=\frac{45936}{46656}=\frac{319}{324}.$$

Dass die in 1) und 2) gefundenen Werthe richtig sind, lässt sich auch durch die in §. 11. gegebenen Gleichungen nachweisen.

Ihre Richtigkeit lässt sich aber auch noch ganz einfach dadurch zeigen, dass man bemerkt, dass die Zahl der günstigen Fälle alle diejenigen Gruppen in sich begreift, worin Wiederholungen vorkommen, also diejenigen ausschliesst, worin nur Versetzungen aus 6 Elementen vorkommen. Die günstige Anzahl für Nro. 1. ist daher

$$A=P'[a_1\ a_2,\dots a_6]^3-P[a_1,\ a_2,\dots a_6]^3$$
$$=6^3-6^{3|-1}=216-120=96.$$

Die günstige Anzahl für 2) aber ist aus dem nämlichen Grunde

$$A=P'[a_1,\ a_2\dots a_6]^6-P[a_1,\ a_2,\dots a_6]^6$$
$$=6^6-6^{6|-1}=46656-720=45936,$$

wie oben gefunden wurde.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit zehn Würfeln einen Wurf zu thun, worin drei verschiedene Zahlen gerade je einmal (nicht mehr, nicht weniger), zwei andere gerade je zweimal und die letzte gerade dreimal vorkommt?

Die Zahl der günstigen Fälle ergibt sich nach 7) §. 7. aus folgendem Ausdruck:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_6;\ \overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2},\ldots \overset{2}{a_6};\ \overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2},\ldots \overset{3}{a_6}]^{3,2,1}$$

$$=\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2.1.2.3}\cdot\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2.1}=9072000;$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$3)\qquad W=\frac{10.9.8.7.6.5.5.4.3}{6.6.6.6.6.6.6.6.6.6}=\frac{5.7.5.5}{3^3.6^3}=\frac{875}{5832}.$$

§. 15.

Eine weitere Anwendung der hier gegebenen Entwicklungen lässt sich auf das Polynomium machen.

In §. 2. haben wir den Zusammenhang, welcher zwischen den Gruppen der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen und denen der Versetzungen mit und ohne Wiederholungen herrscht, nachgewiesen. Man kann die Gruppen der zweiten Art aus denen der ersten Art und umgekehrt ableiten, wenn man in die einzelnen Gruppen der Verbindungen die Versetzungen einführt, oder umgekehrt ausstösst. Diese Beziehungen lassen sich in Zeichen so darstellen:

$$1)\qquad P(a_1,\ a_2,\ldots a_n)^q=P[C(a_1,\ a_2,\ldots a_n)^q],$$

$$2)\qquad P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^q=P[C'(a_1,\ a_2,\ldots a_n)^q].$$

Durch das P auf der rechten Seite vor der eckigen Klammer soll das Einführen der Versetzungen in die Elemente der aus

$$C(a_1,\ a_2,\ldots a_n)^q \text{ und } C'(a_1,\ a_2,\ldots a_n)^q$$

hervorgehenden Gruppen angedeutet werden.

Aus der Zusammenstellung in 1) und 2) lässt sich noch eine weitere Beziehung, die zwischen den Gruppen der Verbindungen und denen der Versetzungen (mit und ohne Wiederholungen) aus einerlei Elementenzahl und zu derselben Classe herrscht, erkennen. Sie ist folgende:

3) In den Gruppen der Versetzungen ohne Wiederholungen einer bestimmten Classe und Elementenzahl gibt es gerade so viele unter sich verschiedene Grup-

pen als in denen der Verbindungen ohne Wiederholungen zur nämlichen Classe und Elementenzahl;

oder die Anzahl der unter sich verschiedenen Gruppen in $P(a_1, a_2 \ldots a_n)^q$ ist gerade so gross als in $C(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$, denn das Mehr der Gruppen in $P(a_1, a_2, . a_n)^q$ hängt von der Versetzung oder verschiedenen Stellung der nämlichen Elemente in einer und derselben Gruppe, nicht aber von verschiedenen Elementen ab.

4) In den Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen einer bestimmten Classe und einer bestimmten Elementenzahl gibt es gerade so viele unter sich verschiedene Gruppen als in denen der Verbindungen mit Wiederholungen zur nämlichen Classe und Elementenzahl;

oder die Anzahl der unter sich verschiedenen Gruppen in $P'(a_1, a_2, .. a_n)^q$ ist gerade so gross als in $C'(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$ aus dem oben angeführten Grunde.

Hiernach ist die Gruppenzahl (A_v) der nnter sich verschiedenen Gruppen in $P(a_1, a_2, \ldots a_n)^q$

$$5) \qquad A_v = (n)_q = \frac{n(n-1) \ldots (n-q+1)}{1.2 \ldots q},$$

und die Gruppenzahl der unter sich verschiedenen Gruppen in $P'(a_1, a_2 \ldots a_n)^q$

$$6) \qquad A_v = [n]_q = \frac{n(n+1)(n+2) \ldots (n+q-1)}{1.2.3 \ldots q}.$$

Ein diese Sätze erörterndes und bestätigendes Beispiel wurde schon oben §. 2. angeführt.

Ausserdem besteht ein ganz enger Zusammenhang zwischen den Versetzungen mit Wiederholungen einer bestimmten Classe und bestimmten Elementenzahl und dem Polynomium, wenn die Elemente der Versetzungen mit den Gliedern des Polynomiums und der Classenexponent mit der Potenz des Polynomiums zusammenfällt. Beides sind nämlich verschiedene Darstellnngen einer und derselben Sache.

So ist z. B.

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 6abc + 6abd$$
$$+ 3ab^2 + 3ac^2 + 6acd + 3ad^2 + b^3 + 3b^2c$$
$$+ 3b^2d + 3bc^2 + 6bcd + 3bd^2 + c^3$$
$$+ 3c^2d + 3cd^2 + d^3.$$

Genau dieselben Gebilde haben wir schon in §. 2. erhalten. Hiernach hat man:

$$(a+b+c+d)^3 = P'(a, b, c, d)^3$$

und in Rücksicht auf 2) dieses Paragraphen.

$$(a+b+c+d)^3 = P'(a,\ b,\ c,\ d)^3 = P[C'(a,\ b,\ c,\ d)^3].$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht ins Allgemeine übertragen, und man hat sofort

$$7)\quad (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n)^q = P'(a_1,\ a_2, \ldots a_n)^q = P[C'(a_1,\ a_2 \ldots a_n)^q].$$

Stellt man nun diesen Satz in der gewöhnlichen Polynomialform dar, so ändert das in Nichts die gemachte Schlussreihe und man hat, wenn die ordnende Grösse x eingeführt wird,

$$8)\quad (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, a_n x^n)^q = P'(a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n)^q$$
$$= P[C'(a_1 x,\ a_2 x^2,\ a_3 x^3, \ldots a_n x^n)^q].$$

Durch die Darstellung 8) hat sich nur die Ordnung, in welcher die entstehenden Gruppen zusammengestellt werden, nicht aber die Gruppen oder ihre Anzahl geändert. Man kann daher die gewonnenen Sätze benutzen, um die Glieder, welche bei der entwickelten Darstellung des Polynomiums entstehen, zu zählen.

Hiebei unterscheiden sich folgende zwei Fragen:

a) wie gross ist die Zahl aller möglichen Glieder eines Polynomiums?

b) wie gross ist die Zahl aller unter sich verschiedenen Glieder desselben?

Die Zahl aller möglichen Glieder, welche durch die entwickelte Darstellung eines Polynomiums entstehen, fällt mit der Anzahl der Gruppen zusammen, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen gebildet werden aus den Elementen der Grundreihe des Polynomiums zu der so vielten Classe als der Exponent des Polynomiums angibt. Es ist sofort:

$$9)\quad A(a_1 x, a_2 x^2, \ldots a_n x^n)^q = P'[a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n]^q = n^q.$$

Die Zahl aller unter sich verschiedenen Glieder in der entwickelten Darstellung eines Polynomiums fällt mit der Zahl der Gruppen zusammen, wenn die Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen der Grundreihe zur so vielten Classe gebildet werden als die Potenz des Polynomiums angibt. Es ist sofort

$$10)\quad A_v(a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n)^q = C'[a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots a_n x^n]^q$$
$$= [n]^q = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+q-1)}{1.2.3\ldots q}.$$

Den eben auf so einfache Weise gewonnenen Satz (Nro. 10.) hat Brianchon im Journ. d. l'école polyt. T. XV. Cah. XXV. Pg. 158. (Mémoire sur les puissances des Polynomes) auf eine sehr weitläufige Weise entwickelt, so dass man sich in der That über den Aufwand der dort gebrauchten Mittel wundern muss, um einen so einfachen Satz zu beweisen und zum Gegenstand einer besondern, umfangreichen Abhandlung zu machen. Er hat den Satz unter folgender Form gegeben:

11) $A_r(a_1 \, x, \, a_2 x^2, \ldots a_n x^n) =$ ... rin irgend ein Glied der ... rscheint, ist nach 11) §. 13

$= \ldots$, $a_2, \ldots a_{10}]^6$

Wendet man ... $\frac{4.5}{.2.3}.9^3) - 10.9.\frac{3.4.5}{1.2.3}$

besondern Fall an, so ist

$A(a, b, c, \ldots) = \ldots \frac{.5}{1.2}.9^2]$

$A_r(a, b, c, \ldots) = \ldots$

wie es sein muss. ... wenn man diese Probleme

Wendet man ...

Polynomium an, so ...

und es lässt sich ...

die von Brianchon ...

Das Polynom ...

... hier gegebenen Entwicklun-

wird entwickelt. ... ht werden.

a) Wie gross ist ... ems bilden bekanntlich die

ein Glied der ... ungen aus den Elementen

kommt? 9, ...

b) höchstens ...

c) worin irgend ... , 6, 7, 8, 9

11) §. 13. ... doch mit der Beschränkung, dass

d) worin irgend ... ehmen kann. In den Zahlen einer

in der (r+1)ten ... daher die einzelnen Ziffern ein

... scheinen. Alle Zahlen, welche eilf

e) Wie gross ... n daher irgend ein Element mehrere

der, worin ... n. Bei Zahlen aber, welche zehn

der $r$ten ... müssen nicht nothwendig wiederholte

f) höchstens ...

g) worin irgend ... den Zahlen einer bestimmten Classe

10) §. 1... n kommen darin vor, worin irgend

h) worin ... mal, zweimal, dreimal u. s. w. wie-

in der ... iebiger Verbindung mit einander

u. s. w. In ... te Frage für einen bestimmten Fall

allgemein ... ine auf die Stellung der 0 sich

Hieran ... werden. Sie ergiebt sich aus

Das P... as Lehre §. 41. Nro. 122. oder 125.

... nämlich um die Zerstreuung

... nweisung einzelner Elemente

wird entw... e Stellen bei den Gruppen

mit ...

a) Wie ... Elementen ausgehoben und

stell... h je ... entstehende Gruppenzahl

Pot... ut w...

21

b) wenigstens in der *s*ten Potenz erscheint?

c) höchstens in der *s*ten Potenz erscheint?

d) wenigstens in der *s*ten und höchstens in der $(s+r)$ten Potenz erscheint?

u. s. w. Hierin kann das Polynomium nur eine oder mehrere beliebig beschränkte oder unterbrochene Grundreihen haben.

Die Beantwortung dieser sehr mannigfaltigen Fragen hängt mit Problemen zusammen, die ich in einer besondern Schrift „die Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen aus einer oder mehreren beliebig beschränkten Elementenreihen nebst ihrer Anwendung auf Analysis und Wahrscheinlichkeits-Rechnung" untersucht habe und weswegen ich dorthin verweise.

Wird das Polynomium

$$(a_1\ a_2, \ldots a_{10},)^6$$

gebildet, so ist die Zahl der unter sich verschiedenen Glieder, worin ein Glied der Grundreihe wenigstens in der dritten Potenz erscheint, nach 6) §. 12.

$$'C[\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2} \ldots . \overset{3}{a_{10}}]^6 = \frac{10.11.12.13}{1.2.3.4} + 3.\frac{9.10.11.12}{1.2.3.4} - 1.\frac{9.10}{1.2.}$$

$$= 2200 - 45 = 2155.$$

Die Zahl der unter sich verschiedenen Glieder, vorin irgend ein Glied der Grundreihe gerade in der dritten Potenz erscheint, ist nach 10) §. 12.

$$'A_3 = 'C[\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_{10}}]^6 - 'C[\overset{4}{a_1}, \overset{4}{a_2}, .. \overset{4}{a_{10}}]^6 =$$

$$= \frac{10.11.12.13}{1.2.3.4} + 3.\frac{9.10.11.12}{1.2.3.4} - \frac{9.10}{1.2}$$

$$- \frac{10.11.12}{1.2.3} - 2.\frac{9.10.11}{1.2.2}$$

$$= 2200 - 595 = 1605.$$

Die Zahl aller möglichen Glieder, worin ein Glied der Grundreihe wenigstens in der dritten Potenz erscheint, ist nach 9) §. 13.

$$'P[\overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_{10}}]^6 = 10.(10^3 + 3.10^2.9 + \frac{3.4}{1.2}.10.9^2 + \frac{3.4.5}{1.2.3}.9^3)$$

$$- 10.9.\frac{3.4.5}{1.2.3}$$

$$= 158500 - 900 = 157600.$$

Die Zahl aller möglichen Glieder, worin irgend ein Glied der Grundreihe gerade in der dritten Potenz erscheint, ist nach 11) §. 13

$$'P[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2},\ldots \overset{3}{a_{10}}]^6 - 'P[\overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2},\ldots \overset{4}{a_{10}}]^6$$

$$=10[10^3+3.10^2.9+\frac{3.4}{1.2}.10.9^2+\frac{3.4.5}{1.2.3}.9^3)-10.9.\frac{3.4.5}{1.2.3}$$

$$-10[10^2+4.10.9+\frac{4.5}{1.2}.9^2]$$

$$=158500-13600=144900.$$

Die gleichen Resultate erhält man, wenn man diese Probleme nach §. 8. und §. 11. behandelt.

§. 16.

Noch eine dritte Anwendung der hier gegebenen Entwicklungen soll auf das Zahlensystem gemacht werden.

Die Zahlen unseres Zahlensystems bilden bekanntlich die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen (Zahlzeichen)

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

zu den verschiedenen Classen, jedoch mit der Beschränkung, dass die 0 nicht die erste Stelle einnehmen kann. In den Zahlen einer und derselben Classe können daher die einzelnen Ziffern ein oder mehrere mal wiederholt erscheinen. Alle Zahlen, welche eilf Ziffern und mehr haben, müssen daher irgend ein Element mehrere mal wiederholt in sich führen. Bei Zahlen aber, welche zehn Ziffern und weniger haben, müssen nicht nothwendig wiederholte Zahlzeichen vorkommen.

Man kann daher bei den Zahlen einer bestimmten Classe fragen: wie viele Zahlen kommen darin vor, worin irgend eine Ziffer grade einmal, zweimal, dreimal u. s. w. wiederholt, oder in beliebiger Verbindung mit einander wiederholt erscheint.

Um nun die eben angeregte Frage für einen bestimmten Fall beantworten zu können, muss eine auf die Stellung der 0 sich beziehende Vorfrage beantwortet werden. Sie ergiebt sich aus dem 7. Abschnitte meiner Combinations Lehre §. 41. Nro. 122. oder 125. S. 96. u. f. leicht. Es handelt sich nämlich um die Zerstreuung der Elemente in Fächer, oder um Einweisung einzelner Elemente (hier eines Elementes) in bestimmte Stellen bei den Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen.

Sollen nämlich je r Elemente aus n Elementen ausgehoben und auf s Stellen zerstreut werden, so wird die entstehende Gruppenzahl

so vielmal genommen werden müssen als eine der nachstehenden Gleichungen angibt:

$$1)\quad Z[s;\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_n]^r = (n)_r . (s)_r =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots.r} . \frac{s(s-1)\ldots.(s-r+1)}{1.2.3\ldots r};$$

$$2)\quad Z.P[s;\ a_1,\ a_2, \ldots a_n]^r = n^{r|-1}(s)_r$$

$$= n(n-1)\ldots.(n-r+1) . \frac{s(s-1)\ldots.(s-r+1)}{1.2.3\ldots r}.$$

Im ersten Falle kommen keine Versetzungen in Frage. Im zweiten geschieht diess. Der Buchstabe Z bedeutet Zerstreuungen in Fächer oder Einweisung der Elemente in bestimmte Stellen.

Sind die zu zerstreuenden Elemente gleich, so ändert diess an der Schlussreihe nichts. Es tritt nur die Beschränkung ein, dass Elementenzahl und Classenexponent einander gleich werden. Hiernach ist aus 1)

$$3)\qquad Z[s;\ a^n]^n = (n)_n (s)_n = (s)_n = \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{1.2\ldots.n}.$$

In dem Zahlensystem fällt nun die 0 unter das Gesetz 3). Sie kann alle Stellen mit Ausnahme der ersten durchlaufen, und erscheint dann entweder einmal, oder zweimal oder dreimal wiederholt u. s. w. Kömmt sie nun bei einer $(s+1)$stelligen Zahl in Frage, so kann sie nur die (s) letzten Stellen in den genannten Dimensionen durchlaufen. Sie erzeugt dann im betreffenden Falle folgende Vervielfachungen:

$$4)\qquad Z[s;\ \overset{1}{a_0}]^1 = (s)_1,$$

$$Z[s;\ \overset{2}{a_0}]^2 = (s)_2 = \frac{s(s-1)}{1.2},$$

$$Z[s;\ \overset{3}{a_0}]^3 = (s)_3 = \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3},$$

u. s. w.;

denn sie bringt in jeder einzelnen Gruppe, womit sie in Verbindung tritt, die gleichen Erscheinungen, also auch die gleichen Vervielfachungen hervor.

Nach diesen Vorbemerkungen sollen nun die Eigenschaften aller sechsstelligen Zahlen untersucht werden, welche durch wiederholtes Vorkommen der sie erzeugenden Ziffern bedingt sind. Die sechsstelligen Zahlen zerfallen hiernach in folgende Arten:

a) solche, worin nur eine Ziffer vorkommt oder eine Ziffer erscheint sechsmal wiederholt. Diese Eigenschaft wird angedeutet durch das Symbol (nach §. 8.)

$$e^6;$$

b) solche, worin **zwei verschiedene** Ziffern vorkommen; oder eine Ziffer erscheint einmal, die zweite fünfmal; eine Ziffer zweimal, die zweite viermal; eine Ziffer dreimal, eine zweite auch dreimal. In Zeichen

$$e^1\, e^5,\; e^2\, e^4,\; e^3\, e^3;$$

c) solche, worin drei verschiedene Ziffern vorkommen. Die einzelnen Fälle lassen sich durch folgende Symbole erkennen:

$$e^1\, e^1\, e^4,\; e^1\, e^2\, e^3,\; e^2\, e^2\, e^2;$$

d) solche, worin vier verschiedene Ziffern vorkommen, nach folgenden Symbolen:

$$e^1\, e^1\, e^1\, e^3,\; e^1\, e^1\, e^2\, e^2;$$

e) solche, worin fünf verschiedene Ziffern vorkommen, nach folgendem Symbole:

$$e^1\, e^1\, e^1\, e^1\, e^2;$$

f) solche, worin sechs verschiedene Ziffern vorkommen, nach folgendem Symbole.

$$e^1\, e^1\, e^1\, e^1\, e^1\, e^1.$$

Alle hier aufgezählten Fälle müssen nun mit Rücksicht auf die Gleichungen 4) und auf die Gleichung 7) §. 7. untersucht werden. Ueberall, wo die Null in Frage kommt, soll sie durch das Zeichen a_0 angedeutet werden.

5) Das Symbol e^6 deutet auf folgende Gruppenzahl:

$$P[\overset{6}{a_1},\ \overset{6}{a_2}, \ldots \overset{6}{a_9}]^1 = 9.$$

6) Das Symbol $e^1\, e^5$ deutet auf folgende Fälle, und zwar ohne 0:

$$P[\overset{1}{a_1},\ \overset{1}{a_2} \ldots . \overset{1}{a_9};\ \overset{5}{a_1},\ \overset{5}{a_2}, \ldots \overset{5}{a_9}]^{1,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.1}.9.8 = 432.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[\overset{5}{a_1},\ \overset{5}{a_2}, \ldots \overset{5}{a_9}]^1 Z[5;\ a_0]^1 = 9.\frac{5}{1} = 45.$$

Mit der 0 als Fünffaches:

$$P[a_1,\ a_2, \ldots a_9]^1 Z[5;\ \overset{5}{a_0}]^5 = 9.\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 9.$$

7) Das Symbol $e^2\ e^4$ erzeugt folgende Gruppenzahl, und zwar ohne 0:

$$P[\overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9};\ \overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2}, \ldots \overset{4}{a_9}]^{1,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3.4} . 9.8 = 1080.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[\overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2}, \ldots \overset{4}{a_9}]^1 . Z[5;\ \overset{2}{a_0}]^2 = 9 . \frac{5.4}{1.2} = 90.$$

Mit der 0 als Vierfaches:

$$P[\overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2}, \ldots . \overset{2}{a_9}]^1 Z[5;\ a_0]^4 = 9 . \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 45.$$

8) Das Symbol $e^3\ e^3$ erzeugt folgende Gruppenzahl, ohne 0:

$$P[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2}, .. \overset{3}{a_9}]^2 = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2.3} . \frac{9.8}{1.2} = 720.$$

Mit der 0 als Dreifaches:

$$P[\overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2} \ldots \overset{3}{a_9}]^1 Z[5;\ \overset{3}{a_0}]^3 = 9 . \frac{5.4.3}{1.2.3} = 90.$$

9) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^4$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1,\ a_2, \ldots a_9;\ \overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2}, \ldots \overset{4}{a_9}]^{2,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.1.2.3.4} . \frac{9.8}{1.2} . 7 = 7560.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1\ a_2, .. a_9;\ \overset{4}{a_1},\ \overset{4}{a_2}, \ldots \overset{4}{a_9}]^{1,1} Z[5;\ a_0]^1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.1.2.3.4} . 9.8 . \frac{5}{1} = 1800.$$

Mit der 0 als Vierfaches:

$$P[a_1,\ a_2, \ldots a_9]^2 Z[5,\ \overset{4}{a_0}]^4 = \frac{2.1}{1.1} . \frac{9.8}{1.2} . \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 360.$$

10) Das Symbol $e^1\ e^2\ e^3$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1,\ a_2, \ldots a_9;\ \overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9};\ \overset{3}{a_1},\ \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_9}]^{1,1,1}$$
$$= \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.2.1.2.3} . 9.8.7 = 30240.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[\overset{2}{a}_1,\ \overset{2}{a}_2,\ldots \overset{2}{a}_9;\ \overset{3}{a}_1,\ \overset{3}{a}_2,\ldots \overset{3}{a}_9]^{1,1}\, Z[5;\ a_0]^1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3}.9.8.\frac{5}{1} = 3600.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{3}{a}_1,\ \overset{3}{a}_2,\ldots \overset{3}{a}_9]^{1,1}\, Z[5;\ \overset{2}{a}_0]^2 = \frac{4.3.2.1}{1.1.2.3}.9.8.\frac{5.4}{1.2} = 2880.$$

Mit der Null als Dreifaches:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{2}{a}_1,\ \overset{2}{a}_2,\ldots \overset{2}{a}_9]^{1,1}\, Z[5;\ \overset{3}{a}_0]^3 = \frac{3.2.1}{1.1.2}.9.8.\frac{5.4.3}{1.2.3} = 2160.$$

11) Das Symbol $e^2\ e^2\ e^2$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[\overset{2}{a}_1,\ \overset{2}{a}_2,\ldots \overset{2}{a}_9]^3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.1.2.1.2}\cdot\frac{9.8.7}{1.2.3} = 7560.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[\overset{2}{a}_1,\overset{2}{a}_2,\ldots \overset{2}{a}_9]^2\, Z[5;\ \overset{2}{a}_0]^2 = \frac{4.3.2.1}{1.2.1.2}\cdot\frac{9.8}{1.2}\cdot\frac{5.4}{1.2} = 2160.$$

12) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^1\ e^3$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{3}{a}_1,\ \overset{3}{a}_2,\ldots \overset{3}{a}_9]^{3,1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.3}\cdot\frac{9.8.7}{1.2.3}.6 = 60480.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{3}{a}_1,\ \overset{3}{a}_2,\ldots \overset{3}{a}_9]^{2,1}\, Z[5;\ a_0]^1$$
$$= \frac{5.4.3.2.1}{1.1.1.2.3}\cdot\frac{9.8}{1.2}.7.\frac{5}{1} = 25200.$$

Mit der 0 als Dreifaches:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9]^3\, Z[5;\ \overset{3}{a}_0]^3 = \frac{3.2.1}{1.1.1}\cdot\frac{9.8.7}{1.2.3}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3} = 5040.$$

13) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^2\ e^2$ erzeugt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2},\ldots \overset{2}{a_9}]^{2,2}=\frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.1.2.1.2}\cdot\frac{9.8}{1.2}\cdot\frac{7.6}{1.2}$$

$$=136080.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2},\ldots \overset{2}{a_9}]^{1,2}Z[5;\ a_0]^1=\frac{5.4.3.2.1}{1.1.2.1.2}.9.\frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{5}{1}$$

$$=37800.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2},\ldots \overset{2}{a_9}]^{2,1}Z[5;\ \overset{2}{a_0}]^2=\frac{4.3.2.1}{1.1.1.2}\cdot\frac{9.8}{1.2}\cdot 7\cdot\frac{5.4}{1.2}$$

$$=30240.$$

14) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2$ bedingt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{2}{a_1}\ \overset{2}{a_2},\ldots \overset{2}{a_9}]^{4,1}=\frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.1.2}\cdot\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}.5$$

$$=226800.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9;\ \overset{2}{a_1},\ \overset{2}{a_2},\ldots \overset{2}{a_9}]^{3,1}Z[5;\ a_0]^1=\frac{5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2}\cdot\frac{9.8.7}{1.2.3}.6.\frac{5}{1}.$$

$$=151200.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1,\ a_2\ldots a_9]^4 Z[a_5;\ \overset{2}{a_0}]^2=\frac{4.3.2.1}{1.1.1.1}\cdot\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}\cdot\frac{5.4}{1.2}=30240.$$

15) Das Symbol $e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^1$ bedingt folgende Gruppenzahlen, ohne 0:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9]^6=6.5.4.3.2.1.\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}=60480.$$

Mit der 0 als Einfaches:

$$P[a_1,\ a_2,\ldots a_9]^5 Z[5;\ a_0]^1=5.4.3.2.1.\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{5}{1}=75600,$$

Stellt man nun nach dieser Aufzählung der einzelnen Fälle die gewonnenen Resultate zusammen, so ist unter den sechsstelligen Zahlen die Anzahl derjenigen:

a) worin nur eine Ziffer vorkommt nach 5)	9
b) worin zwei verschiedene Ziffern vorkommen, 6), 7), 8)	2511
c) worin drei verschiedene Ziffern vorkommen, 9), 10), 11)	58320
d) worin vier verschiedene Ziffern vorkommen, 12), 13) .	294840
e) worin fünf verschiedene Ziffern vorkommen, 14) . .	408240
f) worin sechs verschiedene Ziffern vorkommen, 15) . .	136080
Die Summe aller dieser Zahlen beträgt	900000

wie diess sein muss, denn die Zahl aller sechsstelligen Zahlen ist

$$P'[a_0, a_1, \ldots a_9]^6 - P'[a_0, a_1, \ldots a_9]^5 = 10^6 - 10^5 = 900000.$$

Die hier untersuchten Fälle beantworten alle auf die sechsstelligen Zahlen bezüglichen Fragen. So ist die Anzahl derjenigen Zahlen, worin gerade drei verschiedene Zahlen vorkommen, die eine gerade einmal, die andere gerade zweimal, die dritte gerade dreimal wiederholt nach Nro. 10) $(e^1\ e^2\ e^3)$:

$$30240 + 3600 + 2880 + 2160 = 38880.$$

Am grössten ist die Zahl derjenigen, worin fünf verschiedene Ziffern vorkommen, nämlich vier unter sich verschiedene Zahlen je einmal, eine fünfte zweimal nach 14) $(e^1\ e^1\ e^1\ e^1\ e^2)$:

$$226800 + 151200 + 30240 = 408240.$$

Auf die hier gezeigte Weise sind alle das Zahlensystem betreffenden und hier einschlagenden Fragen zu behandeln.

Soll die Anzahl aller zehnstelligen Zahlen bestimmt werden, worin drei verschiedene Ziffern je einmal, zwei weitere unter sich und den vorigen verschiedene Ziffern je zweimal und eine sechste dreimal wiederholt erscheint, so hat man das Symbol

$$e^1\ e^1\ e^1\ e^2\ e^2\ e^3$$

nach 7) §. 6. und Nro. 3) dieses Paragraphen zu behandeln. Es entsteht sofort ohne 0:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_9}]^{3,2,1}$$

$$= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2.1.2.3} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot \frac{6.5}{1.2} \cdot 4$$

$$= 762048000.$$

Mit der Null als Einfaches:

$$P[a_1, a_2 \ldots a_9; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_9}]^{2,2,1} Z[9; a_0]^1 =$$
$$= \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.2.1.2.1.2.3} \cdot \frac{9.8}{1.2} \cdot \frac{7.6}{1.2} \cdot 5 \cdot \frac{9}{1}$$
$$= 514382400.$$

Mit der 0 als Zweifaches:

$$P[a_1, a_2 \ldots a_9; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_9}]^{3,1,1} Z[9; \overset{2}{a_0}]^2$$
$$= \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2.3} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot 6.5 \cdot \frac{9.8}{1.2}$$
$$= 304819200.$$

Mit der 0 als Dreifaches:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_9; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_9}; \overset{3}{a_1}, \overset{3}{a_2}, \ldots \overset{3}{a_9}]^{3,2} Z[9; \overset{3}{a_0}]^3$$
$$= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.1.1.1.2.1.2} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3}$$
$$= 133358400.$$

Hiernach ist die gesuchte Anzahl:

$$A = 762048000 + 514382400 + 304819200 + 133358400$$
$$= 1714608000.$$

Das allgemeine Gesetz, worauf die in diesem Paragraphen gegebenen Entwicklungen beruhen, ist, wie man sieht, eine Verbindung des Satzes 7) §. 7. mit 3) dieses Paragraphen. Bezeichnet man der Kürze wegen die zu 7) §. 7. gehörige Gruppenzahl durch A, so ist sofort

16) $$P[a_1, a_2, \ldots a_n; \overset{2}{a_1}, \overset{2}{a_2}, \ldots \overset{2}{a_n}, \ldots; \overset{k}{a_1}, \overset{k}{a_2}, \ldots \overset{k}{a_n}]^{q_1, q_2, \ldots q_k} \times Z[s; \overset{m}{a_0}]^m$$
$$= A \cdot (s)_m = A \cdot \frac{s(s-1)(s-2) \ldots (s-m+1)}{1.2.3 \ldots m},$$

und dieser Satz sagt aus: **Die Gruppen der Versetzungen sollen unter den zu 7) §. 7. angegebenen Bedingungen gebildet werden, und in jede Gruppe soll ein neues Element (a_0) als $m$faches eintreten und bestimmte Stellen (beliebig zu Anfang, in der Mitte, am Ende) durchlaufen.**

Hier gibt die eben schon angegebene Bedingungsgleichung

17) $$x = 1 . q_1 + 2 . q_2 + 3 . q_3 + \ldots + k . q_k$$

die Beschränkung für die Vertheilungsexponenten und

18) $$q = x + m$$

die Bestimmung für die Dimensionen der Elemente, die in jeder einzelnen Gruppe vorkommen sollen.

§. 17.

Schliesslich ist zu bemerken, dass der Ort, wo die hier in §. 6. — §. 16. entwickelten Sätze in der Combinationslehre ihre Stelle finden, klar vorliegt. Sie gehören zu den Combinationen (Versetzungen und Verbindungen) mit und ohne Wiederholungen. Die in §. 12. und §. 13. aufgeführten Gebilde lassen sich auch noch einer andern Ansicht unterordnen und schliessen sich deswegen auch einer andern Classe von Combinationen an, die ich in einer Abhandlung „die Reihenfolge der Elemente bei den Versetzungen mit und ohne Wiederholungen aus einer oder mehreren Elementenreihen und ihre Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung" behandelt habe, denn sie geben die Zahl der Gruppen an, worin die erzeugenden Elemente ein oder mehreremal wiederholt oder an einander gereiht erscheinen. Von dieser Ansicht aus sind sie betrachtet und untersucht. Weiss hat in der oben angeführten Abhandlung (Nro. I. und II.) die in §. 9. aufgeführten Probleme (wozu auch die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen gehören), die sich nach unserer Bezeichnung so darstellen:

$$*C[\overset{k}{a_1}, \overset{k}{a_2}, \ldots \overset{k}{a_{n_k}}, \ldots . \overset{k-1}{a_{n_{k-1}}}, \ldots . \overset{3}{a_{n_3}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots a_{n_1}]^q$$

und

$$*P[\overset{k}{a_1}, \overset{k}{a_2}, \ldots \overset{k}{a_{n_k}}, \ldots . \overset{k-1}{a_{n_{k-1}}}, \ldots . \overset{3}{a_{n_3}}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots a_{n_1}]^q,$$

untersucht, wie sich einfach aus der Vergleichung der hier aufgestellten Gleichungen mit den dort entwickelten Formeln und gewählten Beispielen ergibt; hat aber die in §. 8. und §. 11. aufgestellten Probleme nicht berücksichtigt, die ich durch

$$'C[a_1\ a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots \overset{k-1}{a_{n_{k-1}}}, \ldots \overset{k}{a_{n_k}}]^q$$

$$'P[a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots \overset{2}{a_{n_2}}, \ldots \ldots \overset{k}{a_{n_k}}]^q$$

bezeichnet habe. Beide Arten von Problemen gehören, wie hier gezeigt wurde (§. 6. und §. 7.), zusammen und ergänzen sich gegenseitig. Der Uebergang von den Problemen der einen Art auf die anderen ist deswegen nicht schwer, wie aus den hierhergehörigen Paragraphen hervorgeht.

Die in §. 8. — §. 11. entwickelten Gesetze führen auf keine geschlossenen Formeln. Dieser Vorzug kommt nur den in §. 12. und

§. 13. entwickelten Gleichungen zu. **Weiss** hat in Nro. IV.—VIII. seiner Abhandlung noch weitere Probleme aus der Combinations-Lehre behandelt, und die von ihm näher untersuchten Gebilde **Permutationen, Combinationen und Variationen mit beschränkter Stellenbesetzung** genannt.

Auch auf diesem Gebiete lohnt die Wissenschaft dankbar mit reicher Ausbeute, wie sich dort zeigt. Der von ihm dort behandelte Gegenstand ordnet sich nach *m* meinem Dafürhalten der von mir im 5ten Abschnitte meiner Combinationslehre aufgeführten Abtheilung unter, worin diejenigen Combinationen untersucht sind, welche durch Verbindung der Gruppen verschiedener Elementen-Reihen erzeugt werden. Ich verweise deswegen zur Bestätigung des Gesagten auf die §§. 33., 34., 35., 36. und 37. der Combinationslehre, wo die Grundzüge des angeregten Gegenstandes nach dem Zwecke dieser Schrift sich entwickelt finden.

Auch hier kehrt der Wunsch wieder, sich über Benennung und Bezeichnung in der Combinationslehre zu verständigen. Wird nun aber aus irgend welchen Gründen dennoch von dem einen oder dem andern eine ihm besonders zusagende Benennungs- und Bezeichnungsweise gewählt, so liegt es in allseitigem Interesse, dass der Ort, wo der behandelte Gegenstand im System sich einreiht, ferner Namen und Bezeichnung, unter welchen der nämliche Gegenstand von anderen aufgeführt wurde, mit angegeben werde. Es lassen sich gar manche Probleme unter verschiedenen Gesichtspunkten, wie aus dem hier Gesagten hervorgeht, behandeln und beleuchten. Jedenfalls hätte eine solche Zusammenstellung den Vortheil, dass sie den Ueberblick und die Zurechtfindung erleichterte, und so Gelegenheit böte, den Vorzug der einen Benennungs- und Bezeichnungsweise vor der andern festzustellen.

XII.

Methode, die geradlinigen Asymptoten einer Curve aus ihrer Polargleichung zu bestimmen.

Von
Herrn M. A. Nell,
Baupraktikanten zu Mainz.

Setzt man in der Gleichung

$$r=f(\varphi)$$

Taf. VIII. Fig. 1. den Leitstrahl $r=\infty$, so wird er der Asymptote parallel. Wird dafür der Winkel $\varphi=\delta$, so haben wir

$$\infty=f(\delta).$$

Ist daraus der Winkel δ bestimmt, so erhält man den Abstand $AE=g$ der Asymptote vom Pole auf folgende Art: Für irgend eine Stellung des Leitstrahls AC ist

$$\angle DAC=\delta-\varphi,$$

daher

$$DF=AE=DC+CF=r\sin(\delta-\varphi)+u=g,$$

wenn man das Stück CF durch u bezeichnet. Da dieser Ausdruck für jeden Werth von φ gilt, so setzen wir jetzt $\varphi=\delta$, also wird $r=\infty$ und $u=0$,

$$g=\infty.0=\frac{0}{0}.$$

Um den Werth dieses unbestimmten Ausdruckes
haben wir

$$g=\frac{d.\sin(\delta-\varphi)}{d.\frac{1}{r}}=\frac{-\cos(\delta-\varphi)}{-\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{1}{r^2}}=\frac{r^2\cos(\delta}{\frac{dr}{d\varphi}}$$

Setzen wir nun $\varphi=\delta$, so wird

$$g=\frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

Wir erhalten daher die Richtung der Asyn
den Leitstrahl unendlich gross werden lassen
gen Winkel suchen.

Den kürzesten Abstand der Asy
erhalten wir, wenn wir das Quadrat des I
ersten Differentialcoefficienten dividiren, und
Trägt man diesen Abstand senkrecht auf
Richtung, so geht die Asymptote durch di

Diese Regel wollen wir auf mehrere I

1. Die Polargleichung einer Curve i

$$r=\frac{a.\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Man soll ihre Asymptote bestimmen.

$$r=\infty,\quad \varphi=$$

$$\infty=\frac{a\sin}{\cos}$$

Da der Zähler nicht unendlich gros
Nenner gleich Null werden, daher

$$\cos\delta=0,$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=a.\frac{2\sin\varphi\cos}{\cos}$$

$$g=\frac{\frac{a^2\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi}}{a\frac{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}.$$

$\delta=90^0$ gibt

Den Abstand a muss man auf der Abscissenlinie AB nehmen, weil $\delta=90^0$; macht man BF senkrecht zu AB, so erhält man die Asymptote BF.

(Diese Curve ist die Cissoide.)

Anmerkung. Die Gleichung $\cos\delta=0$ gibt ausser $\delta=90^0$ auch noch $\delta=270^0$, welchem Werthe die Richtung AD' entspricht. Für $\delta=270^0$ wird

$$g=\frac{a\sin^3 270^0}{1+\cos^2 270^0}=-a.$$

Das negative Zeichen sagt, dass man a von A nach B auftragen müsse. Denn nach Taf. VIII. Fig. 1. wird die Grösse g immer senkrecht zu AD und zwar in einer Richtung aufgetragen, welche derjenigen entgegengesetzt ist, nach der sich der veränderliche Winkel φ bewegt. Der zweite Werth von δ zeigt daher, dass BF' Asymptote für den unteren Theil der Curve ist.

2. $$r=\frac{a}{\varphi},$$

$$r=\infty,\quad \varphi=\delta,$$

$$\delta=\frac{a}{\infty}=0,$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{a}{\varphi^2},$$

$$g=\frac{\frac{a^2}{\varphi^2}}{-\frac{a}{\varphi^2}}=-a.$$

Taf. VIII. Fig. 3. Die Asymptote ist der Linie AB parallel. Das negative Zeichen im Ausdrucke für g zeigt an, dass man die Grösse a nicht von A nach F, sondern nach der entgegengesetzten Richtung AD auftragen müsse (vergleiche Taf. VIII. Fig. 1).

(Hyperbolische Spirale.)

3. $$r=a+\frac{b}{\cos\varphi},$$

$$\infty=a+\frac{b}{\cos\delta},$$

$$\cos\delta=0,\quad \delta=90^0,$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$g=\frac{\frac{(a\cos\varphi+b)^2}{\cos^2\varphi}}{\frac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}=\frac{(b+a\cos\varphi)^2}{b\sin\varphi},$$

$$g=b,\quad \varphi=\delta=90^0.$$

Taf. VIII. Fig. 4. Die Asymptote steht senkrecht auf AB; ihr Abstand vom Pole ist $=b$.

(Conchoide.)

4.
$$r=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\infty=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\delta}{\sin\delta}.$$

Der Nenner wird 0, wenn $\delta=0$; allein dann wird auch der Zähler $=0$.

Nimmt man dagegen $\delta=\pi$, so wird der Ausdruck ∞.

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$g=\frac{\frac{4a^2}{\pi^2}\cdot\frac{\varphi^2}{\sin^2\varphi}}{\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}=\frac{\frac{2a}{\pi}\cdot\varphi^2}{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi},$$

$$g=\frac{\frac{2a}{\pi}\cdot\delta^2}{\sin\delta-\delta\cos\delta}=\frac{\frac{2a\pi^2}{\pi}}{\sin\pi-\pi\cos\pi}=\frac{2a\pi}{0+\pi},$$

$$g=2a.$$

Da $\delta=\pi$, so läuft die Asymptote der Linie AD parallel. Um ihren Abstand Taf. VIII. Fig. 5. von A zu erhalten, bemerken wir, dass in der Gleichung

$$r=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

für $\varphi=90^0$ $r=a$ wird; daher ist $AF=a$. Machen wir $FE=AF$ und ziehen EG parallel AD, so ist EG die Asymptote.

Nimmt man den Winkel φ negativ,

$$r=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{-\varphi}{-\sin\varphi}=\frac{2a\varphi}{\pi\sin\varphi},$$

so folgt, dass die Curve in Bezug auf die Axe BD ganz symmetrisch ist; sie hat daher noch eine zweite Asymptote $E'G'$, wo $AE'=AE$.

(Quadratrix.)

5.
$$r=\frac{\frac{1}{2}p}{1+\sqrt{1+q}\,.\cos\varphi},$$

$$\infty=\frac{\frac{1}{2}p}{1+\sqrt{1+q}\,.\cos\delta},$$

$$\cos\delta=-\frac{1}{\sqrt{1+q}},$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{\frac{1}{2}p\sqrt{1+q}\,.\sin\varphi}{(1+\sqrt{1+q}\,.\cos\varphi)^2},$$

$$g=\frac{\frac{1}{4}p^2}{\frac{1}{2}p\sqrt{1+q}\,.\sin\varphi}=\frac{p}{2\sqrt{1+q}\,.\sin\delta}.$$

Nun ist

$$\sin\delta=\sqrt{1-\cos^2\delta}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{1+q}},$$

$$g=\frac{p}{2\sqrt{q}},\quad \cos\delta=-\frac{1}{\sqrt{1+q}}.$$

Da hier $\cos\delta$ jedenfalls negativ ist, so liegt δ im zweiten oder im dritten Quadranten; wir erhalten also zwei Asymptoten.

Ist nun q negativ, so wird sowohl g, als auch $\cos\delta$ imaginär.

Ist $q=0$, so wird $\delta=180^0$, $g=\infty$.

Nur wenn q positiv ist und einen endlichen Werth besitzt, hat die Curve Asymptoten.

Nun drückt aber obige Polargleichung alle Kegelschnittslinien aus; p und q haben dieselbe Bedeutung, wie in der Gleichung

$$y^2=px+qx^2.$$

Ist q negativ, so ist die Linie eine Ellipse.
Ist $q=0$ „ „ „ Parabel.
Ist q positiv „ „ „ Hyperbel.

Also nur die letztere Linie hat Asymptoten.

Taf. VIII. Fig. 6. Sind a, b die Halbaxen, c die Excentricität, so ist

$$p=\frac{2b^2}{a}, \quad q=\frac{b^2}{a^2};$$

daher

$$\cos\delta=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{a}{c},$$

$$g=\frac{\frac{2b^2}{a}}{2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}}=b.$$

Mittelst dieser Werthe von $\cos\delta$ und g sind die Asymptoten leicht zu construiren.

Bei der Parabel fallen die Asymptoten in's Unendliche; bei ihr wird auch der Winkel der Tangente mit der Axe immer kleiner, je weiter sich die Punkte vom Scheitel entfernen.

Anmerkung Die Methode zeigt es daher auch deutlich an, wenn die Curve keine Asymptoten besitzt.

6.
$$r=\frac{h}{1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

$$\infty=\frac{h}{1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}},$$

$$1+\cot\frac{\varepsilon}{2}.\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=-\frac{1}{\cot\frac{\varepsilon}{2}}=-\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\operatorname{tg}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\frac{\delta}{2}=-\frac{\varepsilon}{2} \text{ oder } \delta=-\varepsilon,$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{-h\cot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sec^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}}{(1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})^2},$$

$$g=\frac{\dfrac{h^2}{(1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})}}{\dfrac{-\frac{h}{2}\cot\frac{\varepsilon}{2}\sec^2\frac{\varphi}{2}}{(1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})^2}}=-2h\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$g=-2h\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}=-2h\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2},$$

$$g=-2h\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}=-h\sin\varepsilon.$$

Taf. IX. Fig. 7. Der Pol der Curve ist A; der veränderliche Winkel φ wird von AB aus gezählt.

$$AB \text{ ist } = h, \quad \angle ABG=\varepsilon.$$

Ist der Winkel φ positiv, so fällt er auf die Seite von AB nach H. Da hier Winkel $\delta=-\varepsilon$ gefunden wurde, so muss man Winkel $BAD=\varepsilon$ machen, um die Richtung der Asymptote zu erhalten. Das Zeichen — im Ausdrucke von g zeigt, dass man die Grösse $h\sin\varepsilon=AG$ von A nach G tragen muss. ($\angle GAD=90^0$).

Die Gleichung der Curve

$$r=\frac{h}{1+\cot\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

gibt für jeden Werth von φ nur einen Werth r. Den Ast EB erhält man, wenn man φ zwischen $-\varepsilon$ und 0 nimmt.

BCA von $\varphi=0$ bis $\varphi=180^0$.

ACF von $\varphi=180^0$ bis $\varphi=360^0-\varepsilon$.

Denn nehmen wir einen Winkel $BAH''=\varphi'$ grösser als 180^0, so ist $\varphi'=180^0+\varphi$,

$$r=\frac{h}{1-\cot\frac{\varepsilon}{2}\cot\frac{\varphi}{2}}=\frac{-h}{\cot\frac{\varepsilon}{2}\cot\frac{\varphi}{2}-1}.$$

Da jetzt r negativ geworden, so muss der Leitstrahl nicht na-

der Richtung AH'', sondern nach der entgegengesetzten Richtung AH' aufgetragen werden.

Diese Linie ist die Focale (Brennpunktslinie). Sie ist der geometrische Ort der Brennpunkte aller Kegelschnittslinien, welche entstehen, wenn man durch einen festen Punkt auf der Oberfläche eines senkrechten Kreiskegels alle möglichen Ebenen legt, welche senkrecht auf der durch den genannten Punkt und die Axe des Kegels gehenden Ebene stehen.

Mit dieser Linie beschäftigte sich zuerst Dr. E. Külp, Professor an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt; man sehe: Francoeur's Analytische Geometrie in der Ebene, übersetzt und mit Zusätzen versehen von Dr. E. Külp; Seite 221. u. f. Bern, Chur und Leipzig, Verlag von J. F. J. Dalp. 1839.

Die Focale lässt sich sehr einfach auf folgende Art construiren.

Taf. IX. Fig. 7. Die Linie JK, welche durch die Mitte von AB geht und zur Seite des Kegels parallel ist, enthält die Mittelpunkte aller Kegelschnittslinien. Legt man nun durch den Pol A irgend eine Gerade AH, welche die JK in L trifft, und beschreibt aus L mit dem Halbmesser LC den Halbkreis HCH', so sind H und H' Punkte der Curve.

7. $$r=\frac{2ab\sin\varphi}{(a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi}.$$

Damit $r=\infty$ werde, muss der Nenner $=0$ werden, indem der Zähler nicht ∞ werden kann.

$$(a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\delta=0,$$

$$\mathrm{tg}\delta=-\frac{a-b}{a+b}\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=2ab\frac{((a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi)\cos\varphi-(a+b)\cos\alpha\sin\varphi\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{((a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi)^2},$$

$$g=\frac{2ab\sin^2\delta\cos^2\delta}{-(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\delta\cos^3\delta-(a+b)\cos\alpha\sin^3\delta},$$

$$g=\frac{-2ab\sin^2\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha\sin\delta(\cos^2\delta+\sin^2\delta)},$$

$$g=-\frac{2ab\sin\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha}.$$

Um den Winkel δ aus diesem Ausdrucke zu entfernen, ist:

$$\sin\delta=\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}},\quad \cos\delta=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}};$$

$$g=\frac{-2ab\dfrac{\mathrm{tg}\,\delta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}}\cdot\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\delta}}{(a+b)\cos\alpha}=\frac{2ab\,\dfrac{a-b}{a+b}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(a+b)\cos\alpha(1+\mathrm{tg}^2\delta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$1+\mathrm{tg}^2\delta=1+\frac{(a-b)^2\sin^2\alpha}{(a+b)^2\cos^2\alpha}=\frac{a^2+b^2+2ab\cos2\alpha}{(a+b)^2\cos^2\alpha},$$

$$g=\frac{2ab(a-b)\sin\alpha}{(a+b)^2\cos^2\alpha.\dfrac{(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(a+b)^3\cos^3\alpha}},$$

$$g=\frac{ab(a^2-b^2)\sin2\alpha}{(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Asymptote können wir nun auch construiren.

In Taf. IX. Fig. 8. ist

$$AC=b,\quad BC=a;$$

$$\angle ACG=\angle GCB=\alpha;$$

$$\angle GCD=\varphi,\quad CD=r.$$

Halbirt man die Gerade AB in H, so ist $\angle GCH=\delta$; CH gibt daher die Richtung der Asymptote an.

Halbirt man ferner die Linien AC, BC durch die Senkrechten JK und LM, welche die Linie CH in K und M schneiden, und zieht die Geraden AK, BM, so ist der Abstand NO des Durchschnittspunktes N von der Linie CH gleich der Grösse g. Errichtet man daher auf CH die Senkrechte CS und macht sie gleich NO, so geht die Asymptote durch S.

Beweis. Das negative Zeichen von $\mathrm{tg}\,\delta$ zeigt, dass der Winkel δ von CG aus nach der Seite gegen B hin aufzutragen ist.

Sehen wir nun von diesem Zeichen ab, und berücksichtigen nur den absoluten Werth

$$\mathrm{tg}\,\delta=\frac{a-b}{a+b}\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$(a+b)\cos\alpha\sin\delta=(a-b)\sin\alpha\cos\delta,$$

$$a\cos\alpha\sin\delta+b\cos\alpha\sin\delta=a\sin\alpha\cos\delta-b\sin\alpha\cos\delta,$$

$$a\sin(\alpha-\delta)=b\sin(\alpha+\delta).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Taf. IX. Fig. 8. und denkt sich die Linie CH so gezogen, dass

$$\angle GCH = \delta,$$

so ist

$$\angle BCQ = \alpha - \delta, \quad \angle ACP = \alpha + \delta;$$

daher

$$BC.\sin BCQ = AC.\sin ACP,$$

d. i.

$$BQ = AP.$$

Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke BQH und APH identisch, folglich

$$AH = BH.$$

Der Winkel GCH ist daher $=\delta$, wenn CH durch die Mitte von AB geht.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass $NO = g$.

Aus den ähnlichen Dreiecke APK, NOK folgt:

$$NO : AP = KO : KP = CO - CK : KP,$$

$$\frac{NO}{AP} \cdot KP = CO - CK.$$

Ganz ebenso erhält man aus den ähnlichen Dreiecken NOM, MBQ:

$$\frac{NO}{BQ} \cdot MQ = CM - CO.$$

Addirt man beide Gleichungen und berücksichtigt, dass $BQ = AP$:

$$\frac{NO}{AP}(MQ + KP) = CM - CK.$$

Nun ist

$$\angle ACK = \alpha + \delta, \quad \angle BCM = \alpha - \delta;$$

$$\angle KAP = 90^0 - 2(\alpha + \delta), \quad \angle MBQ = 90^0 - 2(\alpha - \delta);$$

$$MQ = BQ.\mathrm{tg}(90^0 - 2(\alpha - \delta)) = AP.\cot 2(\alpha - \delta);$$

$$KP = AP.\mathrm{tg}(90^0 - 2(\alpha + \delta)) = AP.\cot 2(\alpha + \delta);$$

$$CM = \frac{CL}{\cos BCM} = \frac{a}{2\cos(\alpha - \delta)},$$

$$CK = \frac{CJ}{\cos ACK} = \frac{b}{2\cos(\alpha + \delta)}.$$

Führt man diese vier Werthe ein, so wird

$$\frac{NO}{AP}(AP\cot 2(\alpha-\delta)+AP\cot 2(\alpha+\delta))$$

$$=\frac{a}{2\cos(\alpha-\delta)}-\frac{b}{2\cos(\alpha+\delta)},$$

$$NO=\frac{\frac{a}{2\cos(\alpha-\delta)}-\frac{b}{2\cos(\alpha+\delta)}}{\cot 2(\alpha+\delta)+\cot 2(\alpha-\delta)}.$$

Es ist aber allgemein

$$\cot x+\cot y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y},$$

$$NO=\frac{a\cos(\alpha+\delta)-b\cos(\alpha-\delta)}{2\cos(\alpha-\delta)\cos(\alpha+\delta)\cdot\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2(\alpha-\delta).\sin 2(\alpha+\delta)}}.$$

Löst man im Zähler die Klammer auf, so erhält man

$$(a-b)\cos\alpha\cos\delta-(a+b)\sin\alpha\sin\delta=\frac{(a+b)\sin\delta\cos 2\alpha}{\sin\alpha},$$

(Siehe Seite 323. unten.)

$$NO=\frac{(a+b)\sin\delta\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos(\alpha-\delta)\cos(\alpha+\delta)\frac{2\sin 2\alpha\ .\cos 2\alpha}{2\sin(\alpha-\delta)\cos(\alpha-\delta).2\sin(\alpha+\delta)\cos(\alpha+\delta)}},$$

$$NO=\frac{(a+b)\sin\delta\sin(\alpha-\delta)\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha.2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Da aber

$$\sin(\alpha-\delta)=\sin\alpha\cos\delta-\cos\alpha\sin\delta=\sin\alpha\cos\delta\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right):$$

$$\sin(\alpha-\delta)=\frac{2b\sin\alpha\cos\delta}{a+b}.$$

Eben so

$$\sin(\alpha+\delta)=\frac{2a\sin\alpha\cos\delta}{a+b},$$

$$NO=\frac{(a+b)\sin\delta.\frac{2a\sin\alpha\cos\delta}{a+b}\cdot\frac{2b\sin\alpha\cos\delta}{a+b}}{2\sin^2\alpha\cos\alpha},$$

$$NO = \frac{2ab\sin\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha}.$$

Dieser Ausdruck stimmt, abgesehen vom Zeichen, genau mit dem zuerst erhaltenen Werthe von g überein.

Bei diesem Beispiele zeigt sich der Vortheil unserer Methode sehr auffallend. Hätte man die Asymptote nach einer der alten Methoden bestimmen wollen, so hätte man zuerst die Polargleichung auf rechtwinklige Coordinaten transformiren müssen, wodurch man eine Gleichung vom dritten Grade erhalten haben würde. Denn setzt man

$$x = r\cos\varphi, \text{ so ist } r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$y = r\sin\varphi, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Diese Werthe in die Polargleichung eingeführt und geordnet, gibt

$$y^3 + \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\alpha . xy^2 + \left(x^2 - \frac{2abx}{(a+b)\cos\alpha}\right)y + \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\alpha . x^3 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber sehr mühsam zu behandeln.

Unsere Methode bietet noch den Vortheil, dass man nur den Leitstrahl ∞ werden zu lassen braucht, während man bei der älteren Methode beide Coordinaten nach einander $= \infty$ setzen muss, um alle geraden Asymptoten zu erhalten.

Auch finden wir den kürzesten Abstand der Asymptote vom Pole, welcher daher immer einen endlichen Werth haben muss.

Ueberdiess sind die Polargleichungen der meisten krummen Linien viel einfacher, als die auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Gleichungen. Bei den sieben Beispielen kommt der Radius-vector nur auf der ersten Potenz vor, während die andern Gleichungen vom zweiten, dritten und selbst vierten Grade (Conchoide) sind.

Die in dem Vorigen entwickelte Methode fand ich, als ich mich mit der Aufgabe beschäftigte, den Glanzpunkt der Kugel zu bestimmen.

Diese Aufgabe lässt sich, da die Reflexion in der Ebene vor sich geht, die durch den Mittelpunkt C der Kugel, durch das Licht B und das Auge A gelegt werden kann, auch so ausdrücken:

Es ist (Taf. IX. Fig. 9.) ein Kreis um C und ausserhalb zwei Punkte A und B gegeben; man soll auf dem Umfange des Kreises

denjenigen Punkt D finden, so dass die Winkel ADE, BDF, welche die von A und B nach D gezogenen Linien mit der Tangente EF bilden, einander gleich sind.

Um diese Aufgabe analytisch zu lösen, nehmen wir

$$BC=a,$$

$$AC=b, \quad CD=r,$$

$$\angle ACB=2\alpha, \quad \angle GCD=\varphi,$$

$$\angle ACG=\angle BCG=\alpha.$$

In dem Δ ACD ist

$$\mathrm{tg} ADC=\frac{b\sin(\alpha-\varphi)}{r-b\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Ebenso findet man im Δ CDB

$$\mathrm{tg} BDC=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{r-a\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Da nun $\angle ADC=\angle BDC$, so ist

$$\frac{b\sin(\alpha-\varphi)}{r-b\cos(\alpha-\varphi)}=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{r-a\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Aus dieser Gleichung ist nun der Winkel φ zu bestimmen. Wir lösen deshalb die Klammern auf, und finden nach einer leichten Reduction:

$$\frac{2ab}{r\cos\alpha}\sin\varphi-(a+b)\,\mathrm{tg}\varphi=(a-b)\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Da in diesem Ausdrucke $\sin\varphi$ und $\mathrm{tg}\varphi$ getrennt vorkommen, so lässt sich der Winkel φ nicht direct berechnen; dagegen kommt die Grösse r nur auf der ersten Potenz vor; nimmt man daher für φ bestimmte Werthe an, so lassen sich die zugehörigen Werthe von r leicht berechnen. Es stellt daher obiger Ausdruck die Polargleichung einer Curve dar, worin φ der veränderliche Winkel, r der Leitstrahl

$$r=\frac{2ab\sin\varphi}{(a-b)\sin\alpha+(a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi}.$$

Taf. IX. Fig. 8. Der Durchschnitt dieser Curve mit dem Kreise vom Radius r gibt den gesuchten Glanzpunkt. Diese Linie ist also der geometrische Ort der Glanzpunkte aller aus demselben Punkte C als Mittelpunkt beschriebenen Kugeln.

Wie man bemerkt, schneidet die Linie den Kreis in vier Punkten D, D', D'', D'''. Der Punkt D' ist der Glanzpunkt für

den Hohlspiegel. D'' und D''' haben nur eine geometrische Bedeutung.

Taf. IX. Fig. 8. Die Curve lässt sich leicht auf folgende Art construiren. Man beschreibe einen Kreis um C mit dem Halbmesser $CA=b$, ziehe von A aus irgend eine Sehne AE, halbire sie durch die Senkrechte CF, so ist der Durchschnitt D der Linie BED mit CF ein Punkt der Curve; denn es ist offenbar $\angle CDA = \angle CDE$. Beschreibt man über CA als Durchmesser einen Kreis, so liegen auf ihm die Mittelpunkte aller aus A gezogenen Sehnen; man kann sich also dadurch die Arbeit erleichtern.

Man kann die Curve auch dadurch construiren, dass man um C irgend einen Kreis beschreibt, von den beiden Punkten A und B aus Tangenten an den Kreis legt, so geben die vier Durchschnittspunkte dieser vier Tangenten auch vier Curvenpunkte.

Als ich nun die Asymptote dieser Linie bestimmen wollte, fiel es mir auf, dass man noch keine Regel hatte, dieselbe aus der Polargleichung abzuleiten.

Die weitläufigen Entwickelungen, welche zur Bestimmung der Asymptote dieser Curve nach den früher bekannten Regeln erforderlich sind, veranlassten mich, darüber nachzudenken, ob es nicht möglich sei, die Asymptote direct aus der so einfachen Polargleichung herzuleiten. So kam ich auf die oben entwickelte Methode. Im siebenten Beispiele findet man sie auf die Glanzcurve angewandt.

Schliesslich wollen wir noch auf etwas aufmerksam machen. Vergleicht man nämlich die Figuren Taf. IX. Fig. 7. u. 8. mit einander, so findet man, dass sie in der Gestalt ziemlich übereinstimmen, namentlich, wenn man Taf. IX. Fig. 8. herumdreht, so dass B oben hin kommt. Beide Linien haben eine Schleife, einen Doppelpunkt, eine Asymptote, ferner eine gerade Linie, welche durch den Doppelpunkt geht und zur Asymptote parallel ist. Alles diess führt auf den Gedanken, dass beide Linien nahe verwandt, vielleicht ganz identisch sind.

Soll das Letztere stattfinden, so müssen ihre Gleichungen, auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, genau mit einander übereinstimmen. Wir wollen diess näher untersuchen. Zuerst transformiren wir die Gleichung der Focale auf rechtwinklige Coordinaten (Taf. IX. Fig. 10.), nehmen M als Anfangspunkt, MC als Abscissenaxe, MA als Ordinatenaxe; bezeichnen MA durch c, MC durch m, und $LC = LH = \varrho$, so haben wir zufolge der Construction dieser Linie (Siehe Seite 322.):

$$m-\varrho : c = x : c-y,$$

$$\varrho : y = LA : c,$$

$$\overline{LA}^2 = c^2 + (m-\varrho)^2;$$

$$c\varrho = y.LA = y\sqrt{c^2+(m-\varrho)^2};$$

$$c^2\varrho^2=y^2(c^2+(m-\varrho)^2);$$

$$m-\varrho=\frac{cx}{c-y},\quad \varrho=m-\frac{cx}{c-y};$$

$$c^2\left(m-\frac{cx}{c-y}\right)^2=y^2\left(c^2+\frac{c^2x^2}{(c-y)^2}\right);$$

$$(m(c-y)-cx)^2=y^2((c-y)^2+x^2);$$

$$m^2(c-y)^2-2cm(c-y)x+c^2x^2=y^2(c-y)^2+y^2x^2;$$

$$m^2(c-y)^2-2cmx(c-y)+x^2(c+y)(c-y)-y^2(c-y)^2=0;$$

$$m^2(c-y)-2cmx+x^2(c+y)-y^2(c-y)=0;$$

$$m^2c-m^2y-2cmx+cx^2+x^2y-cy^2+y^3=0;$$

$$y^3-cy^2+x^2y-m^2y+cx^2-2cmx+cm^2=0.$$

Wir wollen nun auch die Gleichung der Glanzcurve für das nämliche Coordinatensystem suchen.

Die Linie *CH* in Taf. IX. Fig. 8. entspricht offenbar der Linie *CJ* in Taf. IX. Fig. 7.; denn beide geben durch den Doppelpunkt *C* und sind der Asymptote parallel. Die Linie *CH* dient uns daher als Abscissenaxe. In Taf. IX. Fig. 7. haben wir *AM* zur Ordinatenaxe angenommen; da wir aber in Taf. IX. Fig. 8. den dem Punkte *A* in Fig. 7. entsprechenden Punkt noch nicht kennen, so nehmen wir ihn zuerst willkührlich in A' an, bezeichnen den Abstand CM' von der Linie $A'M'$ durch l, und wollen dieses l so bestimmen, dass beide Gleichungen möglichst nahe übereinstimmen.

Aus Taf. IX. Fig. 11. finden wir nun leicht

$$r\cos(\varphi+\delta)=l-x,$$

$$r\sin(\varphi+\delta)=y.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind r und φ zu bestimmen und in die Polargleichung der Glanzcurve einzuführen. Man findet

$$r^2=y^2+(l-x)^2,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi+\delta)=\frac{y}{l-x}=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\delta}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta},$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y-(l-x)\operatorname{tg}\delta}{l-x+y\operatorname{tg}\delta},$$

$$\sin\varphi = \frac{y-(l-x)\mathrm{tg}\delta}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\cos\delta = \frac{y-(l-x)\mathrm{tg}\delta}{r}.\cos\delta.$$

Setzt man nun zuerst diese Werthe von $\mathrm{tg}\varphi$ und $\sin\varphi$ in die Gleichung

$$r = \frac{2ab\sin\varphi}{(a-b)\sin\alpha + (a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi};$$

so erhält man

$$r = \frac{\dfrac{2ab\cos\delta(y-(l-x)\mathrm{tg}\delta)}{r}}{(a-b)\sin\alpha + (a+b)\cos\alpha\dfrac{y-(l-x)\mathrm{tg}\delta}{l-x+y\mathrm{tg}\delta}},$$

$$r^2 = \frac{2ab\cos\delta(y-(l-x)\mathrm{tg}\delta)(l-x+y\mathrm{tg}\delta)}{(a-b)\sin\alpha(l-x+y\mathrm{tg}\delta)+(a+b)\cos\alpha(y-(l-x)\mathrm{tg}\delta)},$$

$$(y^2+(l-x)^2)\{(a-b)\sin\alpha(l-x+y\mathrm{tg}\delta)+(a+b)\cos\alpha(y-(l-x)\mathrm{tg}\delta\}$$
$$=2ab\cos\delta(y-(l-x)\mathrm{tg}\delta)(l-x+y\mathrm{tg}\delta).$$

Betrachten wir zuerst den Ausdruck in der grossen Klammer $\{....\}$ und bemerken, dass

$$(a-b)\sin\alpha = (a+b)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\delta,$$

so haben wir

$$(a+b)\cos\alpha\{(l-x)\mathrm{tg}\delta + y\mathrm{tg}^2\delta + y - (l-x)\mathrm{tg}\delta\} = (a+b)\cos\alpha.y(1+\mathrm{tg}^2\delta),$$

und weil

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}},$$

so ist

$$1+\mathrm{tg}^2\delta = \frac{1}{\cos^2\delta},$$

$$\frac{(a+b)\cos\alpha}{\cos^2\delta}y(y^2+(l-x)^2)$$
$$=2ab\cos\delta(y(l-x)-(l-x)^2\mathrm{tg}\delta + y^2\mathrm{tg}\delta - y(l-x)\mathrm{tg}^2\delta),$$

$$\frac{(a+b)\cos\alpha}{2ab\cos^3\delta}(y^3+y(l-x)^2) = y(l-x)(1-\mathrm{tg}^2\delta)+(y^2-(l-x)^2)\mathrm{tg}\delta.$$

Bezeichnen wir der Kürze halber den ersten Coefficienten

$$\frac{(a+b)\cos\alpha}{2ab\cos^3\delta}$$

durch f, so ist

$$fy^3+fy(l-x)^2=y(l-x)(1-\operatorname{tg}^2\delta)+y^2\operatorname{tg}\delta-(l-x)^2\operatorname{tg}\delta,$$

$$fy^3+fyl^2-2flyx+fyx^2$$
$$=ly(1-\operatorname{tg}^2\delta)-xy(1-\operatorname{tg}^2\delta)+y^2\operatorname{tg}\delta-l^2\operatorname{tg}\delta+2lx\operatorname{tg}\delta-x^2\operatorname{tg}\delta,$$

$$y^3-\frac{\operatorname{tg}\delta}{f}y^2+x^2y+\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\delta}{f}-2l\right)xy+\left(l^2-\frac{l(1-\operatorname{tg}^2\delta)}{f}\right)y$$
$$+\frac{\operatorname{tg}\delta}{f}x^2-\frac{2l\operatorname{tg}\delta}{f}x+\frac{l^2\operatorname{tg}\delta}{f}=0.$$

Vergleichen wir nun diese Gleichung Glied für Glied mit der Gleichung der Focale (Seite 329.), so findet sich:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{f}=c,\quad \frac{1-\operatorname{tg}^2\delta}{f}-2l=0;$$

$$\frac{l(1-\operatorname{tg}^2\delta)}{f}-l^2=m^2;\quad \frac{2l\operatorname{tg}\delta}{f}=2cm;$$

$$\frac{l^2\operatorname{tg}\delta}{f}=cm^2.$$

Aus

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\delta}{f}-2l=0$$

finden wir

$$l=\frac{1-\operatorname{tg}^2\delta}{2f}.$$

Diesen Werth von l in die folgende Gleichung gesetzt, gibt

$$m^2=\frac{(1-\operatorname{tg}^2\delta)^2}{2f^2}-\frac{(1-\operatorname{tg}^2\delta)^2}{4f^2}=\frac{(1-\operatorname{tg}^2\delta)^2}{4f^2},$$

$$m=\frac{1-\operatorname{tg}^2\delta}{2f},$$

also $m=l$.

Setzt man in den beiden letzten Ausdrücken

$$m=l \text{ und } \frac{\operatorname{tg}\delta}{f}=c,$$

so werden sie identisch.

Da also beide Gleichungen auf's Genaueste übereinstimmen, so geht daraus hervor, dass die Focale und die Glanzcurve eine und die nämliche Linie sind.

Es ist nun

$$f=\frac{(a+b)\cos\alpha}{2ab\cos^3\delta},$$

also

$$c=\frac{\mathrm{tg}\delta}{f}=\frac{2ab\sin\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha},$$

$$m=l=\frac{ab\cos^3\delta(1-\mathrm{tg}^2\delta)}{(a+b)\cos\alpha}.$$

Aus diesen Werthen von c und m können wir auch den Winkel δ wegbringen:

$$\mathrm{tg}\delta=\frac{a-b}{a+b}\mathrm{tg}\alpha,\quad \cos\delta=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}},\quad \sin\delta=\frac{\mathrm{tg}\delta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta}},$$

$$c=\frac{ab(a^2-b^2)\sin2\alpha}{(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

$$m=\frac{ab\,(2ab+(a^2+b^2)\cos2\alpha)}{(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vergleicht man den Werth von c mit dem früher gefundenen Werthe von NO in Taf. IX. Fig. 8. (Siehe Seite 326.), so findet man, dass sie einander gleich sind, dass also N der Punkt ist, der dem Punkte A in Taf. IX. Fig. 7. entspricht. Auch folgt nun $CO=m$.

Seite 322. haben wir eine Construction der Focale angegeben; diese können wir jetzt auch auf die Glanzcurve anwenden. Zieht man nämlich Taf. IX. Fig. 8. durch den Punkt N irgend eine Gerade BNB', welche die Linie CH in M schneidet und macht man

$$MB=MB'=MC,$$

so sind B und B' Curvenpunkte. Hieraus lässt sich aber leicht umgekehrt vermittelst zweier gegebener Punkte A und B der Punkt N finden. Denn halbirt man die Linien AC, BC durch die Senkrechten JK, LM, welche CH in K und M schneiden, so gibt jetzt der Durchschnitt der Linien AK und BM den gesuchten Punkt N, weil offenbar

$$AK=KC \text{ und } MB=MC.$$

Es folgt daraus $NO=c=g=$ dem Abstand der Asymptote vom Pole.

Dieser Beweis ist viel anschaulicher als der oben gegebene.

Für c und m erhalten wir die Ausdrücke:

$$c = \frac{2ab\sin\delta\cos^2\delta}{(a+b)\cos\alpha},$$

$$m = \frac{ab\cos^2\delta(1-\mathrm{tg}^2\delta)}{(a+b)\cos\alpha};$$

wo

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{a-b}{a+b}\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Die beiden Grössen c und m charakterisiren die Focale vollständig; man kann sie leicht aus den gegebenen Grössen a, b und α der Glanzcurve berechnen. Wollte man aber umgekehrt aus den gegebenen Grössen c, m der Focale die entsprechenden a, b und α der Glanzcurve berechnen, so hat man dafür nur zwei Gleichungen; man kann daher eine der drei Grössen a, b, α willkührlich annehmen und dann die zwei andern berechnen.

Dividiren wir den Ausdruck von c durch den von m, so wird Taf. IX. Fig. 8.

$$\frac{c}{m} = \frac{2\sin\delta}{(1-\mathrm{tg}^2\delta)\cos\delta} = \frac{2\mathrm{tg}\delta}{1-\mathrm{tg}^2\delta},$$

daher

$$\mathrm{tg}.2\delta = \frac{c}{m} = \frac{NO}{CO}.$$

Also ist

$$\angle NCO = 2\delta, \quad \angle NCG = \angle GCH.$$

Ist daher c und m gegeben, so ist Winkel δ nicht mehr willkührlich.

Setzen wir $\frac{b}{a} = n$, so wird

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1-n}{1+n}\,\mathrm{tg}\delta.$$

Nehmen wir für n irgend einen Werth an, so lässt sich Winkel α berechnen. Man hätte aber auch Winkel α willkührlich annehmen und das zugehörige n berechnen können:

$$n = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\delta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\delta} \quad \text{oder} \quad n = \frac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

Hat man nun n und Winkel α bestimmt, so kann man jetzt a und b berechnen:

$$b = \frac{c(1+n)\cos\alpha}{\cos\delta.\sin2\delta},$$

oder auch

$$b = \frac{c\sin2\alpha}{\sin(\alpha+\delta)\sin2\delta},$$

und endlich $a = \frac{b}{n}$.

Wir können aber auch Alles durch eine einfache Construction erhalten. Tragen wir nämlich Taf. IX. Fig. 8. nur den willkührlich angenommenen Werth von α zu beiden Seiten der Linie CG, also

$$\angle \mathfrak{A}CG = \angle \mathfrak{B}CG,$$

so ist $C\mathfrak{A}$ das neue b und $C\mathfrak{B}$ das neue a. Ziehen wir die Linien $\mathfrak{A}D$ und $\mathfrak{B}D$, so ist auch

$$\angle \mathfrak{A}DC = \angle \mathfrak{B}DC.$$

Wir könnten daher auch in $\mathfrak{B}$ das Licht anbringen, so ist wiederum D der Glanzpunkt für das in $\mathfrak{A}$ befindliche Auge.

Die Glanzcurve enthält daher nicht nur die Glanzpunkte für alle concentrischen Kugeln, sondern sie erlaubt auch, dass, wenn sie für eine bestimmte Stellung des Lichtes und Auges gegen den Mittelpunkt der Kugel construirt ist, einen jener Punkte willkührlich auf ihr anzunehmen; dann ist aber die Lage des andern bestimmt.

XIII.

Fragen aus der Mechanik.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim.

I. Ueber die Kurve, die ein Hund beschreibt, der seinem Herrn folgt.

Es sei der Weg, überhaupt die Bewegung des Herrn völlig bekannt; zugleich möge vorausgesetzt werden, dass beide Bewegungen in derselben Ebene vor sich gehen. Es seien am Ende der Zeit t: x, y die Koordinaten des Ortes des Herrn, u, v des Hundes, so ist y als Funktion von x bekannt, während beide bekannte Funktionen von t sind. v ist eine Funktion von u und diess letztere wieder von x, also auch von t. Sei nun

$$y=\varphi(x), \qquad (1)$$

worin $\varphi(x)$ bekannt ist. Sei ferner die Geschwindigkeit $\frac{\partial s}{\partial t}$ des Herrn in jedem Augenblicke m mal so gross als die Geschwindigkeit $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ des Hundes, so ist

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial x}{\partial t} = m\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (2)$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial x}{\partial u} = m\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}. \qquad (3)$$

Die Geschwindigkeit des Hundes am Ende der Zeit t ist nach der Linie gerichtet, die von (x,y) nach (u,v) geht. Diese Linie macht mit der Axe der x einen Winkel, dessen Cosinus gleich

$$\frac{x-u}{\sqrt{(y-v)^2+(x-u)^2}},$$

dessen Sinus

$$\frac{y-v}{\sqrt{(y-v)^2+(x-u)^2}},$$

so dass

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial t}\cdot\frac{y-v}{\sqrt{(y-v)^2+(x-u)^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial t}\cdot\frac{x-u}{\sqrt{(y-v)^2+(x-u)^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial u}=\frac{y-v}{x-u},$$

oder

$$(x-u)\frac{\partial v}{\partial u}=y-v. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass die Linie von (x,y) nach (u,v) Tangente ist im Punkte (u,v) an die Kurve des Hundes.

Man zieht aus (4):

$$(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}+\frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}-1\right)=\varphi'(x)\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial v}{\partial u},$$

d. h.

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{(x-u)\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2}}{\varphi'(x)-\dfrac{\partial v}{\partial u}} \tag{5}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (3) und (5) erhält man:

$$(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=m\left[\varphi'(x)-\frac{\partial v}{\partial u}\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2},$$

oder

$$(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}=m\left[\varphi'(x)-\frac{\partial v}{\partial u}\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}. \tag{6}$$

Die Gleichung (4) ist auch

$$\varphi(x)-v=(x-u)\frac{\partial v}{\partial u}. \qquad (7)$$

Man eliminire nun zwischen (6) und (7) die Grösse x, so erhält man eine Differenzialgleichung in v und u, aus der die eine dieser Grössen durch die andere ausgedrückt werden kann. Diese Gleichung ist die Differenzialgleichung der Kurve des Hundes. Vermittelst (2) kann man sodann u, v als Funktionen von t bestimmen und vermittelst (7) die zu einander gehörigen x und u erkennen.

Wir wollen den besonderen Fall betrachten, in dem der Herr eine gerade Linie beschreibt. Nehmen wir sie als Axe der x an, so ist in (1) $\varphi(x)=0$, also sind die Gleichungen (6) und (7):

$$-v=(x-u)\frac{\partial v}{\partial u}, \qquad (7')$$

$$(x-u)\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}=-m\frac{\partial v}{\partial u}\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}. \qquad (6')$$

Hieraus folgt:

$$v\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}=m\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}. \qquad (8)$$

Um (8) zu integriren setze ich

$$\frac{\partial v}{\partial u}=p,$$

also

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}=\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}=p\frac{\partial p}{\partial v},$$

so ist aus (8):

$$vp\frac{\partial p}{\partial v}=mp^2\sqrt{1+p^2},$$

$$v\frac{\partial p}{\partial v}=mp\sqrt{1+p^2};$$

woraus

$$\int\frac{\partial p}{p\sqrt{1+p^2}}=m\int\frac{\partial v}{v},$$

$$l\left(\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}\right)=l.(Cv^m),$$

worin C eine willkührliche Konstante. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}=Cv^m,$$

$$p=\frac{2Cv^m}{1-C^2v^{2m}};$$

ferner

$$u=\int\frac{\partial v}{p}=\int\frac{1-C^2v^{2m}}{2Cv^m}\partial v=\frac{v^{1-m}}{2(1-m)C}-\frac{Cv^{m+1}}{2(m+1)}+C',$$

wo C' eine neue willkührliche Konstante.

Die Gleichung der Kurve des Hundes ist also

$$u=C'+\frac{v^{1-m}}{2C(1-m)}-\frac{Cv^{m+1}}{2(m+1)}, \tag{9}$$

vorausgesetzt, dass nicht $m=1$. In diesem letztern Falle fände man:

$$u=C'+\frac{l(v)}{2C}-\frac{Cv^2}{4}. \tag{10}$$

In diesem letztern Falle würde die Kurve des Hundes der Axe der x (oder u) sich nähern, ohne sie zu erreichen. Im Allgemeinen ist also nothwendig $m<1$.

Um einen besondern Fall festzustellen, wollen wir annehmen, dass im Anfange der Zeit t:

$$x=0,\ u=0,\ v=a$$

sei, so folgt aus (7) im Anfang $\frac{\partial u}{\partial v}=0$, d. h.

$$0=1-C^2a^{2m},$$

und aus (9):

$$0=C'+\frac{a^{1-m}}{2C(1-m)}-\frac{Ca^{m+1}}{2(m+1)}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$C=\pm\frac{1}{a^m},$$

und aus der zweiten:

$$0 = C \mp \frac{a}{2(1-m)} \pm \frac{a}{2(1+m)} = C' \mp \frac{m}{m^2-1},$$

$$C' = \mp \frac{am}{1-m^2}.$$

Demnach ist in diesem Falle die Gleichung der Kurve des Hundes:

$$u = \mp \frac{am}{1-m^2} \mp \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)} \mp \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)}, \qquad (9')$$

worin die obern und untern Zeichen zusammen gehören.

Nimmt man an, dass die Bewegung nach der Richtung der positiven x geschah, so müssen die untern Zeichen gewählt werden, und man hat:

$$u = \frac{am}{1-m^2} + \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)} - \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)}. \qquad (9'')$$

Die Zusammenkunft geschieht in dem Punkte, dessen Abscisse $\frac{am}{1-m^2}$ ist, auf der Axe der x. Gesetzt die Bewegung des Herrn sei gleichförmig gewesen, dessen Geschwindigkeit $=\alpha$, so ist

$$x = \alpha t.$$

Die Bewegung des Hundes ist ebenfalls gleichförmig; seine Geschwindigkeit $\frac{\alpha}{m}$. Um u, v als Funktionen von t zu erhalten, hat man

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1 - C^2 v^{2m}}{2Cv^m} = \frac{1 - \frac{v^{2m}}{a^{2m}}}{-2\frac{v^m}{a^m}} = \frac{a^{2m} - v^{2m}}{-2a^m v^m},$$

also aus (7'):

$$\frac{v(a^{2m} - v^{2m})}{2a^m v^m} = \left(\alpha t - \frac{am}{1-m^2} - \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)} + \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)}\right),$$

woraus v als Funktion von t zu bestimmen ist. Aus (9'') ergiebt sich sodann auch u als Funktion von t.

Für $x = \frac{am}{1-m^2} = \alpha t$ ist $t = \frac{am}{\alpha(1-m^2)}$, also

$$\frac{v(a^{2m} - v^{2m})}{2a^m v^m} = \left[\frac{am}{1-m^2} - \frac{am}{1-m^2} - \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)} + \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)}\right]$$
$$= \frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)} - \frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)},$$

woraus $v=0$, so dass also wirklich das Zusammentreffen Statt hat und zwar am Ende der Zeit $\frac{am}{\alpha(1-m^2)}$. Der Weg des Hundes ist

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2}\partial v=\int\sqrt{1+\left(\frac{1-C^2v^{2m}}{2Cv^m}\right)^2}\partial v=\int\frac{1+C^2v^{2m}}{2Cv^m}\partial v$$

$$=\frac{v^{1-m}}{2C(1-m)}+\frac{Cv^{m+1}}{2(m+1)}+C_1=-\frac{a^m v^{1-m}}{2(1-m)}-\frac{v^{m+1}}{2(m+1)a^m}+C_1,$$

und folglich von $v=a$ bis $v=0$:

$$\frac{a}{2(1-m)}+\frac{a}{2(1+m)}=\frac{a}{1-m^2},$$

wie natürlich, da seine Geschwindigkeit $\frac{\alpha}{m}$. Uebrigens ist das Letztere richtig, welches auch die Art der Bewegung des Herrn gewesen.

Da im Anfange der Bewegung (die Gleichung (9″) vorausgesetzt) $\frac{\partial v}{\partial u}=\frac{1}{0}$, so ist die Axe der y Tangente der Kurve. Im Punkte $u=\frac{am}{1-m^2}$ ist $\frac{\partial v}{\partial u}=0$, also dort die Axe der x Tangente an die Kurve.

Die allgemeine Form der Gleichung der Kurve ist eigentlich

$$u^2=\left(\frac{am}{1-m^2}+\frac{v^{m+1}}{2a^m(m+1)}-\frac{v^{1-m}a^m}{2(1-m)}\right)^2,$$

und es sind also zwei Zweige, die beiderseitig mit

$$u=\frac{am}{1-m^2} \text{ oder } -\frac{am}{1-m^2}$$

enden. Die Kurve (9″) geht nur von $v=a$ bis $v=0$.

II. Ueber den vortheilhaftesten Abhang eines Kanals, an dessen Ende das Wasser einen industriell zu benutzenden Fall bilden soll.

Wenn Wasser in einem offenen Kanale fliesst, der einen gleichförmigen Fall hat und dessen Durchschnitt überall derselbe

ist, so findet man die gleichförmige Geschwindigkeit v, die es annimmt, durch die Gleichung:

$$\frac{Ai}{C} = \alpha v + \beta v^2$$

worin A die Fläche des Schnitts, C sein benetzter Umfang, i der Fall auf jeden Meter, α, β zwei Konstanten, die bestimmt wurden zu

$$\alpha = 0{,}00004445, \quad \beta = 0{,}0003093.$$

(Man sehe: Navier, Resumé des leçons sur l'application de la Mécanique. 2me Partie. § 122.)

Gesetzt nun, es befinde sich in einem Flusse eine Insel und der Fluss habe Wasser genug, dass man die Kraft desselben industriell anwenden könne. Man wolle zu diesem Ende durch die ganze Länge der Insel einen Kanal graben, an dessen Ende das Wasser einen kleinen Fall bilden soll, dessen Kraft nun angewendet werde. Es ist nun ganz klar, dass man den grössten Fall erhalten würde, wenn man den Kanal horizontal anlegte, allein in diesem Falle würde kein Wasser durch denselben fliessen. Dagegen würde die grösste Masse Wassers durch denselben fliessen, wenn man ihm dieselbe Neigung gäbe, die der Fluss hat; in diesem Falle hätte man aber keinen Fall. Zwischen diesen beiden Aeussersten nun liegt der Fall, da man bei grösstmöglichem Falle die grösstmögliche Masse Wassers erhält.

Stelle Taf. X. Fig. 3. $AB = CD$ die (horizontal gemessene) Länge L der Insel (des Kanals) CE dar; sei i dessen Fall auf den Meter, so ist $DE = Li$; endlich sei $AC = H$ der Unterschied der Niveaux des Wassers an den Enden der Insel, so ist $BE = H - Li$. Bedeuten A und C was oben, so ist die Geschwindigkeit des Wassers im Kanal gegeben durch

$$\frac{Ai}{C} = \alpha v + \beta v^2, \quad i = \frac{C(\alpha v + \beta v^2)}{A}.$$

Die Menge Wassers, die in einer Sekunde durch den Schnitt des Kanals fliesst, ist Av; also, wenn ϱ das Gewicht der Kubikeinheit des Wassers ist, deren Gewicht $A\varrho v$. Diese Masse fällt durch die Höhe $H - Li$, kann also, unten angekommen, die Arbeit

$$A\varrho v(H - Li)$$

verrichten, wenn man darauf nicht achtet, dass sie schon eine anfängliche Geschwindigkeit besitzt. Achtet man darauf, so muss man obiger Grösse noch

$$A\varrho v \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{A\varrho v^3}{2g}$$

zufügen. Alsdann ist die Arbeit, die in der Sekunde durch das fallende Wasser verrichtet werden kann:

$$A\varrho r(H-Li)+\frac{A\varrho v^3}{2g}=AH\varrho v-\frac{AL\varrho C(\alpha v+\beta v^2)v}{A}+\frac{A\varrho v^3}{2g}$$

$$=AH\varrho v-L\varrho C\alpha v^2-L\varrho C\beta v^3+\frac{A\varrho v^3}{2g},$$

welche Grösse nun ein Maximum sein soll. Man findet:

$$AH-2LC\alpha v-3LC\beta v^2+\frac{3Av^2}{2g}=0,$$

$$v=\frac{2LCg\alpha+\sqrt{4L^2C^2g^2\alpha^2-2AHg(3A-6LC\beta g)}}{3A-6LC\beta g}.$$

Hätte man $\frac{Av^3\varrho}{2g}$ vernachlässigt, so hätte sich ergeben:

$$v=-\frac{\alpha}{3\beta}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{9\beta^2}+\frac{AH}{3LC\beta}}.$$

Kennt man v, so findet sich:

$$i=\frac{C}{A}(\alpha v+\beta v^2),$$

wodurch nun der vorteilhafteste Abfall gefunden ist.

III. Ueber das Princip des Telluriums.

Eine Kugel drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine, ausser ihr liegende Axe AB (Taf. X. Fig. 4.), und mit der Winkelgeschwindigkeit ε zugleich um eine durch ihren Mittelpunkt gehende, mit AB parallele Axe CD, und es sei die Richtung von ε der von ω entgegengesetzt; man verlangt die Lage einer beliebigen (festen) durch den Mittelpunkt gehenden Linie EF am Ende der Zeit t.

Man nehme AB als feste Axe der z an und lege durch A zwei Axen der x und y, die anfängliche Richtung von AC gebe die Richtung der positiven Axe der x an, und die positive Axe der y sei so gewählt, dass die Richtung der Geschwindigkeit ω von der positiven Axe der x unmittelbar zur positiven Axe der y gehe. Durch den Mittelpunkt der Kugel lege man eben so ein in ihr festes Koordinatensystem, von dem OD die positive Axe der z_1 und, in der anfänglichen Lage, die Axen der x_1 und y_1 den vorigen (der x und y) parallel seien. EF sei so, dass sie

im Anfange mit den festen Axen in A die Winkel α, β, γ mache, welche Winkel sie also in diesem Augenblick auch mit den durch O gehenden Axen macht.

Offenbar werden wir unsere Aufgabe auch dadurch lösen können, dass wir zuerst, während einer Zeit t, der Kugel bloss die Bewegung um AB, und dann während einer eben solchen Zeit bloss die um CD ertheilen. Lassen wir also zuerst die Kugel sich bloss um AB drehen und suchen wir am Ende der Zeit t die Lage der Axen in O in Bezug auf die in A. Die beiden Axen der z sind noch immer parallel. Die Axe der x_1 (durch O) macht mit der Axe der x (durch A) den Winkel ωt, mit der der y den Winkel $\frac{\pi}{2}-\omega t$, mit der der z den Winkel $\frac{\pi}{2}$; die Axe der y_1 macht mit der der x den Winkel $\frac{\pi}{2}+\omega t$, mit der der y den Winkel ωt und mit der der z den Winkel $\frac{\pi}{2}$. Bei dieser Drehung sind also die durch O gehenden Axen beweglich gewesen, als feste Linien in der Kugel.

Lassen wir nun die Kugel sich um CD während einer Zeit t drehen und während dieser Zeit die Axen der x_1, y_1, z_1 fest (als feste Linien im Raume, unbeirrt durch die Bewegung der Kugel), so wollen wir die Lage von EF in Bezug auf die durch O gehenden Axen am Ende der neuen Zeit t suchen, an deren Anfang natürlich EF mit diesen Axen die Winkel α, β, γ machte. EF macht mit CD ständig den Winkel γ; legt man also durch EF und CD (die Axe der z_1) eine Ebene und achtet auf die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ebene der $x_1 y_1$, so macht diese Durchschnittslinie am Ende der Zeit t mit der Axe der x_1 den Winkel $\alpha_1-\varepsilon t$, mit der Axe der y_1 den Winkel $\frac{\pi}{2}-\alpha_1+\varepsilon t$, mit der der z_1 den Winkel $\frac{\pi}{2}$, wenn α_1 der anfängliche Winkel mit der Axe der x_1 ist. α_1 ist zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$\cos\alpha=\cos\alpha_1\sin\gamma, \quad \cos\beta=\sin\alpha_1\sin\gamma;$$

d. h.

$$\operatorname{cotg}\alpha_1=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}. \qquad (1)$$

Für unsern Zweck wäre es vollkommen genug, $\alpha_1=0$ zu setzen, in welchem Falle $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{2}-\gamma$ wäre. Doch wollen wir die Allgemeinheit beibehalten.

Sind nun α', β', γ' die Winkel, welche die EF mit den durch O gehenden Axen am Ende der Zeit t macht, so hat man

$$\cos\alpha' = \cos(\alpha_1 - \varepsilon t).\sin\gamma,\quad \cos\beta' = \sin(\alpha_1 - \varepsilon t).\sin\gamma,\quad \gamma' = \gamma. \qquad (2)$$

Man wird nun, wenn man beide erhaltenen Resultate zusammen nimmt, leicht einsehen, dass die mehr genannte Durchschnittslinie mit den Axen der x, y, z folgende Winkel macht am Ende der Zeit t (während welcher beide Bewegungen zugleich geschahen):

mit der Axe der x den Winkel: $\omega t + \alpha_1 - \varepsilon t = \alpha_1 + (\omega - \varepsilon)t$,

mit der Axe der y den Winkel: $\frac{\pi}{2} - \omega t - (\alpha_1 - \varepsilon t) = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - (\omega - \varepsilon)t$,

mit der Axe der z den Winkel: $\frac{\pi}{2}$.

Sind also jetzt α'', β'', γ'' die Winkel der Linie EF mit den drei Axen durch A, so ist:

$$\cos\alpha'' = \cos(\alpha_1 + (\omega - \varepsilon)t).\sin\gamma,\ \cos\beta'' = \sin((\omega - \varepsilon)t + \alpha_1).\sin\gamma,\ \gamma'' = \gamma. \ (3)$$

Für den besondern Fall, dass $\omega = \varepsilon$, wie diess beim Tellurium der Fall ist, folgt aus (3):

$$\cos\alpha'' = \cos\alpha_1 \sin\gamma,\quad \cos\beta'' = \sin\alpha_1 \sin\gamma,\quad \gamma'' = \gamma; \qquad (4)$$

d. h. wenn man (4) mit (1) vergleicht:

$$\alpha'' = \alpha,\quad \beta'' = \beta,\quad \gamma'' = \gamma; \qquad (5)$$

oder die Linie EF bleibt beständig mit sich selbst parallel.

Dreht also eine Kugel sich um die Axe AB und zugleich um die mit ihr parallele CD, sind die beiderseitigen Winkelgeschwindigkeiten gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, so bleibt jeder durch O gehende Durchmesser der Kugel beständig mit sich parallel. Diess ist nun das Princip des Telluriums. Die Einrichtung desselben ist übersichtlich folgende:

Eine Stange AB (Taf. X. Fig. 5.) ist um MN drehbar. An MN ist ein horizontales, nach unten gezähntes Rädchen G fest. In dieses greift ein vertikales Rädchen C ein, das an der Stange CD ist, welche letztere in E und F an AB befestigt, sonst aber ganz frei ist. In D ist ein vertikales Rädchen, ebenfalls fest an CD und ganz gleich dem in C, welches dann in das horizontale H eingreift, das gleich G, aber innerhalb der Rädchen C und D ist.

Die Axe dieses Rädchens, die an demselben fest ist, trägt den (Halb-) Ring KL, an dem, an der (schiefen) Axe KL eine Kugel ist. Man sieht leicht ein, dass diese Vorrichtung die obigen Voraussetzungen verwirklicht, so dass KL bei der Bewegung von AB um MN, wobei also die Kugel sich um MN und HJ dreht, die Linie KL z. B. (die Erdaxe, wenn die Kugel die Erde in ihrer Bewegung um die Sonne vorstellt und KL um $23\frac{1}{2}°$ gegen MN geneigt ist) immer mit sich parallel bleibt, was bekanntlich mit der Erdaxe der Falle ist.

XIV.

Ueber Curven zweiter und dritter Ordnung.

Von dem
Herrn Doctor T. Clausen,
Observator an der Sternwarte zu Dorpat.

Der elegante Pascal'sche Satz in Beziehung auf Curven zweiter Ordnung veranlasste mich einen ähnlichen in Beziehung auf Curven dritter Ordnung aufzusuchen. Bei diesen letztern gestalten sich aber die Gleichungen viel verwickelter; so dass vermuthlich mehrere solche Sätze existiren, die man erlangt, wenn man die Gleichung der Curve auf verschiedene Weise behandelt; wobei man bei Curven zweiter Ordnung auf einerlei Resultat kömmt, bei denen dritter Ordnung aber verschiedene Resultate findet. Ich gelangte durch eine völlig gleiche Behandlungsweise zu dem Pascal'schen Satze und zu einem, wie ich glaube, neuen einfachen Satze in Beziehung auf Curven dritter Ordnung, der mir der Veröffentlichung nicht unwerth schien, weshalb ich ihn mittheile.

1. Zuerst suche ich die allgemeine Gleichung einer Curve, die durch vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 geht. Zieht man durch zwei dieser Punkte P_1 und P_2 eine Gerade und betrachtet diese als Axe der x; und setzt man den Anfangspunkt der Coordinaten im Punkte A: so hat man für die beiden Punkte

$$x = AP_1 = a,\ y = 0;$$

und

$$x = AP_2 = a',\ y = 0.$$

Es sei $K = 0$ die Gleichung für die Curve. Man sieht leicht, dass K, um den beiden Werthen zu genügen, von der Form sein müsse:

$$K=(x-a)(x-a')K_1+yK_2;$$

in welcher Formel K_1 und K_2 andere Polynome von x und y oder Constanten bezeichnen. Es seien nun ferner die Gleichungen für die Geraden, die durch P_1 und P_3, P_2 und P_4 gehen:

$$l_1=x-a+\lambda y=0;\quad l_2=x-a'+\lambda' y=0;$$

sei ferner $l=y$, so hat man:

$$x-a=l_1-\lambda y,\quad x-a'=l_2-\lambda' y;$$

(λ und λ' bedeuten Constanten) also:

$$K=l_1 . l_2 . K_1+l . K_3 \dots \qquad (1)$$

worin K_3 ein ähnliches Polynom als K_2 bezeichnet. Auf ganz ähnliche Weise findet man, wenn man die Gleichung für die Gerade, die durch P_3 und P_4 gezogen ist, $l_3=0$ setzt:

$$K=l_1 . l_2 . K_4+l_3 . K_5 \dots\dots (2)$$

Subtrahirt man nun die Gleichungen (1) und (2) von einander, so findet sich:

$$l_1 . l_2 . (K_1-K_4)=l_3 . K_5-l . K_3 .$$

Da in dem Durchschnitte der Geraden l und l_3*) weder l, noch l_3 verschwinden, so muss K_1-K_4 in diesem Punkte $=0$ sein. Es muss daher

$$K_1-K_4=l . K_6-l_3 . K_7$$

sein, wo wiederum K_6 und K_7 Polynome von x und y bezeichnen. Demnach ist:

$$K_1-l . K_6=K_4-l_3 . K_7=K_8,$$

wodurch die Gleichungen (1) und (2) sich verwandeln in:

$$K=l_1 . l_2 . K_8+l . l_1 . l_2 . K_6+l . K_3=l_1 . l_2 . K_8+l(K_3+l_1 . l_2 . K_6),$$

$$K=l_1 . l_2 . K_8+l_1 . l_2 . l_3 . K_7+l_3 . K_5=l_1 . l_2 . K_8+l_3(K_5+l_1 . l_2 . K_7).$$

Demnach ist:

$$l(K_3+l_1 . l_2 . K_6)=l_3 . (K_5+l_1 . l_2 . K_7).$$

Es muss also sein:

---

*) Kürze halber werde ich im Folgenden, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, statt: die Gerade deren Gleichung $L=0$, schiechtweg die Gerade L schreiben.

$$K_3 + l_1 . l \; . K_6 = l_3 . K_9,$$

$$K_5 + l_1 . l_2 . K_7 = l . K_9;$$

oder endlich:

$$K = l_1 . l_2 . K_8 + l . l_3 . K_9 \; \ldots\ldots (3)$$

2. Bei Curven zweiter Ordnung werden die Grössen K_8 und K_9 Constanten. Nimmt man nun zwei andere Punkte P_5, P_6 auf der Curve an, und setzt die Gleichung der Geraden, die durch P_3 und P_5 geht: $l_4 = 0$; der Geraden, die durch P_5 und P_6 geht: $l_5 = 0$; und der Geraden, die durch P_6 und P_4 geht: $l_6 = 0$; so hat man auf ganz ähnliche Art in Beziehung auf die Punkte P_3, P_5, P_6, P_4 folgende Gleichung für die Curve:

$$K = k . l_4 . l_6 + k' . l_5 . l_3 \; \ldots\ldots (4)$$

wo k und k' Constanten bezeichnen. Eliminirt man nun aus den Gleichungen (3) und (4) l_3, so erhält man:

$$(k' . l_5 - K_9 . l) K = k' . K_8 . l_1 . l_2 . l_5 - k . K_9 . l . l_4 . l_6 \; \ldots (5)$$

Da k, k', K_8, K_9 Constanten sind, so wird

$$k' . l_5 - K_9 . l = l_7 = 0$$

die Gleichung einer Geraden sein. Die neun Durchschnitte der drei Geraden l_1, l_2 und l_5 mit den drei anderen Geraden l, l_4 und l_6 liegen also, da in ihnen die beiden Glieder der Gleichung (5) verschwinden, entweder auf der Curve, oder auf der Geraden l_7. Nun aber schneidet die Gerade l_1 die Geraden l und l_6 auf der Curve. Sie kann die Curve nur in zweien Punkten schneiden, also muss der Durchschnitt mit l_4, da er von den beiden andern im Allgemeinen verschieden ist, auf der Geraden l_7 liegen. Eben so müssen die Durchschnitte l_2 und l_6, l_5 und l auf derselben Geraden liegen. Dieses ist der Pascal'sche Satz.

3. Bei Curven dritter Ordnung werden die Grössen K_8. K_9 in der Formel (3) nicht über die erste Ordnung sein; eine derselben muss wenigstens vom ersten Grade sein, da sonst die Curve nur von zweiter Ordnung wäre. In dem Folgenden wird angenommen, dass beide die Gleichungen von Geraden darstellen, dass also die Gleichung für die Curve von folgender Form sein wird:

$$K = l . l_1 . l_2 + l_3 . l_4 . l_5 \ldots\ldots (6)$$

Die Gerade l gehe durch die Punkte P_1, P_4, P_7 (Taf. VII. Fig. 5.); l_1 durch die Punkte P_2, P_5, P_8; l_3 durch P_1, P_2, P_3; l_4 durch P_4, P_5, P_6; so sieht man leicht, dass l_2 durch die Punkte P_3, P_6, P_9; und dass l_5 durch P_7, P_8, P_9 geht. Wenn man also durch vier in der Curve liegende Punkte P_1, P_2, P_4, P_5 die vier Geraden zieht: 1) $P_1 P_2$, die die Curve überdies in P_3 schneidet; 2) $P_4 P_5$, die die Curve in P_6 schneidet;

3) $P_1 P_4$, die die Curve noch in P_7 schneidet; 4) $P_2 P_5$, die die Curve noch in P_8 schneidet: so schneiden die Geraden $P_2 P_5$ und $P_7 P_8$ die Curve in demselben Punkte P_9.

Es werden die Geraden l und l_3 beibehalten, oder die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_7, und vier andere Gerade gezogen: l'_1 durch die Punkte P_2, P'_5, P'_8; l'_2 durch P_3, P'_6, P'_9; l'_4 durch P_4, P'_5, P'_5; l'_5 durch P_7, P_8', P'_9. Alle diese Punkte liegen auf der Curve. Statt des Vierecks P_5, P_5, P_8, P_9 entsteht also ein neues P'_5, P'_6, P'_8, P'_9, dessen verlängerte Seiten die Curve in denselben Punkten, wie die verlängerten Seiten des erstern schneiden. Da beide in der Curve eingeschrieben sind, so hat man ebenfalls für das letztere:

$$K = l.l'_1.l'_2 + l_3.l'_4.l'_5 \text{ ...... } (7).$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (6) und (7) l_3, so ergiebt sich:

$$(l'_4.l'_5 - l_4.l_5)K = l\{l_1.l_2.l'_4.l'_5 - l'_1.l'_2.l_4.l_5\}.$$

K oder die Gleichung für die Curve kann nicht durch l theilbar sein, folglich muss

$$l'_4.l'_5 - l_4.l_5 = L.l$$

sein, wo $L=0$ die Gleichung einer neuen Geraden ist. Demnach ist:

$$L.K = l_1.l_2.l'_4.l'_5 - l'_1.l'_2.l_4.l_5 \text{ ...... } (8).$$

Die Gerade l_1 kann die Curve nur in dreien verschiedenen Punkten schneiden, nemlich in ihren Durchschnitten mit l'_1, l_4, l_5; der Durchschnitt δ (Taf. VII. Fig. 5.) mit l'_2 liegt daher auf der Geraden L; eben so liegen: α der Durchschnitt von l_2 mit l'_1; β der Durchschnitt von l'_4 mit l_5; γ der Durchschnitt von l'_5 mit l_4 auf derselben Geraden. Wir haben also den Satz:

„Beschreibt man in einer Curve dritter Ordnung zwei Vierecke, deren verlängerte Seiten die Curve in denselben vier Punkten schneiden; so liegen die vier Durchschnitte der vier Seiten des einen Vierecks mit den den gegenüberliegenden Seiten entsprechenden in dem andern Vierecke, auf einer Geraden."

Durch Hülfe dieses Satzes lassen sich, wenn die acht Durchschnitte der vier Seiten eines in die Curve eingeschriebenen Vierecks mit der Curve bekannt sind, mittelst eines neunten Punkts, wenn dieser nicht der oben erwähnte neunte Punkt P_9 ist, eine unendliche Anzahl Punkte der Curve durch die leichteste Construction finden. Es sei nemlich (Taf. VII. Fig. 5.) P'_5 dieser Punkt. Man ziehe $P_2 P'_5$ oder l'_1, die die Gerade l_2 in dem Punkte α schneidet; $P_4 P'_5$ oder die Gerade l'_4, die l_5 in dem Punkte β schneidet. Durch α und β ziehe man nun die Gerade L_1, die l_4

im Punkte γ, l_1 aber im Punkte δ schneidet, so gehen die Geraden l'_2 durch P_3 und δ, l'_5 aber durch P_7 und γ, wodurch das ganze Viereck völlig bestimmt ist. Man findet also auf diese Weise drei neue Punkte durch Hülfe des einzigen P'_5. Durch Verwechselung der Geraden l, l_1 und l_2 unter einander und l_3, l_4, l_5 lassen sich mehrere neue Punkte blos durch P'_5 finden; wenn man aber die neu gefundenen auf dieselbe Art als P'_5 behandelt, oder die neuen Complexe von drei und drei Geraden anwendet, und die Operationen wiederholt, kann man jede beliebige Anzahl Punkte auf der Curve finden.

4. Es seien in einer Curve zweiter Ordnung zwei Vierecke eingeschrieben, deren auf einander folgende Seiten l, l_1, l_2, l_3 und l', l'_1, l'_2, l'_3 sind. Man hat also, wenn $K=0$ die Gleichung der Curve ist:

$$K=l.l_2+l_1.l_3,$$

$$K=l'.l'_2+l'_1.l'_3;$$

folglich durch Elimination:

$$(l'_1.l'_3-l_1.l_3)K=l.l_2.l'_1.l'_3-l'.l'_2.l_1.l_3.$$

Von den sechszehn Durchschnitten der vier Geraden l, l_2, l'_1 und l'_3 mit den vier andern l', l'_2, l_1 und l_3 liegen nur acht auf der Curve, und können nicht mehr verschiedene liegen, weil jede Gerade die Curve nur in zweien Punkten schneiden kann. Die übrigen acht Durchschnitte l und l_2 mit l' und l'_2; l_1 und l_3 mit l'_1 und l'_3 liegen auf einer Curve zweiter Ordnung, oder einem Systeme von zweien Geraden, deren Gleichung

$$l'_1 l'_3-l_1 l_3=0$$

ist. Man kann hieraus folgenden bekannten Satz folgern:

„Wenn von zweien in einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecken, die drei Seiten des einen die entsprechenden drei Seiten des andern auf einer Geraden schneiden; so liegt der Durchschnitt der vierten Seite mit der entsprechenden im andern Dreiecke auf derselben Geraden. Zugleich liegen die Durchschnitte der vier Seiten des einen Vierecks mit den entsprechenden gegenüberstehenden im anderen Vierecke auf einer anderen Geraden."

5. In einer Curve dritter Ordnung seien zwei verschiedene Vierecke eingeschrieben, in denen blos zwei einander gegenüberstehende Seiten die Curve in denselben beiden Punkten schneiden. Es sei also $K=0$ die Gleichung der Curve, so ist:

$$K=l.l_1.l_2+l_3.l_4.l_5,$$

$$K=l.l'_1.l'_2+l'_3.l'_4.l'_5.$$

Eliminirt man hieraus l, so ergiebt sich:

$$(l'_1 . l_2' - l_1 . l_2) K = l'_1 . l'_2 . l_3 . l_4 . l_5 - l_1 . l_2 . l'_3 . l' \, . l'_5 \,.$$

Von den fünfundzwanzig Durchschnitten der Geraden l'_1, l'_2, l_3, l_4, l_5 mit den Geraden l_1, l_2, l'_3, l'_4, l'_5 liegen die in dem untenstehenden Schema mit 0 bezeichneten Durchschnitte der in der obern horizontalen Reihe mit denen in der vertikalen auf der Curve. Die übrigen liegen auf einer andern Curve oder Systeme von zweien Geraden, deren Gleichung

$$l'_1 . l'_2 - l_1 . l_2 = 0$$

ist.

	l_1	l_2	l'_3	l'_4	l'_5
l'_1			0	0	0
l'_2			0	0	0
l_3	0	0	0		
l_4	0	0		0	
l_5	0	0			0

Hieraus folgt sogleich, dass wenn drei dieser letztern Durchschnitte auf einer Geraden liegen, die sämmtlichen zehn Durchschnitte auf zweien Geraden liegen müssen, und zwar auf jeder fünf derselben.

XV.

Zweite Bearbeitung des in dem Aufsatze Thl. XIII. Nr. XXXIII. gegebenen Beweises eines geometrischen Satzes.

Von

Herrn Theodor Lange

zu Berlin.

Es erscheint hiermit eine neue Bearbeitung des Beweises zu dem in Thl.XIII. Nr.XXXIII. S. 341. aufgestellten Satze: Wenn aus zwei Punkten A und B einer geraden Linie zwei gerade Linien AC und BD ausgehen, welche mit der Linie AB die Winkel a und b bilden mögen, und wenn eine aus dem Punkte A auf die Gerade DB gezogene Linie von der Länge r den Winkel a in demselben Verhältnisse theilt, in dem eine aus dem Punkte B auf die Linie AC gezogene Linie von derselben Länge r den Winkel b theilt, so sind die Winkel a und b einander gleich. Der hier folgende Beweis scheint, abgesehen von seiner grössern Einfachheit, deshalb vielleicht einige Aufmerksamkeit zu verdienen, weil in seinem Verlauf deutlicher hervortritt, woher es wohl gekommen ist, dass so viele Versuche einen rein geometrischen Beweis dieses Satzes zu geben, gescheitert sind. Indem nämlich die Bedingung, dass die Halbmesser in den Winkeln a und b liegen müssen, einmal begrenzend und dann wieder ausschliessend wirkt; da dieselbe bewirkt, dass, wenn $a > PBA$ ist, die Gleichung $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ die Gleichung $a=b$ bedingt, indessen sie, wenn $a < PBA$ ist, die Gleichung unmöglich macht und den Fall, dass die Kreise sich nicht schneiden, ganz ausschliesst; aber auch die Gleichungen $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ und $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta}$ nicht eintreten lässt.

(Von nun an s. m. Taf. X.)

Alle geraden Linien aus einem Punkte A, auf denen Punkte liegen, welche von einem Punkte B den bestimmten Abstand r haben, sind Secanten aus A für den mit r als Halbmesser um den Punkt B beschriebenen Kreis. Ebenso sind alle gerade Linien aus dem Punkte B, auf denen Punkte liegen, welche von dem Punkte A den bestimmten Abstand r haben, Secanten aus B für den mit dem Halbmesser r um A gezeichneten Kreis. — Man stelle sich vor, eine Secante für den Kreis um A aus dem Punkte B drehe sich um diesen Punkt so, dass sie aus der Lage BA als der ursprünglichen sich nach einer Richtung bewege, bis sie in die Lage jeder Secante gekommen ist. Der bei dieser Drehung zunehmende Winkel, welchen die Secante mit BA bildet, sei b. Sind während der Drehung auf die Secanten stets die Halbmesser gezogen, so wird jeder Halbmesser mit BA Winkel bilden, von denen der eine α mit dem Winkel b gleichzeitig zunimmt, indessen der ihm der Lage nach entsprechende Winkel α' am andern Halbmesser fortwährend abnimmt. Man bezeichne ferner den Winkel, den eine beliebige Secante aus A für den Kreis um B mit AB bildet, mit a und, der obigen Bezeichnung der Winkel α und α' entsprechend, die Winkel, welche die auf diese Secanten gezogenen Halbmesser gegen AB bilden, mit β und β'.

Da die Winkel a und b beständig denselben Werth behalten, dagegen b und α gleichzeitig zunehmen, so nimmt das Verhältniss $\frac{a}{\alpha}$ ab, indessen $\frac{b}{\beta}$ zunimmt. Es kann also nur **höchstens einmal** $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ werden, während die Secante in die Lage jeder Secante gekommen ist. Da aber, wenn $a=b$ ist, immer $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, so muss auch umgekehrt, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, $a=b$ sein.

Mit mehr Schwierigkeiten ist aber die Untersuchung verbunden, unter welchen Bedingungen die Quotienten $\frac{a}{\alpha'}$ und $\frac{b}{\beta'}$ einander gleich sind, da diese Verhältnisse gleichzeitig zunehmen. Man stelle sich vor, b nehme immer um einen beständigen Winkel y zu; alsdann wird α' um Winkel abnehmen, welche selbst entweder stetig zunehmen, wenn $AB>r$ ist, oder immer gleich bleiben, wenn $AB=r$ ist, oder stetig abnehmen, wenn $AB<r$ ist. Während daher das Verhältniss $\frac{b}{\beta'}$ von Null beginnend bis $\frac{\pi}{\beta'}$ immer um dieselben Werthe zunimmt, muss $\frac{a}{\alpha'}$ von $\frac{a}{\pi}$ beginnend bis zu unendlich grossen Werthen zunehmen. Daraus folgt, dass das Verhältniss $\frac{a}{\alpha'}$, während $\frac{b}{\beta'}$ um immer gleiche Stücke zunimmt, um immer grössere und grössere zunimmt, denn dieses Verhältniss muss sich immer in derselben Weise ändern. Da nun aber,

wenn b gleich a wird, $\frac{b}{\beta'}=\frac{a}{\alpha'}$ ist, so folgt, dass anfangs $\frac{b}{\beta'}<\frac{a}{\alpha'}$ ist, dann aber $\frac{b}{\beta'}=\frac{a}{\alpha'}$, dann $\frac{b}{\beta'}>\frac{a}{\alpha'}$, dann $\frac{b}{\beta'}=\frac{a}{\alpha'}$ und zuletzt $\frac{b}{\beta'}<\frac{a}{\alpha'}$ wird. Im Allgemeinen muss daher zweimal $\frac{b}{\beta'}$ gleich $\frac{a}{\alpha'}$ werden, und zwar einmal wenn $a=b$ ist.

Wenn gleich es mir nicht gelungen ist, die Grenze genau zu bestimmen, wann die Gleichung $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ die Gleichheit, wann die Ungleichheit der Winkel a und b bedinge, so zeigt doch folgende Untersuchung, dass unter besondern Bedingungen nur dieser oder jener Fall eintreten kann.

Es sei zuerst AB und r so gegeben, dass die Kreise um A und um B sich schneiden. Wenn in diesem Falle $a>\beta'$ gegeben ist, und b gleich β' wird, so ist $\alpha'>a$, folglich $\frac{b}{\beta'}>\frac{a}{\alpha'}$. Es muss daher schon ehe $b=\beta'$ geworden ist, einmal $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ gewesen sein, und es muss auch, wenn $b>\beta'$ wird, noch einmal $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ werden. Da b hier kleiner als a ist, und wenn $b=a$ wird, die Verhältnisse $\frac{a}{\alpha'}$ und $\frac{b}{\beta'}$ gleich sind, so folgt, dass wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, während $b>\beta'$ ist, die Winkel a und b einander gleich sind. — Wenn aber $a<\beta'$ ist, und $b=\beta'$ wird, so ist $a>\alpha'$, also $\frac{b}{\beta'}<\frac{a}{\alpha'}$. Da nun aber, als $b=a$ war, $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ gewesen sein muss, kann, wenn $b>\beta'$ wird, die Gleichung $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ nicht eintreten. Wenn also beide Kreise sich schneiden und $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, während $b>\beta'$ ist, so muss auch der Winkel a gleich dem Winkel b sein.

Es sei AB und r so gegeben, dass die Kreise sich nicht schneiden, so zeigt die Figur deutlich, dass die Winkel α' und β' nicht gleichzeitig in den Winkeln a und b liegen. Wenn man daher als Bedingung hinstellt, dass α' und β' gleichzeitig in den ihnen entsprechenden Winkeln a und b liegen sollen, so schliesst man den Fall, dass die beiden Kreise sich nicht schneiden, aus, indem man die Bedingungen, welche, wenn die Kreise sich schneiden, die Gleichungen $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ und $a=b$ gleichzeitig auftreten lassen, erfüllt. — Wenn daher $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, während α' und

β' **Theile von** a **und** b **sind, so ist der Winkel** a **gleich dem Winkel** b.

Es bleibt nun noch zu zeigen, unter welchen Bedingungen die Gleichung $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$, oder $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta}$ auftritt. — Da das Verhältniss $\frac{a}{\alpha}$ immer abnimmt, wenn $\frac{b}{\beta'}$ zunimmt, so kann **höchstens einmal** $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ werden. — Wenn a kleiner als ein Rechter ist, ist $\beta'>\beta$, mithin $\frac{b}{\beta'}<\frac{b}{\beta}$; das abnehmende Verhältniss $\frac{a}{\alpha}$ wird daher bei grösserem Werthe von b das Verhältniss $\frac{b}{\beta'}$, als das Verhältniss $\frac{b}{\beta}$ erreichen, so dass, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ ist, und $a<R$, immer b grösser als a sein müsste. Wenn aber a grösser ist, als ein Rechter, so findet man auf dieselbe Weise, dass, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ sein soll, b kleiner als a sein müsste. — Aus der Gleichung $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ folgt, wenn a kleiner als b ist, $a-\alpha<b-\beta'$ oder $a+\beta'<b+\alpha$. Es kann aber nie $a+\beta'<b+\alpha$ sein, wenn anders nicht $b>R$ ist. Und wenn $a>b$ ist, folgt aus der Gleichung $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$, $a-\alpha>b-\beta'$ oder $a+\beta'>b+\alpha$. Es kann aber $a+\beta'$ nie grösser sein, als $b+\alpha$, wenn nicht b kleiner, als ein Rechter ist. Wenn demnach $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ sein soll, muss einer von beiden Winkeln a oder b grösser und der andere kleiner sein, als ein rechter Winkel. Dasselbe gilt von der Gleichung $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta}$. Diese Bedingung tritt aber nie ein, wenn die Winkel α' und β oder α und β' gleichzeitig in ihre entsprechenden Winkel a und b fallen.

Nachdem nun gezeigt ist, dass erstens, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, auch immer $a=b$ sei, dass zweitens, wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, und gleichzeitig α' und β' in ihre entsprechenden Winkel a und b fallen, auch $a=b$ sei, dass drittens, wenn α' und β oder β' und α gleichzeitig in ihren entsprechenden Winkeln a und b liegen, nie $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ oder $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ werden kann, so hat man folgenden allgemeinen Satz:

Wenn aus zwei Punkten A und B einer geraden Linie zwei Linien AC und BD ausgehen, welche mit der

Linie *AB* die Winkel *a* und *b* bilden mögen, und wenn eine aus dem Punkte *A* auf die Linie *BD* gezogene Linie von der Länge *r*, den Winkel *a* in demselben Verhältniss theilt, in dem eine, aus dem Punkte *B* auf die Linie *AC* gezogene Linie von derselben Länge *r*, den Winkel *b* theilt, so sind die Winkel *a* und *b* einander gleich.

Dieser Satz umfasst den durch die Schwierigkeiten seines Beweises bekannten Satz: Wenn eine aus einem Dreieckswinkel auf die Gegenseite gezogene Linie *r* diesen Winkel in demselben Verhältniss theilt, in dem eine aus einem andern Dreieckswinkel auf die Gegenseite gezogene Gerade von derselben Länge diesen zweiten Winkel theilt, so ist das Dreieck gleichschenklich.

Mit diesem Satze steht folgender auf gleicher Linie: Wenn eine gerade Linie von zwei anderen geschnitten wird, und theilt eine aus dem einen Schnittpunkt auf die andere gerade Linie gezogene Gerade von gegebener Länge *r* einen der Winkel in demselben Verhältniss, wie eine aus dem andern Schnittpunkt auf die erstere gerade Linie gezogene Gerade von der gegebenen Länge *r* dessen Wechselwinkel oder dessen gleichliegenden Winkel theilt, so sind die beiden Linien parallel.

XVI.

Miscellen.

Wie man den körperlichen Inhalt der Halbkugel oder der Kugel durch Vergleichung derselben mit einem Kegel und einem Cylinder zu bestimmen pflegt, ist bekannt genug, und findet sich fast in allen Lehrbüchern der Geometrie. Nicht so bekannt scheint zu sein, verdient aber, so einfach die Sache auch an sich ist, für den geometrischen Elementarunterricht wohl eine Bemerkung, dass man fast mit derselben Leichtigkeit ganz auf dieselbe Weise sogleich den körperlichen Inhalt eines beliebigen Kugelsegments, und dann ferner auch dessen sphärische Oberfläche, bestimmen kann, wie im Nachfolgenden in der Kürze gezeigt werden soll.

Ist nämlich Taf. X. Fig. 1. die allgemein bekannte Figur für den Fall der Halbkugel, so denke man sich GN parallel mit AB gezogen, und betrachte nun die drei durch Umdrehung von $FDGN$, HEM, $DJLF$ um CE oder KE als Axe entstandenen Körper, welche respective ein Cylinder, ein Kugelsegment und ein abgestumpfter Kegel sind. Betrachtet man nun einen beliebigen mit GN parallelen Schnitt $G'N'$, so ist:

$$\text{Schnitt im Cylinder} = K'G'^2.\pi,$$

$$\text{Schnitt in der Kugel} = K'H'^2.\pi,$$

$$\text{Schnitt im Kegel} = K'J'^2.\pi.$$

Zieht man aber CH', so ist $CH' = K'G'$, und ausserdem ist offenbar $K'J' = CK'$; also ist

$$\text{Schnitt im Cylinder} = CH'^2.\pi,$$

$$\text{Schnitt in der Kugel} = K'H'^2.\pi,$$

$$\text{Schnitt im Kegel} = CK'^2.\pi.$$

Weil nun nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$CH'^2 = K'H'^2 + CK'^2$$

ist, so ist

Schnitt im Cylinder
= Schnitt in der Kugel + Schnitt im Kegel,

woraus nach einer bekannten Schlussweise folgt, dass der durch Umdrehung von *FDGN* um *KE* entstandene Cylinder gleich der Summe des durch Umdrehung von *HEM* um *KE* entstandenen Kugelsegments und des durch Umdrehung von *DJLF* um *KE* entstandenen abgestumpften Kegels ist.

Bezeichnen wir jetzt den Halbmesser der Kugel durch r, und setzen ausserdem $KE = h$, so ist, weil offenbar

$$KJ = CK = CE - KE$$

ist, $KJ = r - h$, und folglich nach bekannten Sätzen:

$$\text{Cylinder} = r^2 \pi h,$$

$$\text{Abgestumpfter Kegel} = \frac{1}{3}\pi h \{r^2 + r(r-h) + (r-h)^2\};$$

also nach dem Obigen

$$\text{Kugelsegment}$$

$$= r^2 \pi h - \frac{1}{3}\pi h \{r^2 + r(r-h) + (r-h)^2\}$$

$$= \pi h \{r^2 - \frac{1}{3}[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2]\},$$

woraus man mittelst leichter Rechnung

$$\text{Kugelsegment} = \pi h^2 (r - \frac{1}{3}h)$$

erhält. Nun ist aber nach einem bekannten Satze vom Kreise, wenn wir $KH = \varrho$ setzen, offenbar:

$$h : \varrho = \varrho : 2r - h,$$

also

$$2r - h = \frac{\varrho^2}{h}, \quad r = \frac{1}{2}h + \frac{\varrho^2}{2h}, \quad r - \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}h + \frac{\varrho^2}{2h};$$

folglich nach dem Obigen

$$\text{Kugelsegment} = \pi h^2\left(\frac{1}{6}h + \frac{\varrho^2}{2h}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3\varrho^2),$$

welches die bekannte Formel für den körperlichen Inhalt eines Kugelsegments ist.

Bezeichnen wir ferner die sphärische Oberfläche des Kugelsegments durch O, so erhellet mittelst einer einfachen Betrachtung auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{3}rO = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3\varrho^2) + \frac{1}{3}\pi\varrho^2(r-h)$$
$$= \frac{1}{6}\pi h\{3h(2r-h) + h^2\} + \frac{1}{3}\pi h(2r-h)(r-h),$$

woraus nach leichter Rechnung

$$\frac{1}{3}rO = \frac{2}{3}\pi hr^2,$$

also

$$O = 2\pi hr$$

folgt, welches wieder eine längst bekannte Formel ist, die für $h=r$ auf der Stelle zur Oberfläche $2r^2\pi$ der Halbkugel, also zur Oberfläche $4r^2\pi$ der ganzen Kugel führt.

Solche Erweiterungen bekannter Darstellungsmethoden, die gewöhnlich nur in specielleren Fällen angewandt zu werden pflegen, mögen für den geometrischen Elementarunterricht einiges Interesse haben, und verdienen daher vielleicht nicht ganz unbeachtet gelassen zu werden. G.

Schreiben des Herrn W. Mink, Lehrers der Mathematik an der höheren Stadtschule zu Crefeld an den Herausgeber.

Ihre Aufforderung im letzten Hefte des Archivs der Mathematik und Physik (Thl. XIII.), zu dem darin unter Nr. XXXIII. mitgetheilten Satze geometrische Beweise zu liefern, veranlasst mich Ihnen beifolgende Kleinigkeit zu übersenden. Mir wurde dieser Satz und zwar mit der Beschränkung, dass die Winkel halbirt würden,

vor einiger Zeit von einem frühern Schüler der Königl. Gewerbschule mitgetheilt mit dem Bemerken, dass der Beweis desselben so ungleich schwieriger sei, als der des umgekehrten Satzes. Ich fand damals den hier mitgetheilten Beweis und überzeugte mich von der Richtigkeit jener Bemerkung. Der allgemeinere Satz wird sich auf die hier eingeschlagene Weise schwerlich beweisen lassen, ich werde aber, so bald ich einige Musse habe, mich bemühen, auch den Beweis für diesen zu finden, und wenn es mir gelingen sollte, Ihnen zur Zeit Mittheilung davon machen.

Lehrsatz. **Wenn die Halbirungslinien AD und BE (Taf. X. Fig. 2.) der Winkel CAB und CBA im Dreieck ABC gleich sind, so sind auch die Seiten BC und AC gleich.**

Beweis.

Es sei $GF \parallel AB$ und AD und BE verlängert bis zum Durchschnitt mit GF, so ist:

$$AB:AD = CF:DF = AC:DF,$$

und

$$AB:BE = CG:EG = BC:EG;$$

also

$$\text{I.} \quad AC:BC = DF:EG.$$

Nun ist aus den ähnlichen Dreiecken ABD und CFD, so wie ABE und CGE:

$$DF = \frac{BD.DC}{AD} \text{ und } EG = \frac{AE.EC}{BE};$$

daher

$$\text{II.} \quad AC:BC = BD.DC:AE.EC.$$

Ferner ist nach einem bekannten Satze

$$AB:AC = BD:DC,$$

also

$$DC = \frac{AC.BD}{AB};$$

und nach demselben Satze:

$$EC = \frac{BC.AE}{AB};$$

also

$$\text{III.}\quad AC:BC = AC.BD^2 : BC.AE^2;$$

woraus

$$1:1 = BD^2 : AE^2$$

also

$$BD^2 = AE^2$$

oder

$$BD = AE.$$

Folglich ist

$$\triangle ABD \cong \triangle ABE,\quad \angle DBA = \angle EAB,$$
$$AC = BC;$$

w. z. b. w.

XVII.

Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibaut's Beweise der Summe der Dreieckswinkel für die gesammte Elementar-Geometrie, und besonders für die Theorie der Parallelen.

Von dem

Dr. Theol. Herrn F. H. Germar,

zu Heide in Norder-Dithmarschen.

Nach einer Aeusserung des Proklus schreibt Eudemus den euklidischen Beweis des Satzes, dass die Summe aller Dreieckswinkel gleich zwei rechten Winkeln sei, den Pythagoräern zu; er war also schon lange vor Euklides in Gebrauch. Da aber diese Beweisart sich auf die Gleichheit der Wechselswinkel bei den geraden Parallelen gründet, so blieb dem Euklid, wenn er bei derselben bleiben wollte, nichts anders übrig, als auch bei der desshalb eingeführten Definition der geraden Parallelen zu verharren, nach welcher „gerade Parallelen solche gerade Linien in der nämlichen Ebene sind, welche unendlich verlängert sich nach keiner Seite schneiden", wie sehr auch seinem sonst so richtigen und strengen logischen Tacte eine solche Definition widersprechen mochte. Denn, weil Keiner läugnen wird, dass es auch Parallel-Kreise, folglich krumme Parallelen giebt; so wird man auch das logische Gesetz zugeben müssen, dass die Definition zuerst auf Parallellinien überhaupt, als das genus, sich beziehen, und dann erst die differentia specifica für gerade Parallellinien angeben solle. Für das genus ist aber schwerlich ein anderes Merkmal aufzufinden, als dasjenige, welches der sensus communis überall mit dem Parallelismus verbindet, nämlich den

durchgängigen gleichen Abstand, dessen Beweis bei den Parallel-Kreisen in einer Ebene keine Schwierigkeit haben kann, weil bei concentrischen in einer Ebene liegenden Kreisen die Differenzen aller möglichen Radien zwischen jenen Kreisen nothwendig einander gleich sein müssen. Auch leuchtet es von selbst ein, dass Linien überhaupt, welche durchgängig gleichen Abstand haben, einander niemals schneiden können, keineswegs aber, dass gerade Linien in einer Ebene, welche unendlich verlängert sich nach keiner Seite schneiden, deswegen gleichen Abstand haben müssen. Falls nämlich ihre Annäherung in gleichen Abständen zu beiden Seiten etwa in dem Verhältnisse wie $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ihres früheren Abstandes fortschritte, so würden sie sich unaufhörlich nähern, ohne sich jemals zu schneiden; und dieses würde noch viel weniger geschehen, wenn sie in solchem Verhältnisse sich zu beiden Seiten von einander entfernten. Dass aber ein solches Verhältniss bei geraden Linien nicht Statt finden kann, versteht sich nicht von selbst, muss also erst bewiesen werden.

Dagegen scheint aber auch der Beweis, dass zwei gerade Linien in einer Ebene, wenn sie in zwei Punkten gleichen Abstand haben, den nämlichen auch in allen übrigen haben müssen, ganz unmöglich zu sein, wenn die Summe der Dreieckswinkel nicht schon vorher, und unabhängig von der Theorie der Parallelen gefunden ist. Gerade darin aber dürfte der Grund liegen, dass alle Versuche, den gleichen Abstand zu beweisen, eben so wohl scheitern mussten, als die Bemühungen, das Unbefriedigende der euklidischen Beweisart zu beseitigen.

Wenn man nämlich auf einer geraden Linie zwei gleiche Verticalen erhebt, und durch ihre Endpunkte eine Gerade zieht: so lässt sich, bevor die Summe der Dreieckswinkel gefunden ist, nimmer durch Gleichheit der Dreiecke beweisen, dass die zweite Gerade in allen übrigen Punkten gleichen Abstand von der ersten habe, d. h. alle übrigen Verticalen jenen beiden gleich sein müssen. Errichtet man hingegen drei gleiche Verticalen, so lassen sich immer nur zwei Endpunkte derselben durch eine Gerade verbinden, und dann kann man eben so wenig beweisen, dass die beiden dadurch entstandenen an einander stossenden Linien eine einzige Gerade bilden.

Vermehrt wird die Schwierigkeit der Sache aber auch noch durch den unbestimmten Begriff der geraden Linie, wenn derselbe, wie gewöhnlich so abgefasst ist: sie sei diejenige Linie, deren Elemente oder Punkte sämmtlich in einerlei Richtung liegen. Denn, was ist einerlei Richtung? Beide Wörter leiden gleich sehr an Dunkelheit, und man wird auf ihren Ursprung zurück gehen müssen, wenn man sie deutlich machen will. Das Wort Richtung ist nämlich von der Bewegung des Auges hergenommen, und bezeichnet diejenige Stellung desselben, in welcher es den kleinsten Gegenstand am deutlichsten sieht. Kann nun eine Linie, (d. h. die Gränze einer Fläche, so wie die Fläche die Gränze des eingeschlossenen Raums ist) entweder durch ihre

eigene oder des Anges Bewegung in eine solche Stellung kommen, dass in der Richtung desselben alle Elemente der Linie in einen Punkt zusammenzufallen scheinen, oder sich decken; so hat sie in allen ihren Elementen die nämliche Richtung wie die Richtung des Anges, also einerlei Richtung. Dies erhellet auch schon aus der Art, wie die gerade Linie praktisch geprüft wird. Die Definition derselben dürfte also richtiger folgendermassen lauten: Die gerade Linie ist diejenige, welche in eine solche Stellung gegen die Richtung des Auges kommen kann, dass alle ihre Elemente in einem Punkte zusammen zu fallen scheinen, oder einander decken; diejenige aber, bei welcher dieses unmöglich ist, heisst eine krumme.

Daraus folgt denn freilich, dass die Elemente einer geraden Linie in einerlei Richtung liegen müssen, d. h. mit der Richtung des Auges zusammen fallen können; desgleichen, dass zwei Punkte die Richtung einer geraden Linie vollkommen bestimmen; ferner, dass die Ebene diejenige Fläche ist, mit welcher gerade Linien von jeder Richtung in allen Punkten zusammenfallen, sobald dieses in zwei Punkten geschieht,

Zwar wird nun die Schärfe der Grundbegriffe und der Beweise von denen gering geschätzt, denen es nur um Resultate der Geometrie für die praktische Anwendung zu thun ist, daher diese eine Menge von Sätzen der Elementar-Geometrie als Axiome darstellen. Das ist jedoch nicht im Sinne Euklids gehandelt. Den Griechen war es nicht so sehr um die Resultate der Geometrie, als um strenge logische Form der Beweise zu thun; ihnen war sie hauptsächlich eine Propädeutik der Philosophie. Uns sind nun freilich jene Resultate weit wichtiger für die Naturkunde und Technik geworden, als sie ihnen waren; aber deswegen bleibt doch auch für uns die Bildung zu einem strenglogischen Denken nicht weniger wichtig. Unbestimmte vieldeutige Grundbegriffe richten in allen Wissenschaften, besonders in den discursiven und speculativen, unsägliches Unheil an, und haltlose Schlüsse aus erschlichenen oder halbwahren Prämissen versperrten oft für Jahrhunderte den Weg zur Wahrheit. Des Aristoteles Fehlschluss für eine verschiedene Fallgeschwindigkeit der Körper hielt über ein Jahrtausend alle Köpfe gefangen, und die schlagendsten englischen Beobachtungen haben noch nicht die Reihe von Fehlschlüssen über Fluth und Ebbe verdrängen können, zu welchen man bloss dadurch verleitet ward, dass man vergass, die Erde sei kein solcher Körper als die Theorie sie nothwendig denken musste, um die Wirkung der Attraction klar zu machen. Wenn aber solches sogar in der Physik geschehen konnte, wie viel grösser ist die Gefahr für diejenigen Wissenschaften, welche von Beobachtungen und Erfahrungen wenig oder gar nicht unterstützt werden!

Jedenfalls schickt es sich am wenigsten für die reine Geometrie, welche vor allen andern Wissenschaften auf unumstössliche Wahrheit ihrer Lehrsätze Anspruch macht, wenn auch sie sich beschuldigen lassen muss, für manche ihrer Grundbegriffe nur unklare Worte, und für einen ihrer wichtigsten und folgenreich-

sten Lehrsätze nur einen mangelhaften unbefriedigenden Beweis zu haben.

Es fehlt also nicht an triftigen Rechtfertigungsgründen für das Bestreben derjenigen, welche immer neue Versuche gemacht haben, jenen Vorwurf von der Geometrie abzuwenden. Auch der Verfasser dieses Aufsatzes, der in verschiedenen Verhältnissen seines langen Lebens zum wiederholten Vortrage der Wissenschaft genöthigt war, konnte sich solcher Versuche nicht entschlagen, sah sie jedoch stets vereitelt, bis schon vor vielen Jahren die Ansicht von Thibauts Geometrie durch die Art, wie derselbe unabhängig von der Theorie der Parallelen den Beweis für den Satz von der Summe der Dreieckswinkel führt, ihm den Weg zu öffnen schien. Doch ward er damals durch dringendere Arbeiten verhindert denselben weiter zu verfolgen. Wider seine Vermuthung hat er aber auch nicht erfahren, dass jener Beweis bei den späteren Versuchen so benutzt wäre, wie er es zu verdienen scheint, vielleicht weil der Urheber denselben mehr andeutete als vollständig ausführte. Daher benutzte er, bei einer neuen Veranlassung, die Sache wieder aufzunehmen, die unfreiwillige Musse, welche ihm durch die nun schon mehr als zweijährige dänische Vertreibung aus seinem Amte geworden ist, die Wichtigkeit, welche er einer richtigen Auffassung jenes Beweises für die gesammte Elementar-Geometrie und besonders für die Theorie der Parallelen zuschreiben zu müssen glaubt, der öffentlichen Prüfung vorzulegen, indem er zugleich dem Herrn Dr. Vechtmann in Meldorf für die sachkundige Sorgfalt, mit welcher derselbe sich zuerst derselben unterzog, so wie auch dem Herrn Professor Horn in Glückstadt seinen Dank abstattet.

Um aber den Raum und die unnöthigen Kosten vieler Figuren zu ersparen; sind im Folgenden alle von der Summe der Dreieckswinkel unabhängigen Beweise nur kurz angedeutet, diejenigen Sätze aber ganz weggelassen, welche mit dem Hauptziele in keiner nothwendigen Verbindung stehen.

Will man jedoch den von Professor Thibaut angebahnten Weg verfolgen, so muss man nach seinem Vorgange von einer andern Definition des Winkels ausgehen, als die gewöhnliche ist, welche durch den Ausdruck — „der Winkel sei die Neigung zweier Linien, welche in einem Punkte zusammenstossen“ — wiederum den dunkeln Begriff der Neigung in die Definition mischt. Denn dieser Begriff kann nur durch den Gegensatz, nämlich als Abweichung vom Parallelismus, deutlich werden; von diesem darf aber vor der Theorie der Parallelen nicht die Rede sein.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, muss man von dem Begriff der Kreislinie ausgehen, indem man diese als das Bild des Weges betrachtet, welchen der eine Endpunkt einer geraden

Linie beschreibt, wenn sie sich mit dem andern Endpunkte um einen Punkt vollständig herumdreht, d. h. so lange, bis sie ganz in die ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, mithin eine volle Umdrehung gemacht hat.

Die umgedrehte gerade Linie heisst bekanntlich der Radius oder Halbmesser des Kreises; das Bild des Weges aber, welchen der eine Endpunkt des Radius bei einer vollen Umdrehung um den andern Endpunkt gemacht hat, heisst die Peripherie oder der Umkreis der von derselben begränzten Kreisfläche. Ein Theil der Peripherie des Kreises wird ein Kreisbogen genannt, und die Grösse desselben durch das Verhältniss des Theils der Umdrehung, der er seine Entstehung verdankt, zu der vollen Umdrehung bestimmt. Der ganze Kreis ist daher als Bild einer vollen Umdrehung auch zugleich das Maass derselben, der Halbkreis das Maass einer halben, und der Kreisbogen als Theil des Kreises das Maass des seiner Grösse entsprechenden Theils der vollen Umdrehung. Dass es aber bei diesem Maasse nicht auf die Grösse der Radien ankomme, erhellet daraus, dass nicht die Länge des Bogens an sich, sondern nur sein Verhältniss zum ganzen Kreise die Grösse des Theils der Umdrehung bestimmt.

Ein Winkel ist also nichts anders als das Bild eines solchen Theils einer vollen Umdrehung; die Radien, durch deren Drehung er entstanden ist, und welche nun denselben begränzen, heissen die Schenkel, und der Mittelpunkt, um welchen der Theil der Umdrehung erfolgt ist, die Spitze oder der Scheitelpunkt des Winkels.

Ist nun ein Winkel das Bild des vierten Theils einer vollen Umdrehung, hat er folglich den vierten Theil eines Kreises zu seinem Maasse, so heisst er ein rechter; ist er kleiner, so wird er ein spitzer, und ist er grösser, ein stumpfer genannt. Vergrössert er sich aber so sehr, dass seine Schenkel gerade in entgegengesetzter Richtung stehen, also einer derselben auf der rückwärts gezogenen Verlängerung des andern Schenkels zu liegen kommt, mithin beide eine gerade Linie bilden, daher man ihn dann auch einen gestreckten Winkel nennt; so ist er das Bild einer halben Umdrehung, und hat folglich den Halbkreis zu seinem Maasse. Da nun der Durchmesser des Kreises nichts anders ist, als zwei Radien desselben, welche eine gerade Linie, oder jenen gestreckten Winkel bilden, so folgt von selbst, dass jeder Durchmesser die Peripherie in zwei gleiche Theile theilt.

Wird also ein Kreis von beliebiger Grösse in eine Zahl gleicher Theile getheilt, und der Mittelpunkt des Kreises auf die Spitze eines Winkels gelegt, so lässt sich durch die Zahl jener Theile, welche zwischen dessen Schenkel fallen, das Maass des Winkels, d. h. sein Verhältniss zur vollen Umdrehung, bestimmen. Die Zahl jener gleichen Theile ist willkührlich; bekanntlich hat aber, von den ältesten Zeiten an, die Eintheilung in 360 Theile oder Grade den Vorzug behauptet, weil dieselbe durch viele Zah-

len dividirt werden kann, ohne in die Quotienten unbequeme Brüche zu bringen. So enthält demnach der rechte Winkel oder $\frac{1}{4}$ Umdrehung 90°; $\frac{1}{5}$ derselben ist $=72°$; $\frac{1}{6}=60°$; $\frac{1}{8}=45°$; $\frac{1}{9}=40°$; $\frac{1}{10}=36°$; $\frac{1}{12}=30°$, u. s. w.

Aus den jetzt vorangeschickten Erläuterungen ergeben sich nun nachstehende Folgerungen:

§. 1. Jede volle Umdrehung einer geraden Linie um einen Punkt in einer Ebene ist $=4R$.

§. 2. In einer Ebene ist die Summe aller Winkel um eine gemeinschaftliche Spitze $=4R$.

Denn die gemeinschaftliche Spitze ist der Mittelpunkt eines Kreises, also des Maasses einer vollen Umdrehung.

§. 3. Alle Winkel über einer geraden Linie mit einer gemeinschaftlichen Spitze (Nebenwinkel) sind zusammen $=2R$.

Denn sie haben zu ihrem gemeinschaftlichen Maasse den Halbkreis, folglich $\frac{4R}{2}=2R$.

§. 4. Sind also zwei Winkel (α und β) einander gleich: so sind es auch ihre Supplementswinkel, d. h. diejenigen, welche mit ihnen über einer geraden Linie einen Schenkel und eine Spitze gemeinschaftlich haben.

Denn jeder der Supplementswinkel ist $=2R-\angle\alpha$ oder $-\angle\beta$. Ist also $\angle\alpha=\angle\beta$, so müssen auch die Reste gleich sein.

§. 5. Das Nämliche gilt für zwei spitze Winkel in Ansehung ihrer Complementswinkel, d. h. derjenigen, die mit ihnen zusammen $=1R$ sind.

§. 6. Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene einander schneiden, so sind von den vier dadurch entstehenden Winkeln die gegenüberstehenden (die Vertical-Winkel) einander gleich.

Der Beweis aus §. 3. ist bekannt.

§. 7. Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

Denn sollte noch eine andere Linie zwischen zwei Punkten eine gerade Linie sein, so müssten alle Elemente derselben nebst jenen zwei Punkten für das Auge in einen Punkt zusammen fallen können. Dann wäre sie aber keine zweite,

von der ersten verschiedene, sondern die nämliche Linie. Fallen aber nicht alle ihre Elemente nebst jenen zwei Punkten in einen einzigen Punkt zusammen, so ist sie zwar eine verschiedene, aber keine gerade. (Vergl. die Erklärungen oben).

§. 8. Folglich können zwei verschiedene gerade Linien nur in einem einzigen Punkte zusammenfallen oder sich schneiden.

Denn, hätten sie zwei Punkte gemeinschaftlich, so wären sie nach §. 7. entweder keine zwei verschiedene, oder keine gerade Linien.

§. 9. Zwei gerade Linien können keine Figur, d. h. keine überall begränzte Fläche, bilden.

Denn: liegen beide gerade Linien auf einander, so bilden sie nur eine einzige gerade Linie, also keine Figur. Dreht dagegen die eine sich um die gemeinschaftliche Spitze von der andern ab, so können beide nach §. 8. keine neue Verbindung haben, also nicht eine Fläche einschliessen. Der Bogen aber, den diese beschreibt, ist bloss das Maass des Winkels, aber keine Seite desselben; jedenfalls wäre er eine dritte Linie, und noch dazu keine gerade.

§. 10. Eine geradlinige Figur muss also wenigstens drei Seiten haben, oder wenigstens ein Dreieck sein.

§. 11. Zwei Kreise in einer Ebene schneiden sich über und unter der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, wenn diese Verbindungslinie 1) kleiner ist als die Summe ihrer Radien, aber zugleich 2) grösser als die Differenz derselben.

Obgleich der vollständige Beweis dieses Satzes keinesweges zu den leichteren in der Elementar-Geometrie gehört, so darf ich doch ihn hier übergehen, weil er die Summe der Dreieckswinkel durchaus nicht voraussetzt und schon von Andern geführt ist. Auch würde er, um ganz deutlich zu werden, zu viel Raum und mehrere Figuren erfordern. Nur die Bemerkung erlaube ich mir, dass die zweite Bedingung bei Kreisen von gleichen Radien von selbst wegfällt, weil die Differenz derselben $=0$ ist, folglich nur bei Kreisen von ungleichen Radien in Betracht kommt.

§. 12. Aus drei ungleichen geraden Linien kann also kein Dreieck entstehen, wenn nicht die Summe von je zwei Seiten grösser ist als die dritte.

Es sei nämlich von drei geraden Linien die eine $ab=4$, die andere $cd=2$ und die dritte $ef=1$; so ist es unmöglich daraus ein Dreieck zu bilden. Denn, nimmt man $ab=4$ zur Grundlinie, so können cd und ef einander nicht einmal erreichen, also viel weniger schneiden, weil die Summe der Radien $=2+1$ kleiner ist als die Verbindungslinie der Mittelpunkte ihrer Kreise, nämlich die Linie $ab=4$. Will man aber $cd=2$ zur Grundlinie nehmen, so ist zwar $ab+ef$, nämlich $4+1$,

grösser als die Verbindungslinie $dc=2$; aber dc ist auch grösser als die Differenz von $ab-ef=1$, folglich kann ebenfalls kein Durchschnittspunkt entstehen, weil der Kreis von ab den Kreis von ef umgiebt ohne ihn zu schneiden. Mithin kann auch in diesem Falle kein Zusammenstossen der beiden Linien in einem gemeinschaftlichen Punkte stattfinden, also auch die Figur nicht geschlossen werden.

§. 13. Daraus folgt von selbst, dass in jedem geradlinigen Dreiecke die Summe von je zwei Seiten grösser ist als die dritte.

§. 14. Die gerade Linie ist die kürzeste zwischen zwei Punkten.

Denn, zieht man zwischen zwei Punkten a und b eine gerade und eine krumme Linie; so können die Elemente der krummen Linie nicht in allen übrigen Punkten mit der geraden Linie zusammenfallen, denn sonst wäre auch sie eine gerade Linie. Es müssen folglich in ihr sich Punkte finden, welche ausserhalb der geraden Linie liegen. Werden nun diese durch gerade Linien mit den Punkten a und b verbunden, so ist ihre Summe nach §. 13. allemal grösser als die gerade Linie, welche die Grundlinie dieser Dreiecke bildet.

---

§. 15. Schon jetzt lässt sich nach Professor Thibaut's Vorgange der Satz streng beweisen, dass die Summe aller Winkel eines jeden geradlinigen Dreiecks $=2R$ ist. (Taf. XI. Fig. 1.)

Beweis I. Man verlängere die drei Seiten des Dreiecks abc, und lege auf die verlängerte Grundlinie ab eine andere ihr gleiche gerade Linie, welche hier als ein Pfeil dargestellt ist, um die beiden Endpunkte derselben zur Erkennung der vollen Umdrehung unterscheiden zu können. Schiebt man nun diesen Pfeil auf der verlängerten Grundlinie ad so weit fort, bis das hintere Ende desselben auf b liegt, so hat er bei dieser Bewegung unstreitig keinerlei Drehung erlitten, denn er deckt nach wie vor die nämliche in gerader Richtung verlängerte Grundlinie. Wird nun der Pfeil um den Punkt b so weit gedreht, dass er auf der Seite bc liegt, so ist der Winkel δ die erste Drehung desselben. Wird er alsdann auf der verlängerten geraden Linie be fortgeschoben, bis sein hinteres Ende auf dem Punkte c liegt, so hat er durch diese Bewegung ebenfalls keine Drehung erfahren. Diese zweite Drehung erfolgt vielmehr erst, wenn er sich jetzt um den Punkt c so weit herumbewegt, dass er auf der Dreiecksseite ac liegt, nachdem er den zweiten Drehungswinkel ε gebildet hat. Endlich rückt er auch auf der verlängerten geraden Linie af fort, bis sein hinteres Ende auf dem Punkte a angekommen ist, und wird nun durch die dritte Drehung um den

Winkel ζ wieder völlig in seine vorige Lage gebracht, welches beweist, dass er eine ganze oder volle Umdrehung gemacht hat. Da diese nun einzig und allein durch die Drehung in den Winkeln δ, ε und ζ bewirkt worden ist, so muss die Summe ihrer Drehungen einer vollen Umdrehung gleich sein. Also ist die Summe von $\angle\delta+\angle\varepsilon+\angle\zeta=4R$.

Wollte jedoch Jemand dagegen einwenden, die Umdrehung sei keine volle, weil sie nicht durchgängig in dem nämlichen Punkte der Ebene vorgegangen ist, obgleich es doch bei dem Anfangs- und Endpunkte der Drehung wirklich geschah, so muss dieser auch noch weit mehr alle Rotation der Himmelskörper leugnen; denn Keiner derselben vollendet seine Rotation an dem nämlichen Punkte des Raumes, sondern während einer Bewegung von vielen tausend Meilen, und die Trabanten sogar während einer zwiefachen Bewegung.

II. Nun ist aber (nach §. 3.)

$$\angle\beta+\angle\delta=2R;\ \angle\gamma+\angle\varepsilon=2R;\ \angle\alpha+\angle\zeta=2R.$$

Also

$$\angle\beta+\angle\gamma+\angle\alpha+\angle\delta+\angle\varepsilon+\angle\zeta=6R.$$

Da nun nach I. $\quad\ldots\ldots\angle\delta+\angle\varepsilon+\angle\zeta=4R$

So ist $\quad\angle\beta+\angle\gamma+\angle\alpha=2R.$

§. 16. Daraus ergeben sich unmittelbar folgende Sätze für jedes geradlinige Dreieck:

a) Der rechte Winkel ist grösser als jeder der beiden andern.

b) Es ist nur ein rechter oder stumpfer Winkel darin möglich.

c) Zwei gerade Linien, welche senkrecht auf einer dritten stehen, können sich niemals schneiden.

Denn, könnten sie sich schneiden, so würden sie ein Dreieck bilden. Dann enthielte aber die Summe der Winkel dieses Dreiecks mehr als $2R$, im Widerspruch gegen §. 15.

Anmerkung. Hier ist also schon der Beweis für die euklidische Definition der Parallelen geführt, aber freilich nicht für den gleichen Abstand.

d) Wenn eine Seite verlängert wird, so ist der dadurch entstehende äussere Winkel gleich der Summe der beiden gegenüberstehenden.

Denn, ist der äussere Winkel $=\alpha$, sein Nebenwinkel im Dreieck $=\beta$, die beiden gegenüberstehenden $=\gamma$ und δ; so ist $\angle\alpha+\beta=2R$ (§. 3.) und $\angle\beta+\gamma+\delta=2R$ (§. 15.); also ist $\angle\alpha+\beta=\angle\beta+\gamma+\delta$; folglich $\angle\alpha=\gamma+\delta$.

§. 17. Die folgenden Sätze von der Congruenz der Dreiecke und einige andere sind freilich unentbehrlich; aber sie bedürfen hier keiner Beweise, weil diese sämmtlich von der Summe der Dreieckswinkel unabhängig und bekannt genug sind. Es sind folgende:

a) Wenn alle drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten eines anderen gleich sind, so decken sie einander, folglich auch die Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberstehen.

b) Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in einem Dreiecke den nämlichen Stücken in einem anderen gleich sind; woraus folgt, dass gleiche Bogen gleiche Sehnen haben.

c) Auch, wenn zwei Seiten und ein anliegender Winkel den nämlichen Stücken in einem anderen Dreiecke gleich sind; aber nur unter der Bedingung, dass die jenem Winkel gegenüberstehende Seite grösser ist als die anliegende.

d) Wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel in zwei Dreiecken gleich sind.

e) Also auch, wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken eine Cathete und der anliegende spitze Winkel gleich sind; denn dann ist der rechte Winkel der zweite anliegende.

f) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; und, eine aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks gefällte Verticale halbirt die Grundlinie desselben.

g) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so ist es gleichschenklich, d. h. die gegenüberstehenden Seiten sind einander gleich.

§. 18. In jedem geradlinigen Dreieck steht I. der grösseren Seite der grössere Winkel, und umgekehrt II. dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber. (Taf. XI. Fig. 2.)

Beweis von I.

$ab > bc$ (ex hyp.), folglich kann $bc = bd$ von ab abgenommen werden. Zieht man nun cd, so ist $\angle\alpha = \angle\beta$ (§. 17. f)) Aber $\angle\alpha = \angle\gamma + \delta$ (§. 16. d)); also ist auch $\angle\beta = \angle\gamma + \delta$; folglich $\angle\beta + \delta = \angle\gamma + 2\delta$, mithin $\angle\beta + \delta$ oder $\angle acb$ grösser als $\angle\gamma$.

Beweis von II.

$\angle acb > \angle\gamma$ (ex hyp.), also kann der $\angle\delta = \gamma$ wom $\angle acb$ abgenommen werden. Dann ist aber $ad = cd$ (§. 17. g)); also $ad + db = cd + db$. Da nun $cd + db$ grösser als cb (§. 13.); so ist auch $ad + db$ oder ab grösser als cb.

§. 19. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse grösser als jede der Catheten.

Denn der rechte Winkel ist grösser als jeder der übrigen (§. 16. a)), also die gegenüberstehende Seite, die Hypotenuse, grösser als jede andere (§. 18. 1.).

§. 20. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn I. die Hypotenuse und ein spitzer Winkel, dessgleichen II. die Hypotenuse und eine Cathete in dem einen Dreiecke den nämlichen Stücken in dem andern gleich sind.

Denn in dem ersten Falle sind auch die beiden anderen als Complementswinkel zu dem zweiten rechten Winkel des Dreiecks einander gleich (§. 15. und §. 5.), folglich gilt §. 17. d).

Im zweiten Falle aber ist die Hypotenuse grösser als jede Cathete (§. 19.), folglich sind die Dreiecke congruent nach §. 17. c).

§, 21. Die Verticale ist die kürzeste aller Linien zwischen einem Punkte und einer geraden Linie, folglich das Maass seines Abstands von derselben.

Denn alle übrigen sind Hypotenusen, folglich länger als die verticale Cathete (§. 19.).

§. 22. In jedem geradlinigen Vierecke ist die Summe aller Winkel $=4R$.

Denn, zieht man eine Diagonale, so erhält man zwei Dreiecke. Nun ist in jedem die Summe der Winkel $=2R$, also in beiden zusammen $=4R$.

§. 23. Ist also in einem geradlinigen Vierecke die Summe zweier Winkel $=2R$, so ist die Summe der beiden anderen ebenfalls $=2R$, und, sind diese beiden einander gleich, so ist jeder derselben $=1R$.

Jetzt sind alle Vorbedingungen vorhanden, deren es bedarf, um zum Endziele zu gelangen, d. h. den überall gleichen Abstand der geraden Parallelen, und die Gleichheit ihrer Wechselswinkel nach der euklidischen Methode durch die Gleichheit der Dreiecke zu beweisen.

§. 24. Wenn in einer Ebene zwei gerade Verticalen auf einer dritten geraden Linie stehen, so sind sie parallel, d. h. sie haben überall gleichen Abstand. (Taf. XI. Fig. 3.)

Hypothesis: $\angle bax = \angle aby = R$

Thesis: $ax \# by$.

Beweis.

Man mache in beliebiger Entfernung von a und b die Linie $ac=bd$, und ziehe cd nebst den Diagonalen ad und bc, so ist:

I. $ab=ab$; $\angle bac=\angle abd=R$ (ex hyp.); $bc=ad$ (ex constr.).

Also $\Delta abc \cong \Delta abd$ (§. 17. b));

folglich $bc=ad$; $\angle\beta=\alpha$; $\angle\varepsilon=\zeta$; und $\angle\gamma=\delta$ als Complementswinkel (§. 5.).

II. $cd=cd$; $ac=bd$ (ex constr.) $ad=bc$ (I.)

Also $\Delta cda \cong \Delta cdb$ (§. 17. a));

folglich $\angle\vartheta=\angle\eta$; und da $\angle\zeta=\varepsilon$ (I.); so ist

$$\angle\vartheta+\zeta=\angle\eta+\varepsilon.$$

Da nun

$$\angle bax=\angle aby=R \text{ (ex hyp.)}$$

so ist

$$\angle\vartheta+\zeta=\angle\eta+\varepsilon=\frac{2R}{2}=1R \text{ (§. 23.)}$$

III. $bd=bd$; $ad=bc$ (I.); $\angle abd=\angle bdc=R$ (II.).

Also $\Delta bda \cong \Delta bdc$ (§. 20. II.);

folglich $cd=ab$; und da $\angle abd=R$ (ex hyp.) und $\angle bdc=R$ nach II., so ist der Abstand cd = Abstand ab (§. 21.).

IV. Da endlich ac, bd beliebige Entfernungen sind, so gilt das Bewiesene für **jede Entfernung** von ab; also ist $ax \# by$.

§. 24. Wenn von zwei geraden Linien in einer Ebene **jede von einer dritten geraden Linie vertical geschnitten** werden, so sind sie parallel.

Denn, verlängert man in der vorigen Figur die Linien ax, by unterhalb der Linie vw, so wird diese die schneidende Linie, und da unterhalb derselben eben sowohl rechte Winkel sind als oberhalb nach §. 3., so muss hier das Nämliche gelten, was oberhalb bewiesen ist.

§. 25. Wenn von zwei geraden Parallelen **die eine** durch eine dritte gerade Linie **vertical geschnitten** wird, so geschieht das **Nämliche auch bei der andern.** (Taf. XI. Fig. 4.)

$$\begin{array}{rl} \text{Hypoth. 1)} & uv \# wx \\ \text{2)} & \angle bay = R. \\ \hline \text{Thes.} & \angle dca = R. \end{array}$$

Beweis.

Man errichte in beliebiger Entfernung, z. B. in b, die Verticale bd, so ist sie als Abstandslinie $= ac$ (§. 23.). Also:

$$\begin{array}{c} \text{I. } ab = ab;\ ac = bd;\ \angle bac = \angle abd = R \text{ (ex hyp. et constr.)} \\ \hline \text{Also } \Delta\, abc \cong \Delta\, abd \text{ (§. 17. b));} \end{array}$$

folglich $bc = ad$ und $\angle \gamma = \angle \delta$.

$$\begin{array}{c} \text{II. } cd = cd;\ ac = bd \text{ (I.)};\ ad = bc \text{ (I.)} \\ \hline \text{Also } \Delta\, cda \cong \Delta\, cdb \text{ (§. 17. a));} \end{array}$$

folglich $\angle \vartheta = \eta$.

III. Da nun auch $\angle \delta = \gamma$ (I.); so ist

$$\angle \vartheta + \delta = \angle \eta + \gamma = \frac{2R}{2} = 1R,$$

oder $\angle dca = R$.

§. 26. Wenn **zwei gerade Parallelen** in einer Ebene von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind die **Wechselswinkel einander gleich.** (Taf. XI. Fig. 5.).

$$\begin{array}{c} \text{Hypoth. } uv \# wx \\ \hline \text{Thes. } \angle \alpha = \angle \beta. \end{array}$$

Beweis.

Man fälle aus a und d Verticalen auf die gegenüberstehende Parallel-Linie, so ist:

$$\begin{array}{c} ad = ad;\ ac = db \text{ (ex hyp. und §. 25.)};\ \angle \delta = \angle \gamma = R \text{ (ex constr.)} \\ \hline \text{Also } \Delta\, adc \cong \Delta\, adb \text{ (§. 20. II.);} \end{array}$$

folglich $\angle \alpha = \angle \beta$.

§. 27. **Wenn bei zwei in einer Ebene liegenden geraden Linien, welche von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, die Wechselswinkel gleich sind, so sind die Linien parallel.**

Hypoth. $\angle\alpha = \beta$; Thesis $uv \# wx$.

Beweis.

Ist Figur und Construction eben wie oben, so ist:

I. $ad = ad$; $\angle\alpha = \angle\beta$ (ex hyp.); $\angle\gamma = \angle\delta$ (ex constr.)

Also $\Delta\, adb \cong \Delta\, adc$ (§. 20. I.);

folglich $bd = ac$ und $\angle\zeta = \varepsilon$.

II. $\angle\alpha = \beta$ (ex hyp.); und $\angle\varepsilon = \zeta$ (I.), folglich

$$\angle\alpha + \angle\varepsilon = \angle\beta + \angle\zeta = \frac{2R}{2} = 1R \text{ (§. 22. u. §.23.)},$$

also Verticale ac = Verticale bd; mithin $av \# wx$ (§. 24.).

§. 28. Die übrigen Sätze, nämlich, dass bei geraden Parallelen, die von einer geraden Linie durchschnitten werden, der innere Winkel dem an der nämlichen Seite gegenüberstehenden gleich ist, und dass die Summe der beiden inneren Winkel 180° beträgt, nebst deren Gegensätzen, sind nun, durch Hülfe der Vertical- und Neben-Winkel, auf die gewöhnliche Weise so leicht zu beweisen, dass eine nähere Entwickelung dieser Beweise völlig überflüssig scheint.

XVIII.
Ueber die geometrische Konstruktion der imaginären Wurzeln einer Gleichung.

Von
Herrn H. Scheffler,
Bau-Conducteur bei den Herzogl. Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Das gewöhnliche Verfahren der Aufsuchung der Wurzeln einer numerischen Gleichung mittelst geometrischer Konstruktion, wobei man die Uebekannte x wie eine veränderliche Abszisse und den Werth der gegebenen Funktion für jedes zugehörige x wie eine korrespondirende rechtwinklige Ordinate behandelt, und die Abszissen sucht, für welche die durch die Endpunkte der Ordinaten gelegte Kurve die Abszissenlinie durchschneidet, ist nur brauchbar, um die reellen Wurzeln einer solchen Gleichung zu finden.

Wenn aber die Gleichung

$$F(x)=0 \text{ ...... } (1)$$

auch imaginäre Wurzeln von der Form

$$x=re^{\varphi\sqrt{-1}}=r\,(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}), \text{ ...... } (2)$$

welches überhaupt die allgemeinere Zahlform ist, in der auch die reellen Werthe enthalten sind, besitzt; so geht dieselbe durch Substitution des vorstehenden Ausdrucks für x über in

$$F(re^{\varphi\sqrt{-1}})=F[r(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})]=0 \text{ ..... } (3)$$

Hierdurch erhält man eine Gleichung zwischen **zwei** von einander ganz unabhängigen Grössen r und φ. Die Letzteren sind aber wegen Gleichung (2) an die Bedingung geknüpft, dass r stets einen absoluten oder positiv reellen und φ irgend einen positiven oder negativen, aber ebenfalls durchaus reellen Werth habe. Man ist also jetzt in den Stand gesetzt, die Untersuchung bloss auf reelle Grössen zu beschränken, welche der Gleichung (3) ein Genüge leisten. Ohne die genannte Bedingung würde die Gleichung (3) den Charakter der Unbestimmtheit annehmen; man könnte dann z. B. für φ jeden beliebigen Werth setzen, um durch Auflösung für r einen dazu gehörigen Werth der letzteren Grösse zu finden. Dies würde dem Falle entsprechen, dass man in Gleichung (1) für x einen Ausdruck von der Form

$$x=(pe^{\alpha\sqrt{-1}})(qe^{\beta\sqrt{-1}})$$

substituirt hätte, der aus zwei Faktoren von allgemeiner Form bestände, und wovon der erste $pe^{\alpha\sqrt{-1}}$ den obigen Faktor r und der zweite $qe^{\beta\sqrt{-1}}$ den obigen Faktor $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ in Gleichung (2) verträte. Abgesehen davon, dass hierdurch das Problem nicht vereinfacht wäre, indem man durch die Einführung beliebiger reeller oder imaginärer Werthe für φ in Gleichung (3), wodurch

$$\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}=e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

die Form $qe^{\beta\sqrt{-1}}$ annähme, immer wieder auf eine Gleichung kommen würde, die im Allgemeinen für r imaginäre Wurzeln von der Form $pe^{\alpha\sqrt{-1}}$ enthielte; so ist doch zu bemerken, dass die unter solchen Umständen existirende Unbestimmtheit der Gleichung (3) sich nur auf die Werthe von φ und r, nicht aber auf die daraus zusammengesetzten Werthe von $x=re^{\varphi\sqrt{-1}}$, also auch nicht auf die Auflösungen der gegebenen Gleichung (1) überträgt. Denn wenn irgend ein Werth non φ die Grösse

$$\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}=e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

in die Form $qe^{\beta\sqrt{-1}}$ überführt, und $r=pe^{\alpha\sqrt{-1}}$ ein Werth ist, welcher sich für jenes φ aus Gleichung (3) ergibt, so hat man

$$x=pe^{\alpha\sqrt{-1}}.\,qe^{\beta\sqrt{-1}}=(pq)e^{(\alpha+\beta)\sqrt{-1}}$$
$$=(pq)\left[\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta).\sqrt{-1}\right],$$

worin nun (pq) und $(\alpha+\beta)$ reelle Grössen sind. Beschränkt man sich also auf die obige Bedingung, dass in Gleichung (3) r und φ nur reelle Werthe haben sollen; so würde man eben dieselbe vorstehende Auflösung für x erhalten müssen, wenn man in Gleichung (3) $\varphi=(\alpha+\beta)$ gesetzt hätte, was dann für r den Werth (pq) geben müsste.

Scheinbar bleibt aber selbst unter Beobachtung der genannten Bedingung, welche ja die Werthe von φ und r nur in die weiten Gränzen unendlicher Zahlenreihen einschliesst, für die Gleichung (3) noch ein grosser Spielraum der Unbestimmtheit. Dass dies jedoch nur scheinbar ist, leuchtet ein, wenn man die Funktion F in jener Gleichung so entwickelt, dass das Reelle von dem rein Imaginären sich sondert. Angenommen dies gebe

$$F'(r,\varphi)+F''(r,\varphi).\sqrt{-1}=0 \ldots\ldots (4)$$

Da diese Gleichung nur realisirt werden kann, wenn der reelle und der imaginäre Theil für sich gleich Null wird; so zerfällt dieselbe in folgende zwei Gleichungen:

$$F'(r,\varphi)=0 \ldots\ldots (5)$$

$$F''(r,\varphi)=0 \ldots\ldots (6)$$

Jetzt hat man zwischen den beiden Unbekannten r und φ zwei Gleichungen; die Unbestimmtheit ist also verschwunden, oder bezieht sich vielmehr nur noch auf die Vielheit der Wurzeln, welche einem jeden Systeme von zwei höheren Gleichungen mit zwei Unbekannten nach dem besonderen Charakter jener Gleichungen eigen ist.

Wollte man behufs geometrischer Konstruktion der Wurzeln dieser Gleichungen sich in der gewöhnlichen Weise eines rechtwinkligen Koordinatensystems bedienen; so könnte man folgendermaassen verfahren.

Man substituirte sowohl in (5), wie in (6), für φ einen bestimmten Zahlwerth φ_1 und behandelte bloss r als einzige Veränderliche, welche unter den absoluten oder positiven Zahlen von 0 bis $+\infty$ zu variiren wäre. Diese Werthe von r trüge man von demselben Mittelpunkte aus auf Ein und derselben Axe als Abszissen auf. Die entsprechenden Werthe von $F'(r,\varphi_1)$, als rechtwinklige Ordinaten behandelt, ergäben alsdann Eine Kurve und die von $F''(r,\varphi_1)$ eine zweite Kurve über derselben Axe. Angenommen, diese beiden Kurven durchschneiden sich in einem Punkte A_1. Für einen möglichst benachbarten Werth von φ, der φ_2 heisse, würde sich dann durch $F'(r,\varphi_2)$ und $F''(r,\varphi_2)$ über derselben Axe ein zweites System von zwei Kurven ergeben, welches sich in dem Punkte A_2 schneiden möge. Auf diese Weise liesse man φ in der Reihe von 0 bis $+\infty$ und von 0 bis $-\infty$ variiren. Die genannten Durchschnittspunkte A_1, A_2... der aus je zwei Kurven bestehenden Systeme würden sich dann durch eine neue Kurve verbinden lassen. Der Durchschnittspunkt dieser neuen Kurve mit der Abszissenaxe lieferte alsdann eine Abszisse, welche für r genommen, den fraglichen Gleichungen ein Genüge leistete.

Dieses Verfahren ist nicht allein wegen der erforderlichen Zerlegung der gegebenen Gleichung (3) in zwei Theile F' und F''

und der Berechnung der genannten Doppelkurven sehr umständlich, sondern auch deshalb unvollkommen, weil sich vermittelst desselben nur der Werth von r, nicht aber der des dazu gehörigen Winkels φ und überhaupt nicht unmittelbar die gesuchte Grösse x graphisch darstellt, wie es von der geometrischen Darstellung des in der gegebenen Gleichung liegenden Gesetzes gefordert werden muss.

Besser im Geiste der geometrischen Konstruktion liegt folgende Methode. Nachdem man einen Nullpunkt und eine reelle Axe festgelegt hat, stellt man sofort den Werth von $F(x)$ aus Gleichung (1) für irgend ein x dar, indem man als x eine Linie von bestimmter Länge r wählt, die sich unter irgend einem Winkel φ gegen den positiven Theil der reellen Axe neigt, also eine Linie von der Form

$$x = re^{\varphi\sqrt{-1}} = r\cos\varphi + r\sin\varphi.\sqrt{-1}.$$

Die positiven Werthe von φ werden links um den Nullpunkt, die negativen rechts herum gerechnet. Bei dieser Darstellung von $F(x)$ führt man schrittweise die darin vorkommenden Operationen aus, indem man mit möglichster Vermeidung der Rechnung namentlich die Neigungen der einzelnen Theile dieser Funktion und die Zusammensetzung derselben unmittelbar durch Zeichnung darstellt. Es bleiben dann in der Regel, wenn die Funktion F nicht zu komplizirt ist, nur die absoluten Längen der einzelnen Strahlen zu berechnen. Diese Längen sind meistens unabhängig von dem Winkel φ, und dies gewährt den Vortheil, dass wenn man einmal für eine Reihe benachbarter Werthe von r, die in der Zahlenreihe von 0 bis $+\infty$ liegen, jene Längen berechnet hat, man dieselben Längen für jeden beliebigen anderen Werth des Winkels φ gebrauchen kann.

Die Grundregeln bei dieser Konstruktion sind:

a) für die Addition, dass an den Endpunkt des Einen Strahls der hinzu zu addirende in der ihm zukommenden Richtung gelegt werde;

b) für die Subtraktion, dass an den Endpunkt des Minuend der Subtrahend in der ihm direkt entgegengesetzten Richtung getragen werde;

c) für die Multiplikation, dass die absolute Quantität des Produktes durch Multiplikation der absoluten Quantitäten der Faktoren, die Neigung des Produktes jedoch durch Vorwärtsdrehung aus der Richtung des Einen Faktors um den Drehungswinkel des andern Faktors erhalten werde;

d) für die Division, dass die absolute Quantität des Quotienten durch Division der absoluten Quantitäten des Dividends und Divisors, die Neigung des Quotienten jedoch durch Rückwärtsdrehung aus der Richtung des Dividends um den Drehungswinkel des Divisors entstehe;

e) für die **Potenzirung** zu einem positiven ganzen Exponenten n, dass die absolute Quantität der Potenz gleich derselben Potenz von der absoluten Quantität des Grundfaktors, dagegen der Drehungswinkel jener Potenz gleich dem $n$fachen des Drehungswinkels des Grundfaktors sei;

f) für die **Wurzelausziehung** zu einem positiven ganzen Exponenten n, dass die Quantität der Wurzel gleich der $n$ten Wurzel aus der Quantität der gegebenen Grösse, dagegen der Drehungswinkel gleich dem $n$ten Theile des Drehungswinkels diesser Grösse sei.

Nach der Regel (*c*) ist auch Multiplikation einer Grösse mit den Faktoren

$$-1,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$$

oder mit

$$e^{\pi\sqrt{-1}},\ e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}},\ e^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

gleichbedeutend mit einer Vorwärtsdrehung respect. um 180°, 90°, 270°.

Hierdurch ergibt sich durch die obige Konstruktion ein Polygon, welches vom Nullpunkte ausläuft, und welches mit dem letzten Endpunkte wieder in diesen Nullpunkt einfallen muss, wenn der angenommene Werth von x eine Auflösung der Gleichung (1) sein soll.

Damit man dieses Verfahren ausführen könne, muss die Funktion F in solche Theile zerlegt sein, auf welche sich die Regeln (*a*) bis (*f*) zur Erzeugung der auf einander folgenden Seiten des fraglichen Polygons unmittelbar in Anwendung bringen lassen. Hätte man z. B.

$$F(x) = Ax^3 - \sqrt{cx} + \log x = 0,$$

worin der Koeffizient A irgend eine geneigte Linie von der allgemeinen Form

$$ae^{\alpha\sqrt{-1}} = a\cos\alpha + a\sin\alpha . \sqrt{-1},$$

dagegen c nur eine absolute Zahl darstellen möge, also

$$F(x) = ae^{\alpha\sqrt{-1}}x^3 - \sqrt{cx} + \log x = 0,$$

so müsste, wenn man nun für x den allgemeinen Werth

$$x = re^{\varphi\sqrt{-1}} = r\cos\varphi + r\sin\varphi . \sqrt{-1}$$

einführen wollte, das Glied

$$\log x = \log[r(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})]$$

in die bekannte Form

$$\log r + \varphi\sqrt{-1}$$

gebracht werden. Dies gibt

$$ae^{\alpha\sqrt{-1}}.r^3e^{3\varphi\sqrt{-1}} - \sqrt{cr}.e^{\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}} + \log r + \varphi\sqrt{-1} = 0,$$

oder

$$ar^3.e^{(\alpha+3\varphi)\sqrt{-1}} - \sqrt{cr}.e^{\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}} + \log r + \varphi\sqrt{-1} = 0.$$

Wenn man in allen Gliedern, von denen jedes eine Seite des Polygons ergibt, die Richtungskoeffizienten deutlicher als Potenzen von e markiren und ausserdem die Funktion auf der linken Seite so darstellen will, dass die einzelnen Theile überall als Summanden erscheinen; so kann man auch schreiben

$$ar^3.e^{(\alpha+3\varphi)\sqrt{-1}} + \sqrt{cr}.e^{(\pi+\frac{\varphi}{2})\sqrt{-1}} + \log r.e^{0\sqrt{-1}} + \varphi.e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = 0.$$

Die absoluten Längen ar^3, $\sqrt{cr}$, $\log r$ der ersten drei Glieder sind unabhängig von jedem Werthe, den man für φ einführen möge; nur der des letzten Gliedes ändert sich mit φ. Nachdem also die ersteren drei für irgend eine Reihe von Werthen für r berechnet sind, kann man sich derselben für jeden beliebigen Werth von φ bedienen.

Ferner erhellet, dass die Richtungen der sich durch diese Gleichung ergebenden vier Polygonalseiten unabhängig sind von der Länge r der für x angenommenen Linie, dass also, wenn man das fragliche Polygon erst einmal für einen bestimmten Werth von r und φ entworfen hat, die Seiten aller Polygone, für welche man bloss r in der gedachten Zahlenreihe variiren lässt und φ konstant erhält, den Seiten des ersten Polygons parallel sein werden.

Gibt man nun in $F(x)$ der Grösse x irgend einen bestimmten Neigungswinkel φ_1 und lässt dann deren absolute Länge r von 0 bis $+\infty$ variiren; so beschreibt der zweite Endpunkt des fraglichen Polygons eine Kurve, welche durch den Nullpunkt gehen muss, wenn es für φ_1 ein zugehöriges r_1 geben soll, welches in der Form $r_1e^{\varphi_1\sqrt{-1}} = x_1$ der gegebenen Gleichung ein Genüge leistet. Gibt man jetzt dem Winkel φ einen zweiten Werth φ_2 und lässt die Länge r durch eben dieselbe frühere Zahlenreihe variiren; so beschreibt der letzte Endpunkt des Polygons eine zweite Kurve. φ_3, φ_4, φ_5.... ergibt eine dritte, vierte, fünfte .... Kurve. Diese Werthe von φ müssen nun allmählig sowohl die Reihe der positiven, wie der negativen Zahlen, also die Reihe

$$-\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +\infty$$

durchlaufen, um alle möglichen Kurven zu ergeben, welche der fragliche Endpunkt des Polygons beschreiben kann.

Statt dass man φ in dieser Weise über jede Gränze hinaus wachsen lässt, kann man auch, indem man in die gegebene Gleichung statt φ den Ausdruck $2k\pi+\varphi$ schreibt, worin k eine willkührliche, aber positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, erst überall $k=0$ setzen und nun erst φ von 0 bis 2π variiren lassen, dann $k=1$ setzen und hierauf φ ebenfalls nur von 0 bis 2π variiren lassen u. s. f.

Ob es nöthig sei, dass man den Winkel φ in vorstehender Weise ins Unendliche wachsen lasse, um alle denkbaren Kurven der genannten Art zu erhalten, oder ob sich für gewisse Perioden der Werthe von φ immer wieder dieselben früheren Kurven wiederholen müssen, in welchem Falle man dann den Winkel φ nur zwischen den Gränzen Einer solchen Periode zu variiren brauchte, hängt von der Beschaffenheit der Funktion F ab.

Man erkennt, dass in dem obigen für $F(x)$ gewählten Beispiele das erste Glied

$$ar^3 . e^{(\alpha+3\varphi)\sqrt{-1}} = Ax^3$$

seine Fundamentalwerthe regelmässig wiederholt, sobald man φ von 0 bis 2π hat wachsen lassen und nun über 2π hinausgeht, indem $e^{(\alpha+3(2k\pi+\varphi))\sqrt{-1}}$ denselben Neigungswinkel darstellt, wie $e^{(\alpha+3\varphi)\sqrt{-1}}$. Ferner erkennt man, dass in dieser Periode auch alle diejenigen Werthe vorkommen, welche Ax^3 für irgend ein negatives φ annehmen kann, indem $e^{(\alpha-3(2k\pi+3\varphi))\sqrt{-1}}$ denselben Neigungswinkel darstellt, wie $e^{(\alpha+3(2\pi-\varphi))\sqrt{-1}}$. Dieses ersten Gliedes wegen brauchte man man also φ nur von 0 bis 2π wachsen zu lassen.

Die Werthe des zweiten Gliedes

$$\sqrt{cr} . e^{(\pi+\frac{\varphi}{2})\sqrt{-1}} = -\sqrt{cx}$$

kehren jedoch erst dann regelmässig wieder, wenn φ von 0 bis 4π gewachsen ist. Alsdann sind aber auch alle diejenigen Werthe vorgekommen, welche sich für negative φ einstellen würden. Wegen dieses zweiten Gliedes ist also eine Variation von φ zwischen den Gränzen 0 und 4π erforderlich.

Das Glied $\log r$ ist für alle Werthe von φ dasselbe und erfordert demnach gar keine Variation dieses Winkels.

Das letzte Glied

$$\varphi . e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

ändert seinen Werth mit jeder Variation von φ, ist auch ein anderes für $-\varphi$, als für $+\varphi$. Da dasselbe jedoch einen konstanten Richtungskoeffizienten, also eine konstante Neigung gegen die reelle Axe besitzt, und ausserdem mit φ gleichförmig wächst; so wird man sehr bald erkennen, ob und wie weit es erforderlich ist, dieses letzteren Gliedes wegen die Variationen von φ auszudehnen, indem man immer vor Augen hat, dass die zu konstruirenden Kurven dem Nullpunkte sich nähern und nicht denselben fliehen sollen.

Nach diesen Vorbetrachtungen schlägt man nun folgendes systematische Verfahren ein.

Nachdem man den Nullpunkt O und die positive reelle Axe OX (Taf. XI. Fig. 6.) festgelegt hat, gibt man in Gleichung (3) dem Winkel φ irgend einen bestimmten Werth φ_1, womit man die Variationen von φ beginnen will, und zieht durch O die Linie OD_1, welche sich unter diesem Winkel $D_1OX=\varphi_1$ gegen die Axe OX neigt. Indem man nun vorläufig $\varphi=\varphi_1$ konstant erhält, lässt man die absolute Länge r der Unbekannten x von 0 gegen $+\infty$ variiren. Für irgend einen solchen Werth r'_1 von r möge nun die Konstruktion der Funktion $F(r'_1e^{\varphi_1\sqrt{-1}})$ das im Nullpunkte O anhebende Polygon $OA'_1B'_1C'_1$ ergeben, dessen letzter Endpunkt C'_1 sei. Jetzt ziehe man noch durch den Punkt C'_1 mit OD_1 parallel die Linie $C'_1D'_1$ und mache deren Länge $=r'_1$.

Für einen zweiten Werth r''_1 von r sei bei demselben Werthe von φ das durch $F(r''_1e^{\varphi_1\sqrt{-1}})$ sich ergebende Polygon dargestellt durch $OA''_1B''_1C''_1$, und es sei wieder $C''_1D''_1$ parallel genommen zu derselben Linie OD_1 und an Länge gleich r''_1 gemacht.

In ähnlicher Weise mögen als Endpunkte der Polygone für den konstanten Winkel φ_1 resp. für $r=r'_1$, r''_1, r'''_1.... die Punkte C'_1, C''_1, C'''_1..... und in paralleler Hinausrückung über diese Punkte die Punkte D'_1, D''_1, D'''_1.... entstehen, wobei die Linien

$$C'_1D'_1,\ C''_1D''_1,\ C'''_1D'''_1 \ldots \text{ resp. } = r'_1,\ r''_1,\ r'''_1 \ldots$$

und sämmtlich parallel zu OD_1 sind.

Die Variationen von r für den Werth $\varphi=\varphi_1$ dehnt man aber bloss so weit aus, dass einige der Punkte C'_1, C''_1, C'''_1.... diesseit und einige derselben jenseit der Linie OD_1 zu liegen kommen.

Hierauf verbindet man sowohl die Punkte C'_1, C''_1, C'''_1.... wie auch die Punkte D'_1, D''_1, D'''_1.... durch Kurven, von denen die erstere die Linie OD_1 in dem Punkte C_1 und die letztere diese Linie OD_1 in dem Punkte D_1 durchschneiden möge.

Jetzt setzt man für φ einen zweiten Werth φ_2 und legt die Linie OD_2 unter dem Neigungswinkel φ_2 gegen die Axe OX. Ebenso, wie vorhin für $\varphi=\varphi_1$ die beiden Punkte C_1 und D_1 in

der Linie OD_1 gefunden sind, werden nun für $\varphi=\varphi_2$ die beiden Punkte C_2 und D_2 in der Linie OD_2 ermittelt.

Für einen dritten, vierten, fünften Werth φ_3, φ_4, φ_5 für φ erhalte man dann in den Linien, welche sich unter diesen Winkeln gegen OX neigen, oder in deren Verlängerungen (wie z. B. bei Od, welche, indem Winkel $dOX=\varphi_5$ ist, rückwärts nach C_5 und D_5 verlängert ist) die Punkte C_3 und D_3, C_4 und D_4, C_5 und D_5. Dass ein Punkt, wie D_5, in der rückwärts gerichteten Verlängerung der betreffenden Linie Od liege, charakterisirt sich dadurch, dass derselbe zwischen O und den Endpunkt C_5 des zugehörigen Polygons fällt. Allgemein ist aber die wahre Richtung der hier in Frage kommenden Linien OD_1, OD_2, OD_3... durch diejenige Linie dargestellt, welche sich von dem betreffenden Punkte C nach dem zugehörigen D hin erstreckt, und nicht umgekehrt von D nach C.

Diese Variation des Winkels φ setzt man, wenn man nur Eine Auflösung der gegebenen Gleichung sucht, nur so weit fort, bis sich in den Linien OC_1D_1, OC_2D_2.... die Lage der beiden Punkte C_1 und D_1, C_2 und D_2.... in Beziehung zum Nullpunkte O umkehrt, wie bei OD_5C_5, oder auch nur so weit, bis der Nullpunkt O zwischen jene beiden Punkte fällt, wie bei C_4OD_4, also C_5 in die rückwärts gerichtete Verlängerung der die Richtung von x darstellenden Linie Od zu liegen kommt.

Jetzt verbindet man die Punkte C_1, C_2..... durch die Kurve $C_1C_2C_3C_4C_5$ und die Punkte D_1, D_2..... durch die Kurve $D_1D_2D_3D_4D_5$. Die erstere Kurve, welche die Endpunkte von Polygonen enthält, wird durch den Nullpunkt O gehen, also eine Auflösung der gegebenen Gleichung erkennen lassen.

Es ist aber klar, dass, wenn der Punkt C_3 mit O zusammenfällt, also die Sehne OC_3 der Kurve $C_1C_2C_3OC_4C_5$ sich auf einen Punkt O reduzirt, die Richtung dieser Sehne mit der Tangente der eben genannten Kurve für den Nullpunkt O zusammenfällt. Ausserdem wird das Verbindungsstück C_3D_3 zwischen dieser Kurve und der anderen $D_1D_2D_3DD_4D_5$ gleich der Länge OD.

Zieht man also im Nullpunkte O an die Kurve C_1OC_5 die Tangente OD bis zum Durchschnitte D mit der Kurve D_1DD_5; so stellt OD sowohl nach *Länge*, wie nach *Richtung* den Strahl $x=re^{\varphi\sqrt{-1}}$ dar, welcher der gegebenen Gleichung ein Genüge leistet oder eine *Wurzel* dieser Gleichung ist.

Wenn die gegebene Gleichung mehrere imaginäre Wurzeln hat; so wird die Kurve C_1OC_5 in eben so viel Windungen oder Zweigen durch den Nullpunkt gehen. Die Tangenten an die verschiedenen Zweige von O bis zum Durchschnitte mit dem betreffenden Zweige der Kurve D_1DD_5 ergeben alsdann die verschiedenen Wurzeln.

Es leuchtet ein, dass die reellen Wurzeln durch dieses Verfahren nicht dargestellt werden können, sobald die konstanten Grössen der Funktion F sämmtlich reell sind, weil alsdann sämmtliche Polygonseiten und demnach auch alle Kurven, wie $C'_1 C_1 C'''_1$ und $D'_1 D_1 D'''_1$ in die reelle Axe fallen, welche für $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$ zugleich die Linie OD_1 darstellt, sodass unter solchen Umständen ein jeder Punkt dieser Axe als gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt mit jenen Kurven angesehen werden könnte.

Die imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichungen des zweiten Grades mit reellen Koeffizienten führen nach Vorstehendem zu einer sehr gefälligen Konstruktion. Man braucht nämlich bei diesen Gleichungen die Kurvenbögen $C'_1 C_1 C'''_1$ und $D'_1 D_1 D'''_1$ gar nicht darzustellen, um die in OD_1 liegenden Punkte C_1 und D_1 zu finden, sondern kann die letzteren Punkte und demnach die Kurven $C_1 OC_5$ und $D_1 DD_5$ unmittelbar festlegen. Es sei zu diesem Ende

$$a + bx + cx^2 = 0$$

oder

$$a + bre^{\varphi\sqrt{-1}} + cr^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} = 0$$

die gegebene Gleichung. Ist nun in Taf. XI. Fig. 7. OD_1 die Richtung irgend eines für $x = re^{\varphi\sqrt{-1}}$ angenommenen Strahles, also Winkel $D_1 OX = \varphi_1$ und $OA_1 B_1 C_1$ das für $r = r_1$ sich ergebende Polygon, indem

$$(OA_1) = a, \quad (A_1 B_1) = bx = bre^{\varphi\sqrt{-1}},$$
$$(B_1 C_1) = cx^2 = cr^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}};$$

so ist Winkel $B_1 A_1 X = \varphi$, also $A_1 B_1$ parallel zu OD_1, ferner der Neigungswinkel von $B_1 C_1$ gegen OX gleich 2φ; mithin Winkel $A_1 B_1 C_1 = OA_1 B_1$. Soll nun der Punkt C_1 in die Linie OD_1 fallen; so muss auch Winkel $OC_1 B_1 = C_1 O A_1$ und die Länge der Linie $B_1 C_1 = OA_1$, d. i. $cr_1{}^2 = a$ sein.

Hiernach erhält also die dritte Seite $B_1 C_1$ des fraglichen Polygons eine konstante von dem besonderem Werthe φ_1 des Winkels φ oder von der Richtung der Linie OD_1 ganz unabhängige Länge, welche gleich der Länge des bekannten Gliedes $OA_1 = a$ in der gegebenen Gleichung ist. Die Länge des hierzu gehörigen x wird also ebenfalls konstant und zwar

$$r_1 = \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Man kann also schon voraus schliessen, dass die absolute Quantität (der Model) der gesuchten imaginären Wurzeln

$= \sqrt{\frac{a}{c}}$ sein wird. Da die Länge der zweiten Seite $A_1 B_1$ des fraglichen Polygons

$$= br_1 = b\sqrt{\frac{a}{c}}$$

ist; so folgt, dass auch diese Seite eine von φ unabhängige konstante Länge bewahren wird.

Um also für die verschiedenen Werthe von φ oder für die verschiedenen Richtungen OD_1 die Punkte C_1 und D_1 zu finden, macht man auf der positiv reellen Axe OX die Länge $OA_1 = a$, beschreibt um A_1 mit dem Halbmesser

$$br_1 = b\sqrt{\frac{a}{c}} = A_1 B_1$$

einen Kreis, zieht $A_1 B_1$ parallel zu OD_1 bis an den Umfang dieses Kreises und schneidet mit der Zirkelöffnung $cr^2 = a = OA_1 = B_1 C_1$ von B_1 in die Linie OD_1 so ein, dass Winkel $B_1 C_1 O = A_1 O C_1$ wird. Dies ergibt den Punkt C_1. Macht man darauf in OD_1 die Länge

$$C_1 D_1 = r_1 = \sqrt{\frac{a}{c}};$$

so findet man auch den Punkt D_1.

Auf diese Weise ist in Taf. XI. Fig. 7. die Gleichung

$$2 + 2x + x^2 = 0$$

oder

$$2 + 2re^{\varphi\sqrt{-1}} + r^2 e^{2\varphi\sqrt{-1}} = 0$$

konstruirt, worin man $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, also

$$r_1 = \sqrt{\frac{a}{c}} = \sqrt{2},$$

also

$$OA_1 = a = 2, \quad A_1 B_1 = br_1 = 2\sqrt{2},$$

$$B_1 C_1 = cr_1^2 = a = 2, \quad C_1 D_1 = r_1 = \sqrt{2}$$

hat. Die Kurve $C_1 Oc$ ist eine geschlossene, welche über und unter der reellen Axe zwei kongruente Schenkel besitzt, welche zweimal durch den Nullpunkt gehen und daselbst eine

Schlinge bilden. Die ebenfalls aus zwei kongruenten Schenkeln bestehende Curve D_1DD' besitzt in der reellen Axe links vom Nullpunkte bei d eine widerkehrende Spitze. Die beiden imaginären Wurzeln

$$x = -1 + \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)$$

und

$$x = -1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)$$

sind dargestellt resp. durch die beiden Tangenten OD und OD' an die beiden Schenkel der Kurve C_1Oc im Nullpunkte O.

Für den Werth $\varphi = \pi$, also $2\varphi = 2\pi$ fallen die drei Seiten OA_1, A_1B_1, B_1C_1 des obigen Polygons in die reelle Axe dergestalt, dass, wenn die Koeffizienten a, b, c sämmtlich positiv sind, OA_1 die positive, A_1B_1 die negative und B_1C_1 die positive Richtung annimmt, also

$$Oc = OA_1 + B_1C_1 - A_1B_1$$
$$= a + a - b\sqrt{\frac{a}{c}} = 2a - b\sqrt{\frac{a}{c}}$$

wird. Wäre nun $OA_1 + B_1C_1$ oder $2OA_1 < A_1B_1$ oder $2a < b\sqrt{\frac{a}{c}}$ d. i. $4a < \frac{b^2}{c}$; so könnte die Kurve C_1Oc den Nullpunkt O nicht erreichen; es gäbe alsdann keine imaginären Wurzeln.

In Taf. XI. Fig. 8. ist die Gleichung

$$2 - 2x + x^2 = 0$$

oder

$$2 - 2re^{\varphi\sqrt{-1}} + r^2e^{2\varphi\sqrt{-1}} = 0$$

konstruirt. Hier, wo das zweite Glied negativ ist, muss die zweite Seite A_1B_1 des fraglichen Polygons eine der Linie OD_1 direkt entgegengesetzte Richtung erhalten. Dies erzeugt anfänglich Polygone von der Gestalt $OA_1B_1C_1$. Im Uebrigen ist das Verfahren dem früheren gleich. Man findet auch, dass die Kurve C_1Oc der für die Gleichung

$$2 + 2x + x^2 = 0$$

gefundenen gleich ist, dass aber jetzt einem Winkel φ der zweite Durchschnittspunkt der Linie OC_1 mit jener Kurve angehört. Die Kurve D_1DO nimmt eine von der früheren abweichende Gestalt an, indem dieselbe ebenfalls zweimal durch den

Nullpunkt geht und daselbst eine Schlinge bildet. Die beiden imaginären Wurzeln

$$x = 1 + \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)$$

und

$$x = 1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)$$

sind jetzt durch die beiden Tangenten OD und OD' an die beiden Schenkel der Kurve C_1Oc im Nullpunkte O dargestellt.

Für den Werth $\varphi=0$, also $2\varphi=0$, fallen die drei Seiten OA_1, A_1B_1, B_1C_1 des fraglichen Polygons ebenfalls in die reelle Axe dergestalt, dass wenn die Koeffizienten a und c positiv sind und b negativ ist, OA_1 die positive, A_1B_1 die negative und B_1C_1 die positive Richtung annimmt. Die Kurve C_1Oc würde also auch hier den Nullpunkt nicht erreichen können, wenn

$$OA_1 + B_1C_1 = 2OA_1 < A_1B_1,$$

oder

$$2a < b\sqrt{\frac{a}{c}}, \text{ d. i. } 4a < \frac{b^2}{c}$$

wäre. Es würde alsdann auch in einer solchen Gleichung **keine imaginären Wurzeln** geben.

Wenn in einer quadratischen Gleichung die beiden Koeffizienten a und c entgegengesetzte Zeichen hätten; so würde, wie Taf. XI. Fig. 9. anschaulich macht; für keine der Kombinationen

$$\begin{array}{lllll} a = & +a & +a & -a & -a, \\ b = & +b & -b & +b & -b, \\ c = & -c & -c & +c & +c \end{array}$$

der Endpunkt C_1 eines Polygons $OA_1B_1C_1$ in die **direkte Richtung** OD_1 des zugehörigen Winkels φ fallen können. Unter solchen Umständen gibt es eine Kurve C_1Oc von der bekannten Beschaffenheit überhaupt nicht, und es sind demnach auch **keine imaginären Wnrzeln** vorhanden.

In Taf. XI. Fig. 10. ist die Konstruktion der vier imaginären Wurzeln der Gleichung

$$a + x^5 = 0$$

oder

$$a + r^5 e^{5\varphi\sqrt{-1}} = 0$$

dargestellt. Wenn $OA_1 = a$ genommen wird; so ist für irgend ein

$$x_1 = r_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}},$$

welches in der Richtung OC_1 liegen soll, der Neigungswinkel C_1A_1X der zweiten und letzten Polygonalseite

$$A_1C_1 = x_1^5 = r^5 e^{5\varphi\sqrt{-1}} \text{ gleich } 5\varphi_1 = 5(C_1OX).$$

Hiernach kann man den Punkt C_1 in der Linie OC_1 unmittelbar finden. Lässt man φ von 0 bis $\frac{\pi}{4} = E_3OX$ variiren, so ergibt sich die Kurve CC_1OC_2, an deren unendlich langem Schenkel OC_2 die Linie E_3OE_2 eine Asymptote bildet. Für

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ bis } \frac{\pi}{2} = E_5OX$$

ergibt sich die Kurve C_3OC_4, an deren oberem unendlichen Schenkel OC_3 die Linie E_2OE_3 und an deren unterem unendlichen Schenkel OC_4 die Linie E_5OE_4 eine Asymptote bildet. Für

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{3\pi}{4} = E_7OX$$

ergibt sich die Kurve C_5OC_6 mit zwei unendlichen Schenkeln und den Asymptoten E_4OE_5 und E_7OE_6. Für

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ bis } \pi = X'OX$$

ergibt sich die Kurve C_7OC_8C mit Einem unendlichen Schenkel OC_7 und der dazu gehörigen Asymptote E_6OE_7. Wenn φ über π hinaus wächst; so stellen sich die genannten Kurven der Reihe nach wieder ein.

Da diese Kurven den Nullpunkt viermal und zwar dann passiren, wenn

$$5\varphi \text{ resp.} = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi;$$

also

$$\varphi \text{ resp.} = \frac{\pi}{5},\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5}$$

ist; so gibt es vier imaginäre Wurzeln. Man hat aber zu beachten, dass die von O ausgehenden Kurvenbögen zum Theil nicht durch die Durchschnitte der direkten Richtungen der Linien OC_1 und A_1C_1, sondern auch durch die Durchschnitte der rückwärts gerichteten Verlängerungen gebildet sind. Für die Durchschnitte der direkten Richtungen hat man

von $=0$ bis $\frac{\pi}{4}$ den Kurventheil CC_1O und demnach als Richtung der ersten Wurzel die Tangente OD;

von $\varphi=\frac{\pi}{4}$ bis $\frac{\pi}{2}$ gar keinen Kurventheil;

von $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{4}$ den Kurventheil C_3O und demnach als Richtung der zweiten Wurzel die Tangenten OD';

von $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ bis $\frac{5\pi}{4}$ gar keinen Kurventheil;

von $\varphi=\frac{5\pi}{4}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ den Kurventheil OC_4 und demnach als Richtung der dritten Wurzel die Tangente OD'';

von $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ bis $\frac{7\pi}{4}$ gar keinen Kurventheil;

von $\varphi=\frac{7\pi}{4}$ bis 2π den Kurventheil OC_8C und demnach als Richtung der vierten Wurzel die Tangente OD'''.

Um die absolute Quantität dieser Wurzeln zu bestimmen, braucht man hier die bekannte Kurve $D_1 D_2 ...$ nicht zu entwerfen, da, wenn die Länge von $A_1C_1=R_1$ gesetzt wird, $R_1=r_1{}^3$, also $r_1=\sqrt[3]{R_1}$ und für die fraglichen Wurzeln $R_1=a$, also $r_1=\sqrt[3]{a}$ ist.

XIX.

Beweis der Existenz von n Wurzeln in jeder Glichung des $n$ten Grades und Untersuchungen über die Natur einer solchen Gleichung.

Von

Herrn H. Scheffler,

Bauconducteur bei den Herzogl. Braunschweigischen Eisenbahnen zu Braunschweig.

Im sechsten Theile dieses Archives, Nr. XXXV., hat Herr Dr. Wittstein die geometrische Bedeutung des Beweises von Cauchy über des Vorhandensein von mindestens Einer Wurzel in jeder algebraischen Gleichung näher nachgewiesen. Hierdurch ist die Eleganz jenes Beweises noch bedeutend erhöhet. Derselbe ist aber ein indirekter Beweis, und ausserdem wird dadurch nicht unmittelbar das ganze Faktum, worauf es eigentlich ankommt, nämlich dass jede algebraische Gleichung vom $n$ten Grade n Wurzeln haben müsse, dargethan. Um diesen letzteren Satz abzuleiten, bedarf es nun immer noch ganz besonderer analytischer Combinationen, bei welchen die geometrischen Beziehungen nicht so nahe liegen dürften, als bei dem Beweise des ersteren Satzes. Die Wichtigkeit des fraglichen Satzes für die Algebra, und die Berühmtheit, welche derselbe dadurch erlangt hat, dass er lange Zeit ohne Beweis geblieben ist, werden es daher rechtfertigen, dass ich noch einen anderen und zwar direkten Beweis liefere, welcher den in Rede stehenden Satz sofort in seiner grössten Allgemeinheit aufklärt.

Die gegebene Gleichung vom $n$ten Grade, nach aufsteigenden Potenzen von x geordnet, sei, nachdem durch den Koeffizienten des höchsten Gliedes dividirt ist,

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{n-1} x^{n-1} + x^n = F(x) = 0 \; \dots \; (1)$$

Hierin mögen die Koeffizienten A_0, A_1.. beliebige reelle oder imaginäre Werthe haben, also allgemein von der Form

$$A = ae^{\alpha\sqrt{-1}} = a\cos\alpha + a\sin\alpha.\sqrt{-1}$$

sein, worin a eine **absolute** Quantitität bezeichnet, α jedoch nur **reell** zu sein braucht, sonst aber sowohl positiv, wie negativ sein kann. Die Glieder jener Gleichung brauchen nur durch das Additionszeichen verbunden zu werden, indem man z. B. nur

$$-A = -ae^{\alpha\sqrt{-1}} = +ae^{(\pi+\alpha)\sqrt{-1}}$$

zu setzen braucht.

Die allgemeine Form, in welcher man sich irgend einen Werth für x denken kann, ist

$$x = re^{\varphi\sqrt{-1}} = r\cos\varphi + r\sin\varphi.\sqrt{-1},$$

worin r ebenfalls nur eine **absolute** Quantität zwischen 0 und $+\infty$, φ jedoch jeden **reellen** Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ darstellt. Durch Substitution dieser Ausdrücke für x und für die Koeffizienten A in Gl. (1) wird dieselbe

$$a_0 e^{\alpha_0\sqrt{-1}} + a_1 r e^{(\alpha_1+\varphi)\sqrt{-1}} + a_2 r^2 e^{(\alpha_2+2\varphi)\sqrt{-1}} + a_3 r^3 e^{(\alpha_3+3\varphi)\sqrt{-1}} + \dots$$

$$+ a_{n-1} r^{n-1} e^{[\alpha_{n-1}+(n-1)\varphi]\sqrt{-1}} + r^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = F(re^{\varphi\sqrt{-1}}) = 0 \; \dots \; (2)$$

oder wenn man den reellen Theil vom imaginären trennt und den ersteren mit $f_1(r,\varphi)$ und den letzteren mit $f_2(r,\varphi).\sqrt{-1}$ bezeichnet,

$$a_0\cos\alpha_0 + a_1 r\cos(\alpha_1+\varphi) + a_2 r^2\cos(\alpha_2+2\varphi) + \dots$$

$$\dots + a_{n-1} r^{n-1}\cos[\alpha_{n-1}+(n-1)\varphi] + r^n\cos(n\varphi)$$

$$+\{a_0\sin\alpha_0 + a_1 r\sin(\alpha_1+\varphi) + a_2 r^2\sin(\alpha_2+2\varphi) + \dots$$

$$\dots + a_{n-1} r^{n-1}\sin[\alpha_{n-1}+(n-1)\varphi] + r^n\sin(n\varphi)\}\sqrt{-1}$$

$$= f_1(r,\varphi) + f_2(r,\varphi).\sqrt{-1} = 0 \; \dots\dots \; (3)$$

Wir stellen uns jetzt unmittelbar auf den Boden der geometrischen Anschauung, von welchem jeder arithmetische Gedanke doch nur eine **Abstraktion** ist, und welcher sich deshalb vorzüglich dazu eignet, die Jdeen zu fixiren, wiewohl man, wenn man

bloss mit Kombinationen reiner Begriffe operiren wollte, dieselben Resultate auch ohne geometrische Versinnlichung, aber mit einem grösseren Aufwande von Formeln und Erläuterungen erzielen könnte.

Es ist klar und könnte leicht streng gezeigt werden, dass die Funktionen F, f_1, f_2 in Gl. (2) und (3) sowohl für r, wie für φ, wenn man diese Grössen als Veränderliche betrachtet, stetig sind. Nimmt man daher für φ irgend einen bestimmten Werth φ_1 an, behandelt darauf in Gl. (2) oder (3) φ_1 wie eine Konstante und lässt bloss r von 0 bis ∞ variiren; so muss der zweite Endpunkt des durch F dargestellten Polygons (s. den früheren Aufsatz Nr. XVIII. über die Konstruktion der imaginären Wurzeln einer Gleichung) eine stetige Kurve AC_1 (Taf. XII. Fig. 1.) beschreiben. Auf rechtwinklige Koordinaten bezogen, ist f_1 aus Gl. (3) die vom Nullpunkte aus in positiver oder negativer Richtung der reellen Axe gemessene Abszisse, und f_2 die zugehörige Ordinate für irgend einen Punkt dieser Curve. Wenn OA das bekannte Glied

$$a_0 e^{\alpha_0\sqrt{-1}} = a_0\cos\alpha_0 + a_0\sin\alpha_0 . \sqrt{-1}$$

der gegebenen Gleichung darstellt; so muss der Anfangspunkt jener Kurve nothwendig im Punkte A liegen; von diesem Punkte aus erstreckt sich dieselbe aber (für $r=\infty$) ins Unendliche.

B_1 sei ein Punkt dieser Curve, für welche $\varphi=\varphi_1$ und $r=r_1$ ist. Behandelt man nun in der gegebenen Gleichung diesen Werth r_1 für r als Konstante und lässt bloss den Winkel φ vom Werthe φ_1 an bis zum Werthe $2n\pi+\varphi_1$ wachsen; so muss der Punkt B_1 ebenfalls eine stetige Kurve B_1B_2 beschreiben. Da für keinen dieser endlichen Werthe von φ_1 die Gleichung (2) oder (3) einen unendlich langen Strahl ergeben kann; so müssen alle Punkte dieser Kurve B_1B_2, insofern r_1 endlich ist, in endlichen Abständen vom Punkte A liegen. Da aber für $\varphi=2n\pi+\varphi_1$ die gegebene Gleichung durchaus dieselben Werthe liefert, wie für $\varphi=\varphi_1$; so muss der letzte Punkt der fraglichen Kurve wieder mit dem ersten B_1 zusammenfallen; es muss also B_1B_2 eine geschlossene Kurve sein (die übrigens mehr als Eine ganze Umwindung machen kann), welches auch der Werth von r_1 sein möge.

Jetzt sei Ab_1c_1 eine Kurve, welche man statt der AB_1C_1 erhält, wenn man dem Winkel φ den von φ_1 nur unendlich wenig verschiedenen Werth φ' gibt, und r wiederum von 0 bis ∞ wachsen lässt. Diese Kurve wird in unendlicher Nähe von AB_1C_1 liegen. Die kurzen Verbindungsstriche zwischen beiden mögen die stetigen Wege andeuten, welche bei dieser Veränderung die Punkte B_1, C_1... der Kurve $A\,B_1\,C_1$ durchlaufen haben, um in die Punkte b_1, c_1... der Kurve $A\,b_1\,c_1$ zu gelangen indem die gleichnamigen Punkte in beiden stets Ein und demselben Werthe von r entsprechen.

Es leuchtet nun ein, dass, wenn man sich alle Kurven von unendlicher Zahl denkt, welche bei einem stetigen Wachsen des Winkels φ von φ_1 bis φ' in vorstehender Weise erzeugt werden und die allmähligen Uebergänge von $A\,B_1\,C_1$ zu $A\,b_1\,c_1$

bilden, jedenfalls alle diejenigen Punkte der Koordinatenebene von diesen verschiedenen Kurven getroffen werden müssen, welche in den mit Strichen ausgefüllten Flächenräumen Ap, pm, $mB_1 C_1 c_1 b_1 m$ zwischen jenen beiden Kurven liegen. Unter diesen Flächenräumen sind im Allgemeinen diejenigen verstanden, welche von A aus zwischen zwei Durchschnittspunkten, wie A und p, p und m der beiden Kurven liegen, während der letzte Raum $m\ C_1\ c_1$ an der obersten Seite von dem Wege $C_1\ c_1$ des Punktes C_1 begränzt ist. Durch diese Behauptung wird nicht ausgeschlossen, dass durch die fragliche Variation auch noch andere, ausserhalb der gedachten Flächenräume liegende Punkte der Koordinatenebene berührt werden können, indem sich z. B. die Kurve $A\ B_1\ C_1$ bei ihrem Uebergange in $A\ b_1\ c_1$ im unteren Theile Am noch etwas weiter nach rechts über den betreffenden Bogentheil der Kurve $A\ b_1\ c_1$ ausgebaucht haben und dann erst durch rückgängige Bewegung ihrer Punkte in die Lage $A_1 mb_1 c_1$ gekommen sein kann.

Ist nun für irgend einen anderen Werth φ_2 von φ, welcher um eine endliche Grösse von φ_1 verschieden ist, in vorerwähnter Weise die Kurve $A\ B_2\ C_2$ erzeugt und $C_1\ C_2$ der Weg, welchen der Punkt C_1 beschreiben würde, wenn man unter Festhaltung des dazu gehörigen Werthes von r nur den Winkel φ von φ_1 bis φ_2 hätte wachsen lassen; so müssen bei dem stetig gedachten Uebergange der Kurve $A\ B_1\ C_1$ in $A\ B_2\ C_2$ wenigstens alle diejenigen Punkte der Koordinatenebene getroffen sein, welche zwischen diesen beiden und der Kurve $C_1\ C_2$ liegen. Dass man nicht etwa die in dem Raume $C_1\ M\ C_2$ liegenden Punkte durch die Annahme ausschliessen kann, dass sich die Kurve $A\ B_1\ C_1$ durch eine Drehung von links nach rechts in die Lage $A\ M\ B_2\ C_2$ bewegt hätte, (was bei der entworfenen Figur 1. auf Taf. XII. fast eine ganze Umwälzung um den Punkt A erfordern würde) leuchtet ein, weil der Uebergang des Punktes nach C_2 durch die Kurve $C_1\ C_2$ ausdrücklich vorausgesetzt ist.

Man kann sich diese Variationen der Kurve $A\ B_1\ C_1$ durch die Idee der Bewegung eines biegsamen und zugleich elastischen Fadens, dessen Einer Endpunkt stets in A festgehalten wird, gut versinnlichen. Dieser Faden kann sich auch für irgend einen Werth von φ in einer geraden Linie ausstrecken und auch in dieser Geraden mehrere Hinundhergänge bilden, was der Allgemeinheit des vorstehenden Räsonnements keinen Abbruch thut.

Wenn gezeigt wird, dass dieser Faden bei der Variation von φ zwischen den Gränzen 0 und $2n\pi$ für n Werthe von $x = re^{\varphi\sqrt{-1}}$ $n$mal durch den Nullpunkt O gehen muss; so ist damit bewiesen, dass die gegebene Gleichung jederzeit n Wurzeln hat, welche sich bei fortgesetztem Wachsthume des Winkels φ über die Gränze $2n\pi$ periodisch wiederholen.

Bezeichnen wir die goniometrische Tangente des Neigungswinkels für irgend ein Element der Kurve $A_1\ B_1\ C_1$ oder für die Berührungslinie dieser Kurve in irgend einem Punkte, dessen rechtwinklige Koordinaten nach Gl. (3) $f_1\ (r, \varphi)$ und $f_2\ (r, \varphi)$ sind,

worin die Grösse r allein die Rolle einer veränderlichen spielt, mit β; so hat man bekanntlich

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial r}}{\frac{\partial f_1}{\partial r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Je grösser r wird, desto mehr überwiegt das höchste Glied $x^n = r^n e^{n\varphi\sqrt{-1}}$ in der gegebenen Gleichung alle übrigen, und wird zuletzt unendlich vielmal grösser, als alle übrigen zusammengenommen. Für $r=\infty$ verschwinden also diese letzteren Glieder gegen x^n und man hat alsdann

$$F(x) = x^n = r^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = r^n \cos(n\varphi) + r^n \sin(n\varphi).\sqrt{-1}$$

$$f_1(r,\varphi) = r^n \cos(n\varphi) \qquad f_2(r,\varphi) = r^n \sin(n\varphi)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = n r^{n-1} \cos(n\varphi) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial r} = n r^{n-1} \sin(n\varphi)$$

also

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{n r^{n-1}\sin(n\varphi)}{n r^{n-1}\cos(n\varphi)} = \operatorname{tang}(n\varphi),$$

oder

$$\beta = n\varphi \ldots\ldots (5)$$

Dieses Resultat drückt aus, dass jede Kurve, wie $A\,B_1\,C_1$, in ihrem oberen Theile, je weiter sich ihre Punkte vom Nullpunkte O entfernen, sich immer mehr und mehr einer Richtung nähert, deren Neigung β gegen die positive reelle Axe das $n$fache desjenigen Werthes von φ ist, für welchen jene Kurve entworfen ist. In unendlicher Entfernung wird diese Kurve also **parallel** zu der eben genannten Richtung.

Ausserdem erhellet, dass, wenn $\underset{m}{A}\, x^m = \underset{m}{a}\, r^m e^{(\underset{m}{\alpha} + m\varphi)\sqrt{-1}}$ das **niedrigste** auf das bekannte Glied $\underset{0}{A}$ in Gl. (1) folgende Glied ist, dessen Koeffizient $\underset{m}{A}$ nicht gleich null ist, dieses Glied alle höheren unendlich überwiegen wird, sobald man nur r **klein** genug annimmt. Für ein solches unendlich kleines r hat man daher

$$F(x) = \underset{0}{A} + \underset{m}{A}\, x^m = \underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} + \underset{m}{a}\, r^m \cos(\underset{m}{\alpha} + m\varphi)$$
$$+ [\underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} + \underset{m}{a}\, r^m \sin(\underset{m}{\alpha} + m\varphi)]\sqrt{-1}$$

$$f_1(r,\varphi) = \underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} + \underset{m}{a}\, r^m \cos(\underset{m}{\alpha} + m\varphi),\quad f_2(r,\varphi) = \underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} + \underset{m}{a}\, r^m \sin(\underset{m}{\alpha} + m\varphi)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \underset{m}{m a} r^{m-1} \cos(\underset{m}{\alpha} + m\varphi), \quad \frac{\partial f_2}{\partial r} = \underset{m}{m a} r^{m-1} \sin(\underset{m}{\alpha} + m\varphi);$$

also

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\underset{m}{m a} r^{m-1} \sin(\underset{m}{\alpha} + m\varphi)}{\underset{m}{m a} r^{m-1} \cos(\underset{m}{\alpha} + m\varphi)} = \operatorname{tang}(\underset{m}{\alpha} + m\varphi),$$

$$\beta = \underset{m}{\alpha} + m\varphi \ldots\ldots (5^a)$$

Hiernach verlässt also eine Kurve wie $A B_1 C_1$ den gemeinschaftlichen Anfangspunkt aller Kurven A in einer Richtung, welche sich gegen die positive reelle Axe unter dem Winkel $\underset{m}{\alpha} + m\varphi$ oder gegen die Verlängerung der Linie OA unter dem Winkel $m\varphi$ neigt.

Nun sei in Taf. XII. Fig. 2. AC diejenige Kurve, welche man nach dem vorstehenden Verfahren für den Werth $\varphi = 0$ erhält, und C sei ein in unendlicher Entfernung von O liegender Punkt dieser Kurve, für welchen man die Richtung der Letzteren parallel zu der unter dem Winkel $n\varphi$ geneigten geraden Linie denken kann. Da hier $\varphi = 0$, also auch $n\varphi = 0$; so ist jene Kurve in C der reellen Axe OX selbst parallel. Ob die Kurve AC in die reelle Axe ganz hineinfällt, oder bei C um einen endlichen oder unendlichen Abstand über oder unter OX liegt, ist völlig gleichgültig, auch ob sich diese Kurve, ehe sie nach C gelangt, in mehreren Windungen um den Nullpunkt O schlingt.

Lässt man jetzt φ von 0 bis zum Werth $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n}$ wachsen; so erhält man Kurven, welche, indem sie sämmtlich von A ausgehen, in ihren unendlich entfernten Theilen Richtungen annehmen, die mit der positiven reellen Axe OX immer grösser werdende Winkel $n\varphi$ einschliessen. Der Werth dieses Winkels $n\varphi$ durchläuft hierbei alle Werthe von $n.0 = 0$ bis $n.\frac{2\pi}{n} = 2\pi$, also alle in den vier Quadranten liegende Neigungen, und es ergibt sich mithin für $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n}$ eine Kurve AC_1, welche in ihren unendlich entfernten Theilen C_1 wiederum parallel zur positiven Axe OX wird. Der Punkt C für $r = \infty$ beschreibt hierbei, bis er nach C_1 gelangt, von rechts nach links einen Weg in der Richtung des Pfeils CD, welcher bis auf den Abstand der beiden Kurven AC und AC_1 zwischen ihren unendlich entfernten parallelen Theilen einer ganzen Umdrehung von 360° gleich ist. Die Tangente des Anfangspunktes A, deren Neigung gegen die positive Axe für $\varphi = 0$ den Werth $\underset{m}{\alpha}$ (Gl. 5^a) besitzt, hat sich während dieser Periode um den Winkel $\frac{m}{n} 2\pi$ nach derselben Seite herum weitergedrehet. Diese Drehung kann, da $m < n$, nur einen Theil $\frac{m}{n}$ einer

ganzen Umdrehung ausmachen, wenn nicht gerade eine binomische Gleichung gegeben wäre, wofür man $m=n$ hat.

Bei dieser Bewegung der Kurve AC müssen alle Punkte der Koordinatenebene berührt sein, welche in dem unendlichen Flächenraum $ACD...C_1A$ liegen. Da aber die Kurve AC_1 nicht mit der ersteren AC zusammenzufallen braucht; so ist es nicht nothwendig, dass unter den berührten Punkten auch der Nullpunkt O sei, d.h. es ist nicht nothwendig, dass die Gleichung eine Wurzel x_1 besitze, für welche φ zwischen 0 und $\frac{2\pi}{n}$ liegt. Wenn der Punkt O von keiner der durch jene Variation entstandenen Kurven getroffen ist; so wird die Kurve AC_1 gegen denselben etwa die in Taf. XII. Fig. 2. angegebene Lage AEC_1 haben. Ist derselbe aber getroffen und zwar nur ein einziges Mal; so wird er auf der entgegengesetzten Seite der Kurve AC_1 liegen, indem diese Kurve dann etwa den Zug AE_1C_1 verfolgt. Es wäre übrigens im Allgemeinen möglich, dass der Nullpunkt durch die Bewegung der fraglichen Kurve in die Lage AEC_1 0, 2, 4, 6..., überhaupt eine gerade Anzahl von Malen, bei der Bewegung in die Lage AE_1C_1 jedoch 1, 3, 5, 7..., überhaupt eine ungerade Anzahl von Malen und mindestens Ein Mal getroffen sei, dass es also bei der ersten Lage $2m$ und bei der letzteren Lage $2m+1$ Wurzeln gäbe, für welche der Werth von φ zwischen 0 und $\frac{2\pi}{n}$ läge.

Lässt man jetzt φ von $\frac{2\pi}{n}$ bis $\frac{4\pi}{n}$ wachsen; so macht die Kurve AC_1 wiederum eine Umwälzung, welche der der Kurve AC ähnlich ist. Für $\varphi=\varphi_2=\frac{4\pi}{n}$ erhalte man in Taf. XII. Fig. 3. die Kurve AC_2, welche wiederum bei C_2 parallel zur Axe OX wird, indem man hierfür $n\varphi_2=n.\frac{4\pi}{n}=4\pi$ hat. Gab es nun innerhalb der Gränzen 0 und $\frac{2\pi}{n}$ für φ Eine Wurzel, oder konnte die Kurve AC_1 in Taf. XII. Fig. 2. die Lage AE_1C_1 rechts vom Nullpunkte haben; so kann jetzt die neue Kurve AC_2 in Beziehung zum Nullpunkte O eine Lage wie AEC_1 in Taf. XII. Fig. 2. haben, wenn es keine oder nur eine gerade Anzahl von Wurzeln innerhalb der Gränzen $\frac{2\pi}{n}$ und $\frac{4\pi}{n}$ für φ gibt; dagegen eine Lage, wie AE_1C_1 in Taf. XII. Fig. 2., wenn es auch innerhalb der letzteren Gränzen Eine oder eine ungerade Anzahl von Wurzeln gibt. Gab es indessen innerhalb der Gränzen 0 und $\frac{2\pi}{n}$ für φ keine Wurzel, so dass also die Kurve AC_1 die Lage AEC_1 in Taf. XII. Fig. 2. haben musste; so muss, wenn es auch innerhalb der Gränzen $\frac{2\pi}{n}$ und $\frac{4\pi}{n}$ für φ keine Wurzel gibt, die neue Kurve AC_2 eine der in Taf. XII. Fig. 3. dargestellten ähnliche Lage haben, wobei sie den Nullpunkt an der linken Seite mit zwei Windungen umschlingt; dagegen muss, wenn es innerhalb

der letzteren Gränzen Eine oder überhaupt eine ungerade Menge von Wurzeln gibt, die neue Kurve AC_2, nachdem sich die Kurve AEC_1 aus Taf. XII. Fig. 2. bei ihrer Bewegung Ein Mal oder eine ungerade Menge von Malen durch den Nullpunkt gezogen hat, diesen Punkt O an der linken Seite noch mit Einer Windung umschlingen, ähnlich der Kurve AEC_1 in Taf. XII. Fig. 2.

In dieser Weise lässt man den Winkel φ periodisch von dem Einen der durch $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots \frac{2(n-1)\pi}{n}, 2\pi$ oder resp. durch $0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n$ dargestellten Gränzwerthe zum anderen wachsen. Von den hierdurch entstehenden Kurven $AC, AC_1\ AC_2 \ldots \ldots AC_{n-1}, AC_n$, welche sämmtlich von A ausgehen, und, nachdem sie ganze Umwälzungen gemacht haben, immer wieder in den Punkten $C, C_1, C_2 \ldots$ der positiven Axe OX parallel werden, umschlingt jede folgende den Nullpunkt ebensoviel Mal, als die vorhergehende, wenn es innerhalb der betreffenden Gränzen von φ Eine Wurzel gibt, dagegen Ein Mal mehr, als die vorhergehende, wenn es innerhalb dieser Gränzen keine Wurzel, und ferner kann sie den Nullpunkt höchstens p mal weniger, als die vorhergehende umschlingen, wenn es innerhalb jener Gränzen $(p+1)$ Wurzeln gibt. Hieraus folgt auch, dass, wenn man den Winkel φ sofort von 0 bis $\frac{2p\pi}{n}$ hat wachsen lassen, die letzte Kurve AC_p den Nullpunkt an der linken Seite p mal mehr umschlingen wird als die erste AC, wenn es innerhalb jener Gränzen keine Wurzel gibt, und dass sie denselben mindestens $(p-q)$ mal mehr umschlingen muss, wenn es in jenem Zwischenraum q Wurzeln gibt, dass also eine gleiche Anzahl von Umschlingungen wie bei AC nur dann möglich ist, wenn es zwischen den fraglichen Gränzen p Wurzeln gibt. Dieser Satz lässt sich in aller Strenge einsehen und erleidet für keine denkbare Figur der fraglichen Kurven eine Einschränkung, wenngleich derselbe noch einiger weiter unten zu gebenden Erläuterungen für gewisse Fälle bedürfen wird.

Nun muss aber nach der Natur der gegebenen Gleichung für $\varphi=\varphi_n=\frac{2n\pi}{n}=2\pi$ die Kurve AC_n genau mit der ursprünglichen Kurve AC für $\varphi=0$ zusammenfallen; die AC_n muss also genau ebensoviel Umschlingungen um den Nullpunkt besitzen, wie AC. Daraus folgt ohne Weiteres, dass bei der Variation des Winkels φ von 0 bis 2π die Bewegung der Kurve AC den Nullpunkt mindestens n mal getroffen haben, oder dass es innerhalb dieser Gränzen mindestens n Wurzeln der Gleichung (2) geben muss. Es wäre nur denkbar, dass die Menge dieser Wurzeln noch um eine gerade Anzahl grösser sei als n, was jedoch aus anderen Gründen, die wir sogleich näher betrachten wollen, unmöglich ist.

In Taf. XII. Fig. 5. sei AmC_1 die Kurve, welche für irgend einen bestimmten Werth von φ dadurch erzeugt ist, dass man r von 0 bis

∞ hat wachsen lassen. Anc_1 sei eine unendlich benachbarte Kurve, welche man für den Werth $\varphi + \partial\varphi$ des Winkels φ in derselben Weise erhält. m und n oder C_1 und c_1 seien Punkte in diesen beiden Kurven, welche Ein und demselben Werth von r angehören, also mn oder $C_1 c_1$ ein Element der Bahn, welche resp. der Punkt m oder der Punkt C_1 beschreiben würde, wenn man den dazugehörigen Werth von r konstant erhalten und den Winkel φ um den kleinen Zuwachs $\partial\varphi$ vermehrt hätte. Durch Striche sind in der Figur die Wege angedeutet, welche alle solche Punkte wie m, denen Ein und derselbe Werth von r angehört, bei der Bewegung der Kurve AmC_1 in die Lage Anc_1 beschrieben haben. Es wird behauptet, dass alle diese Wege, wie mn, $C_1 c_1$ u. s. w. auf Ein und derselben Seite der Tangenten der Kurve AmC_1 resp. in den Punkten m, C_1... liegen, wobei man sich diese Kurve in der Richtung von A her durchlaufen und die Tangenten immer nach vorwärts gezogen denkt, dass also die Kurve Anc_1 in der vorstehenden Auffassung in ihrer ganzen Ausdehnung entweder auf der linken oder der rechten Seite der Kurve AmC_1 liegt.

Denn angenommen, bei der Bewegung der Kurve AC_1 sei ein Theil ihrer Punkte nach der Einen und ein anderer Theil dieser Punkte nach der entgegengesetzten Seite der fraglichen Tangenten fortgerückt; so müssen sich die beiden Kurven AC_1 und Ac_1 nach einer in Taf. XII. Fig. 6. dargestellten Weise etwa bei m durchschneiden. Hierbei ist es nur möglich entweder

1) dass der ursprünglich der Kurve AC_1 angehörige Punkt m gar keine Bewegnng gemacht hat, dass also die beiden Punkte m und n aus Taf. XII. Fig. 5. für Ein und denselben Werth von r zusammenfallen, oder

2) dass der Punkt m nach Taf. XII. Fig. 7. in der Richtung mn der zweiten Kurve Ac_1 fortgerückt ist, womit dann nothwendig verbunden ist, dass auch ein Punkt m_2 der ersteren Kurve AC_1 sich in der Richtung mm_2 ebenderselben Kurve AC_1 fortgeschoben hat. Die Punkte m_1, m_2, m, m_3 der Kurve AC_1 in der Nachbarschaft des Durchschnittes m müssten dann die Wege $m_1 n_1$, mm_2, mn, $m_3 n_3$ durchlaufen haben.

Um diese Bedingungen ad 1) und 2 analytisch auszudrücken, beachte man, dass

$$f_1(r,\varphi) = a_0 \cos \alpha_0 + a_1 r \cos(\alpha_1 + \varphi) + a_2 r^2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + \dots + r^n \cos(n\varphi) \dots (6)$$

$$f_2(r,\varphi) = a_0 \sin \alpha_0 + a_1 r \sin(\alpha_1 + \varphi) + a_2 r^2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + \dots + r^n \sin(n\varphi) \dots (7)$$

resp. die rechtwinklige Abszisse und Ordinate irgend eines Punktes der Kurve AC_1 darstellt. Schreitet man in dieser Kurve von einem Punkte, welchem ein bestimmter Werth von r angehört, z. B vom Punkte m zu einem benachbarten Punkte m_2, welchem

$r+\partial r$ angehört, fort, und projizirt diesen Weg mm_2 auf die Richtungen der beiden rechtwinkligen Koordinatenaxen; so erhält man für diese Projektionen Δf_1 und Δf_2, indem man berücksichtigt, dass φ konstant ist, und indem man aus den Entwickelungen von

$$\Delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial r}\cdot\partial r + \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r^2}{1.2} + \text{u. s. w.}$$

$$\Delta f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial r}\cdot\partial r + \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r^2}{1.2} + \text{u. s. w.}$$

nur das erste Glied nimmt, welches, so lange der darin vorkommende erste Differenzialkoeffizient irgend einen von Null verschiedenen Werth besitzt, alle übrigen Glieder bei genügender Kleinheit von ∂r überwiegt,

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}.\partial r = [a_1\cos(\alpha_1+\varphi) + 2a_2 r\cos(\alpha_2+2\varphi) + 3a_3 r^2\cos(\alpha_3+3\varphi) + \dots$$
$$\dots + nr^{n-1}\cos(n\varphi)]\partial r \dots (8)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r}.\partial r = [a_1\sin(\alpha_1+\varphi) + 2a_2 r\sin(\alpha_2+2\varphi) + 3a_3 r^2\sin(\alpha_3+3\varphi) + \dots$$
$$\dots + nr^{n-1}\sin(n\varphi)]\partial r \dots (9)$$

Bei dem Uebergange eines Punktes m der Kurve AC_1 zu dem korrespondirenden Punkte n der Kurve Ac_1, welchen beiden Punkten Ein und derselbe Werth von r angehört, erhält man für die rechtwinkligen Projektionen des Weges mn in ähnlicher Weise wie vorhin, indem man beachtet, dass hierfür r konstant ist,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\,.\,\partial\varphi = -[a_1 r\sin(\alpha_1+\varphi) + 2a_2 r^2\sin(\alpha_2+2\varphi) + 3a_3 r^3\sin(\alpha_3+3\varphi) + \dots$$
$$\dots + nr^n\sin(n\varphi)]\partial\varphi \dots (10)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}.\partial\varphi = [a_1 r\cos(\alpha_1+\varphi) + 2a_2 r^2\cos(\alpha_2+2\varphi) + 3a_3 r^3\cos(\alpha_3+3\varphi) + \dots$$
$$\dots + nr^n\cos(n\varphi)]\partial\varphi \dots (11)$$

Aus den letzten vier Gleichungen folgen die beiden wichtigen allgemeinen Beziehungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial f_2}{\partial r} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = r\frac{\partial f_1}{\partial r} \dots\dots\dots (13)$$

Soll nun die erste der beiden obigen Bedingungen erfüllt sein, also der Durchschnittspunkt m der beiden Kurven bei der Bewegung der Kurve AC_1 in die Lage Ac_1 gar keine Verrük-

kung erlitten haben (Taf. XII. Fig. 6.); so muss offenbar für diesen Punkt

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}=0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}=0 \ldots\ldots (14)$$

und demnach wegen (12) und (13), wenn nicht etwa $r=0$ ist, was bloss dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte A aller Kurven entsprechen würde,

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}=0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial r}=0 \ldots\ldots (15)$$

sein.

Soll jedoch die zweite jener beiden Bedingungen sich erfüllen, also ein Punkt der Kurve AC_1 wie m in Taf. XII. Fig. 7., durch den Uebergang des ihm zugehörigen r in $r+\partial r$ nach demselben Orte m dieser Kurve gelangen, nach welchem derselbe durch den Uebergang von φ in $\varphi+\partial\varphi$ oder durch die Bewegung der Kurve AC_1 in die Lage Ac_1 gelangt; so muss für einen solchen Punkt offenbar

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}=\frac{\partial f_1}{\partial r} \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}=\frac{\partial f_2}{\partial r}. \ldots\ldots (16)$$

sein. Substituirt man hierin für $\frac{\partial f_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}$ ihre aus (12) und (13) sich ergebenden Werthe; so führen die Formeln (16) auf die Bedingungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}=-r^2\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}=-r^2\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \ldots\ldots (17)$$

oder wenn man in (16) für $\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$ ihre Werthe aus (12) und (13) setzt, auf die Bedingungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}=-r^2\frac{\partial f_1}{\partial r} \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial r}=-r^2\frac{\partial f_2}{\partial r} \ldots\ldots (18)$$

Diese Forderungen aus (17) und (18) kommen immer, selbst wenn $r=0$ ist, also auch für den gemeinschaftlichen Anfangspunkt A aller Kurven, auf

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}=0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}=0 \ldots\ldots (19)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}=0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial r}=0 \ldots\ldots (20)$$

hinaus. Diese letzteren Forderungen enthalten übrigens schon einen Widerspruch gegen die Voraussetzung, da, wenn dieselben erfüllt sind, der Punkt m überhaupt gar keine Bewegung ge-

macht haben kann, woraus folgt, dass ein Fortschieben eines solchen Punktes bei dem Uebergange der Kurve AC_1 in die Kurve Ac_1 **in der Richtung der ersteren Kurve** AC_1 **unmöglich** ist, und dass man die Untersuchung auf die Voraussetzung der durch Taf. XII. Fig. 6. dargestellten ersten Bedingung zu beschränken hat, deren analytischer Ausdruck, wennicht $r=0$, also wenn es sich nicht um den Anfangspunkt A handelt, durch eben dieselben Formeln gegeben ist.

Nun hat man aber zu erwägen, dass wenn die ersten Differenzialkoeffizienten von f_1 und f_2 sowohl für φ, wie für r gleich null sein müssen, was in jeder Weise unerlässlich ist, das erste Glied in der Reihenentwickelung für Δf_1 und Δf_2 sowohl in Beziehung zu φ, wie zu r gänzlich verschwindet, und demzufolge nicht mehr die übrigen Glieder dergestalt überwiegen kann, dass man dieselben gegen jenes erste Glied vernachlässigen dürfte. Es kommt aber, damit die erste der beiden obigen Bedingungen erfüllt werde, streng darauf an, dass

$$\frac{\Delta f_1}{\partial\varphi}.\partial\varphi=0 \text{ ung } \frac{\Delta f_2}{\partial\varphi}.\partial\varphi=0 \ldots (21)$$

werde, und damit die zweite Bedingung erfüllt werde, dass

$$\frac{\Delta f_1}{\partial\varphi}.\partial\varphi=\frac{\Delta f_1}{\partial r}.\partial r \text{ und } \frac{\Delta f_2}{\partial\varphi}.\partial\varphi=\frac{\Delta f_2}{\partial r}.\partial r \ldots\ldots (22)$$

sei. Dies führt nun zuvörderst zu den vorstehend entwickelten Forderungen, wonach die **ersten** Differenzialkoeffizienten gleich null werden müssen, unter solchen Umständen aber weiter zu der Forderung, dass auch die **zweiten** Differenzialkoeffizienten gleich null werden müssen, dann aber auch, dass die **dritten**, **vierten** und **alle folgenden** Differenzialkoeffizienten verschwinden müssten. Letztetes ist aber unmöglich, da die $n$ten Differenzialkoeffizienten in Beziehung zu r, nämlich

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial r^n}=1.2.3\ldots(n-1)n\cos(n\varphi)\ldots\ldots (23)$$

$$\frac{\partial^n f_2}{\partial r^n}=1.2.3\ldots(n-1)n\sin(n\varphi)\ldots\ldots (24)$$

Grössen sind, welche für keinen Werth von r und φ **gleichzeitig** gleich null werden können.

Es ist also schlechterdings **unmöglich**, dass zwei benachbarte Kurven, wie AC_1 und Ac_1, einen Punkt m miteinander gemein haben können, mit Ausnahme des Anfangspunktes A, für welchen die erste der beiden obigen Bedingungen dadurch realisirt wird, dass $r=0$ ist, wodurch denn auch vermöge der Beziehungen (12) und (13) $\frac{\partial f_1}{\partial\varphi}=0$ und $\frac{\partial f_2}{\partial\varphi}=0$, und überhaupt, wie leicht zu zeigen,

$\frac{\Delta f_1}{\partial \varphi}=0$ und $\frac{\Delta f_2}{\partial \varphi}=0$, nicht aber $\frac{\Delta f_1}{\partial r}=0$ und auch nicht $\frac{\Delta f_2}{\partial r}=0$ wird. Noch viel weniger können sich zwei benachbarte Kurven in einem korrespondirenden Punkte berühren, da dies das Zusammenfallen sogar von zwei Paaren solcher Punkte voraussetzen würde.

Hieraus folgt die Richtigkeit der früheren Behauptung, dass die Kurve Ac_1 in ihrer ganzen Ausdehnung auf Ein und derselben Seite von AC_1 liegen muss, und ferner, dass die ganze Bewegung dieser Kurve bei fortgesetztem Wachsen von φ stets in demselben Sinne herum erfolgen muss, weil ja ein Rückwärtsschreiten nothwendig den Durchschnitt mit unendlich benachbarten Kurven oder wenigstens eine Berührung in korrespondirenden Punkten zur Folge haben müsste, auch hat man gesehen, dass bei dieser Bewegung kein Punkt der Kurve AC_1 längs ihrer eigenen Richtung oder Tangente fortzuschreiten vermag.

Nun ist klar, dass die Kurve AC_1 sich selbst durchschneiden kann, indem sie wie in Taf. XII. Fig. 5. eine Schlinge bildet. Dieser Fall tritt ein, wenn für zwei verschiedene Werthe von r bei demselben Werthe von φ sowohl die Funktion f_1, wie f_2 dieselben Werthe annimmt. Alsdann wird auch die Kurve Ac_1 sich selbst und die AC_1 durchschneiden; allein es leuchtet ein, dass ein solcher Durchschnitt der beiden unendlich benachbarten Kurven mit dem vorstehend betrachteten in keinerlei Beziehung steht, da es nicht dieselben oder unendlich benachbarte Punkte aus beiden Kurven sind, welche in einem solchen Durchschnitte zusammenfallen, sondern dass der Punkt, welcher aus der Kurve AC_1 bei deren Bewegung in die Lage Ac_1 mit dieser letzteren Kurve zusammentrifft, aus dem sich zurückwindenden Zweige herstammt und in der Richtung der Kurve gemessen in einer endlichen Entfernung von dem Durchschnittspunkte liegt, sodass hier weder ein Stillstand, noch ein Verrücken des fraglichen Punktes in der Richtung der an ihn gelegten Tangente stattfindet.

Solche Schlingen sind aber für das Folgende von einer anderen grossen Wichtigkeit. Nach dem Vorstehenden müssen, wenn die Kurve AC_1 (Taf. XII. Fig. 8.) durch die Bewegung des Punktes C_1 nach nach C_2, C_3... hinüber in der Lage AC_2 eine Schlinge bildet (was übrigens nicht unbedingt zu geschehen braucht), die nachfolgenden Kurven wiederum Schlingen bilden, wie AC_3. Die Schlinge zieht sich immer enger zusammen, und reduzirt sich zuletzt auf einen Punkt D, woselbst die betreffende Kurve ADC_4 eine tangential widerkehrende Spitze bildet. Die darauf folgenden Kurven bewegen sich, wie AC_5 weiter und es kann auch die unmittelbar auf AC_4 folgende in der Nachbarschaft des Punktes D weder eine ähnliche Spitze, noch eine jenseit D liegende Schlinge bilden. Wenn bei umgekehrter Bewegung, eine Kurve wie AC_6 in eine Kurve wie ADC_4 mit einer Spitze übergeht; so muss die dann zunächst folgende Kurve wie AC_3 eine Schlinge bilden, welche um den Punkt D herum eht und kann diese Schlinge weder innerhalb der Spitze

D zwischen den Schenkeln AD und DC_4 liegen, noch auch selbst eine der D ähnliche Spitze sein.

Diese Behauptungen bedürfen, abgesehen von der allgemeinen Bewegung der ganzen Kurve, welche aus dem Vorstehenden mit Nothwendigkeit folgt, noch eines strengeren Nachweises hinsichtlich der Gestalten in unmittelbarer Nähe des Punktes D.

Dass wenn zufolge des obigen Bewegungsprinzips AC_1 in die Lage AC_6 oder umgekehrt AC_6 in die Lage AC_1 kommen soll, irgendwo eine Kurve ADC_4 mit einer Spitze D entstehen muss, ist klar. Dass die beiden Schenkel dieser Kurve bei D eine gemeinschaftliche Tangente besitzen müssen, erhellet aus der Formel (4) für die goniometrische Tangente des Neigungswinkels β dieser Berührungslinie gegen die Abszissenaxe. Der Ausdruck

$$\tang \beta = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial r}}{\frac{\partial f_1}{\partial r}}$$

kann nach der Natur der Funktionen f_1 und f_2 für ein bestimmtes r und φ, also für einen bestimmten Punkt D, immer nur einen einzigen Werth annehmen. Selbst wenn derselbe sich für $\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r} = 0$ in der Form $\frac{0}{0}$ darstellen sollte, wird man durch fortgesetzte Differenziation des Zählers und Nenners endlich auf einen bestimmten Ausdruck für $\tang \beta$ kommen, weil schliesslich $\frac{\partial^n f_1}{\partial r^n}$ und $\frac{\partial^n f_2}{\partial r^n}$ nach Gl. (23) und (24) jenen Ausdruck nicht mehr unbestimmt lassen können.

Für eine solche Spitze muss aber ferner der erste Differenzialkoeffizient von f_1 und f_2 in Beziehung zu r den Werth null, dagegen der zweite einen von null verschiedenen Werth besitzen, weil ja von jener Spitze aus sowohl eine Vermehrung, wie eine Verminderung des betreffenden Werthes von r um die unendlich kleine Grösse ∂r dieselbe Veränderung in den Funktionen f_1 und f_2, welche die Koordinaten von D sind, bis auf relativ unendlich kleine Differenzen hervorbringen muss. Wäre zufällig für einen solchen Werth von r der zweite Differenzialkoeffizient von f_1 oder f_2 gleich null; so müsste es auch der dritte sein, und man müsste für den vierten einen bestimmten Werth erhalten. Es ist übrigens unmöglich, dass alle höheren Differenzialkoeffizienten in Beziehung zu r gleich null würden. Für die Spitze D hat man also

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0 \text{ und } \frac{\partial f_2}{\partial r} = 0;$$

dagegen muss sowohl $\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}$, wie $\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}$ irgend einen bestimmten Werth haben.

Bezeichnet man mit f_1' und f_2' die Werthe der Funktionen f_1 und f_2 für den entsprechenden Punkt in der unendlich benachbarten Kurve, für welchen man r und $\varphi + \partial\varphi$ statt r und φ hat; so ist

$$\frac{\partial f_1'}{\partial r} = \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f_1}{\partial r}\right)}{\partial\varphi}\partial\varphi,$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial r} = \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)}{\partial\varphi}\partial\varphi;$$

oder, wie man aus den Gleichungen (8) und (9) leicht findet, wenn man dieselben in Beziehung zu φ differenziirt,

$$\frac{\partial f_1'}{\partial r} = \frac{\partial f_1}{\partial r} - \left(\frac{\partial f_2}{\partial r} + r\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\right)\partial\varphi \text{........} (25)$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial r} = \frac{\partial f_2}{\partial r} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial r} + r\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\right)\partial\varphi \text{........} (26).$$

Da nun $\frac{\partial f_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}$ den Werth null, dagegen $\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}$ und $\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}$ einen von null verschiedenen Werth haben müssen; so folgt, dass die Ausdrücke

$$\frac{\partial f_1'}{\partial r} = -r\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\partial\varphi \text{.........} (27)$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial r} = r\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\partial\varphi \text{.........} (28)$$

nicht gleich null sind, dass sich also auch in der benachbarten Kurve keine Spitze bilden kann. Man erkennt dies noch deutlicher in der Reihenentwicklung für die ganzen Differenzen Δf_1, Δf_2, $\Delta f_1'$, $\Delta f_2'$. Diese ergibt unter Berücksichtigung der vorstehenden beiden Formeln und indem man die ersten in $\frac{\partial f_1}{\partial r}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}$ multiplizirten Glieder, welche gleich null sind, sofort unterdrückt,

$$\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f_1}{\partial r^3}\cdot\frac{\partial r^3}{1.2.3} + \text{..........} (29)$$

$$\Delta f_2 = \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial r^3}\cdot\frac{\partial r^3}{1.2.3} + \text{.........} (30)$$

$$\Delta f_1' = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\partial\varphi\partial r + \frac{\partial^2 f_1'}{\partial r^2}\frac{\partial r^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f_1'}{\partial r^3}\frac{\partial r^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\Delta f_2' = \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\partial\varphi\partial r + \frac{\partial^2 f_2'}{\partial r^2}\frac{\partial r^2}{1.2} + \frac{\partial^3 f_2'}{\partial r^3}\frac{\partial r^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots (32)$$

Das erste Glied von $\Delta f_1'$ und $\Delta f_2'$, welches bei genügender Kleinheit von ∂r alle übrigen überwiegt, kann, da $\partial\varphi$ von ∂r ganz unabhängig ist und unendlich vielmal grösser als ∂r gedacht werden darf, unendlich vielmal grösser gemacht werden, als das erste Glied von Δf_1 und Δf_2, woraus der obige Schluss, dass die Nachbarkurve nicht auch eine Spitze haben kann, sich ergibt. Nach (29) und (30) ist jetzt, wo $\frac{\partial f_1}{\partial r}=0$ und $\frac{\partial f_2}{\partial r}=0$ ist,

$$\tang\beta = \frac{\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}}{\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}} \ldots. (33).$$

Bezeichnet man nun den Neigungswinkel der Tangente für den Punkt der Nachbarkurve, welcher der Spitze D in der ersten Kurve entspricht, gegen die positive reelle Axe mit β'; so hat man wegen (31) und (32)

$$\tang\beta' = -\frac{\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}}{\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}} = -\cot\beta \ldots. (34),$$

wobei noch $\sin\beta'$ das Zeichen von $\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2}\partial\varphi\partial r$ und $\cos\beta'$ das von $-\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}\partial\varphi\partial r$ hat. Es ist also

$$\beta' = \beta + \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (35).$$

Hieraus folgt, dass die Tangente an dem korrespondirenden Punkte der Nachbarkurve perpendikular gerichtet ist gegen die Tangente an der Spitze D der ersten Kurve. Dies beweist nicht bloss die Unmöglichkeit einer Spitze in der Nachbarkurve, sondern auch die Unmöglichkeit, dass die Nachbarkurve eine ganz und gar vor oder ganz und gar hinter der Spitze D liegende Schlinge zu besitzen vermag, da dies, wenn man ∂r klein genug denkt, bei der normalen Richtung der Nachbarkurve, nothwendig zu einer der früher betrachteten unstatthaften Durchschneidung beider Kurven in der Nähe der Spitze führen müsste. Die Nachbarkurve kann also nur nach Art der Taf. XII. Fig. 8. eine Schlinge um die Spitze D herum wie AC_3, oder eine vor der Spitze vorbeiziehende Kurve ohne alle Durchschneidung w'

AC_0 bilden, was durch das Nachfolgende noch in ein helleres Licht gesetzt wird.

Es ist nämlich wichtig, zu bemerken, dass $\beta' = \beta + \frac{\pi}{2}$ und nicht $= \beta - \frac{\pi}{2}$ ist, dass also, wenn man, vom Anfangspunkte A aller Kurven kommend, über die Spitze D der Kurve ADC_4 hinaus in der Richtung des ersten Elementes des Schenkels DC_4, für welches das r der Spitze in $r + \partial r$ und nicht in $r - \partial r$ übergeht, fortschreitet, aus dieser Richtung die Richtung des korrespondirenden Elementes der benachbarten durch den Uebergang von φ in $\varphi + \partial\varphi$ und nicht in $\varphi - \partial\varphi$ erzeugten Kurve AC_5 erhalten wird, indem man nach der Seite der positiven Drehung den Winkel β um einen rechten vergrössert. Unter Beachtung dieses Umstandes, und wenn man erwägt, wie die Zeichen von $\sin\beta'$ und $\cos\beta'$ sowohl für $-\partial\varphi$ statt $+\partial\varphi$ als auch für $-\partial r$ statt $+\partial r$ in die entgegengesetzten verwandelt werden, ergibt sich folgendes Gesetz. Wenn sich, wie bei D in Taf. XII. Fig. 8., eine Spitze dergestalt bildet, dass man, von A kommend, den widerkehrenden Schenkel DC_4 zur Rechten hat; so muss dieselbe bei der nächsten Bewegung der Kurve, also für $\varphi + \partial\varphi$, in eine vor der Spitze vorbeiziehende Kurve AC_5 übergehen, und es muss ihr für $\varphi - \partial\varphi$ eine Schlinge AC_3 vorangegangen sein, welche, je weiter man in der Bewegung der Kurven zurücksieht, eine immer grössere Oeffnung gebildet haben und demnach anfänglich über den Punkt A hereingeschritten sein muss, wie dies die Bewegung der Kurven AC_1, AC_2, AC_3, AC_4, AC_5, AC_6 in Taf. XII. Fig. 8. darstellt. Es ist auch klar, dass eine über A hereinschreitende Schlinge AC_2 sich immer enger zusammenzieht, sodass von ihrem Umfange kein Punkt der Koordinatenebene getroffen werden kann, welcher nicht innerhalb der durch A gehenden grössten Schlingenöffnung liegt, und dass sich eine solche Schlinge zuletzt durch einen Uebergang durch eine Spitze ganz auflöst, indem dann alle ferneren Kurven vor dem Spitzenpunkte D vorbeiziehen. Ein jeder in der genannten grössten Schlingenöffnung liegende Punkt wird bei dieser Bewegung Einmal von den sich zusammenziehenden Theilen und dann noch Einmal von den sich wieder ausdehnenden Theilen der Kurve getroffen werden. Bei denjenigen Punkten der Koordinatenebene, durch welche der Kreuzpunkt der Schlinge sich bewegt, erfolgt der Durchgang jener beiden Kurventheile mit Einem Male, so dass auch diese Punkte stets zweimal von der Kurve getroffen werden. Zu den letzteren Punkten gehört ebenfalls der Spitzenpunkt D selbst, bei welchem sich der Umfang der Schlinge auf Null reduzirt. Die Bewegung der Kurve ist aber stets so, dass sich der in der Spitze D liegende Punkt der Koordinatenebene bei fortgesetzter Bewegung der Kurve in den spitzen Winkel ADC_4 hineinzieht, also immer den Kreuzpunkt der im Verschwinden begriffenen Schlinge, mithin zwei Kurvenschenkel auf Einmal durchschneidet. Man weiss auch aus dem Früheren, dass kein Punkt der sich bewegenden Kurve an einem Punkte der Koordinatenebene tangential zur Richtung der Kurve vorüberrücken kann, dass also jeder Punkt dieser Ebene, der überhaupt von der Bewegung der Kurve getrof-

fen wird, dieselbe unzweideutig durchschneidet oder sofort auf die entgegengesetzte Seite der Kurve tritt. Unterscheidet man an der fraglichen Kurve, indem man dieselbe vom Anfangspunkte A her durchläuft, eine linke und eine rechte Seite; so ist es die linke, welche in allen Fällen bei der positiven Bewegung der Kurve nach der Gegend der darauf errichteten Normalen vorrückt und die Punkte der Koordinatenebene zuerst aufnimmt. Diese Seite der Kurve ist in Taf. XII. Fig. 8. zu grösserer Deutlichkeit mit Punkten besetzt.

Nennen wir eine Figur wie AC_1 oder AC_6 ohne Schlinge oder Spitze die normale Gestalt der Kurve, und eine Rotation dieser Kurve um den Punkt A, bei welcher sich ebenfalls keine Schlinge oder Spitze einstellt, eine normale Bewegung; so leuchtet ein, dass zwei normale Umwälzungen dazugehören, damit ein Punkt wie O zwei Mal von jener Kurve getroffen werde, insofern die Kurve am Ende der zweiten Umwälzung genau wieder in die anfängliche Lage kommen soll. Ist jener Punkt O jedoch bei der in Taf. XII. Fig. 8. dargestellten Gestaltveränderung vermittelst der Bildung und Wiederauflösung einer von A hereinschreitenden Schlinge schon im Anfange der ersten Umwälzung zwei Mal getroffen; so hat er eine solche Lage gegen die Kurve bekommen, dass dieselbe, wenn sie nun sukzessive und im Verlaufe von zwei ganzen Umwälzungen in die normale Form und Lage der Kurve AC_1 übergeht, während der ganzen an zwei vollständigen Umwälzungen noch fehlenden Bewegung, jenen Punkt O nicht wieder treffen kann, sodass also auf die Eine, wie auf die andere Weise jener Punkt während zweier Umwälzungen der Kurve nur zwei Mal getroffen wird. Bei der normalen Bewegung erfolgt dies Treffen in grösseren Zwischenräumen oder für weiter aus einander liegende Werthe des Winkels φ; bei der abnormen Bewegung jedoch für näher zusammenliegende Werthe von φ. Ein Punkt der Ebene, welcher bei der letzteren Bewegung von dem Kreuzpunkte einer Schlinge getroffen wird, entspricht dem Falle, dass während jener zwei Umwälzungen für Ein und denselben Werth von φ zwei Durchschnitte für zwei verschiedene Werthe von r an zwei verschiedenen Stellen derselben Kurve erfolgen. Ist der letztgedachte Punkt der Spitzenpunkt D; so ist dies der Fall, wo der zweimalige Durchschnitt für Ein und denselben Werth von φ und Ein und denselben Werth von r erfolgt, wo also, wenn D der Nullpunkt ist, die gegebene Gleichung zwei vollkommen gleiche Wurzeln x oder $re^{\varphi\sqrt{-1}}$ besitzt. Dass die Begegnung des Spitzenpunktes D einem zweimaligen Durchschnitte der Kurve entspricht, erkennt man sowohl daran, wenn man denselben als Kreuzpunkt einer unendlich kleinen Schlinge auffasst und die nothwendige Bewegung dieser Kreuzpunkte von A über D hinaus ins Auge fasst, wie es bereits vorhin geschehen, wie auch daran, wenn man denselben wie den dem Kreuzpunkte der Schlinge diametral gegenüberliegenden Punkt im Umfange dieser Schlinge auffasst und berücksichtigt, dass dieser Umfang, so lange die Oeffnung der Schlinge noch endliche Dimensionen hat, gegen den Punkt D vorschreitet, und denselben also das erste Mal bei der hingängigen Bewegung mit der

punktirten Seite trifft, dass dann aber die aus der Schlinge entstehende Kurve mit rückgängiger Bewegung und stets mit der punktirten Seite voran an den Punkt D zum zweiten Male trifft.

Wenn sich irgendwo, wie bei D in Taf. XII. Fig. 9. eine Spitze dergestalt bildet, dass man von A kommend, den widerkehrenden Schenkel DC_3 zur Linken hat; so muss dieselbe unter Berücksichtigung der Werthe für tangβ', sinβ', cosβ' bei der nächsten Bewegung der Kurve in positiver Richtung, also für $\varphi+\partial\varphi$ in eine Schlinge AC_4 übergehen, und es muss ihr für $\varphi-\partial\varphi$ eine vor der Spitze vorbeiziehende Kurve AC_2 vorangegangen sein. Die entstehende Schlinge muss sich nun bei positiver Bewegung immer mehr erweitern und zuletzt dadurch auflösen, dass sie den Anfangspunkt A passirt und darauf die Gestalt AC_6 annimmt. Die stets voranschreitende linke Seite der Kurve ist auch in Taf. XII. Fig. 9. mit Punkten besetzt. Hierdurch erkennt man leicht, dass wenn bei dieser Bewegung der Kurve AC_1 ein Punkt der Koordinatenebene, wie etwa O, zwei Mal getroffen ist, die Kurve, welche den letzten Durchgang bewirkt hat, in eine solche Lage gekommen ist, dass sie bei normaler Formveränderung zwei ganze Umwälzungen vollenden müsste, um wieder in die Lage AC_1 zu kommen, ohne bei diesen Umwälzungen den Punkt O wieder zu treffen. Die Kreuzungspunkte der Schlingen und der Spitzenpunkt D spielen hierbei dieselbe Rolle von Doppelpunkten, wie in Taf. XII. Fig. 8., indem ein solcher Kreuzungspunkt zwei verschiedenen Werthen von r für denselben Werth von φ, und der Spitzenpunkt D zweimal demselben Werthe von r für denselben Werth von φ entspricht.

Nach Vorstehendem können nur die links herum sich wendenden Krümmungen der Kurve unmittelbar zu einer Schlinge führen, während die rechts herumlaufenden Biegungen bei den nächsten Bewegungen sich zu verlieren streben. Es ist zwar nicht nöthig, dass jede Krümmung der ersteren Art an jeder Stelle der Kurve eine Schlinge nach sich ziehe; erwägt man aber, dass die Tangente des unendlich entfernten Kurventheiles (Gl. 5.) eine raschere Winkelbewegung links herum besitzt, als die Tangente des Anfangspunktes A (Gl. 5^a), und dass, wenn in der gegenseitigen Beziehung zwischen den Tangenten dieser beiden äussersten Kurvenenden das Verhältniss einer Biegung nach der linken Seite besteht, der Neigungswinkel $n\varphi$ der ersteren Tangente schon grösser ist, als der Winkel $\alpha+\frac{m\varphi}{m}$ der letzteren, dass man alsdann also $n\varphi > \alpha+\frac{m\varphi}{m}$ habe; so folgt, dass diese Differenz durch die positive Bewegung der Kurve immer erheblicher werden und zuletzt jedenfalls zu einer Schlinge führen muss, welche dann bei ihrer Auflösung das bis dahin bestandene Verhältniss der Wendung nach links in das entgegengesetzte einer Wendung nach rechts verwandelt, für welches Letztere man $n\varphi < \alpha+\frac{m\varphi}{m}$ hat, und welches sich daher durch die positive Bewegung der Kurve allmählig ausgleicht. Da nur dann, wenn Gl. (1) eine binomische ist, $n=m$, sonst aber immer $n > m$ ist; so folgt, dass es bei einer binomischen Gleichung niemals eine Schlinge geben kann, dass es aber bei jeder anderen Gleichung stets Schlingenbildungen geben muss.

Wenn man bei der Schlingenbildung nach Taf. XII. Fig. 8. oder Fig. 9. einen Punkt der Koordinatenebene betrachtet, welcher wegen seiner Lage gegen die Aussenseite der Kurve nur Ein Mal getroffen werden kann, wie etwa der Punkt O, insofern man nun von der Kurve AC_2 ausgeht; so findet man, dass die gleich auf die Durchschneidung folgende Kurve AC_6 eine solche Lage bekommen hat, dass bei normaler Formveränderung jetzt noch Eine ganze Umwälzung erforderlich wäre, um ohne ferneren Durchgang durch denselben Punkt O wieder in eine der AC_2 ähnliche Lage zu kommen. Geht man aber von der Kurve AC_1 in Taf. XII. Fig. 8. oder Fig. 9. aus, wobei der Punkt O zwei Mal getroffen wird; so kann der erste Durchgang durch diesen Punkt, welcher die Kurve AC_2 erzeugt, wie der durch normale Bewegung während Einer Umwälzung bewirkte Durchschnitt angesehen werden. Die fragliche Schlingenbildung vermehrt dann die Zahl der normalen Durchgänge während derselben Umwälzungs-Periode um Einen, bringt dadurch aber die Kurve in eine solche Lage, dass nun bei der zweiten normalen Umwälzung bis in die ursprüngliche Lage AC_1 kein weiterer Durchschnitt möglich sein würde.

Nachdem Eine solche Schlingenbildung vollendet ist, oder auch gleichzeitig mit derselben, kann sich eine zweite, dritte etc. entwickeln. Es kann z. B., nachdem sich in Taf. XII. Fig. 8. die Kurve AC_1 in die Lage AC_6 bewegt und demgemäss den Punkt O gleich im Anfange der ersten Umwälzung zwei Mal getroffen, und hierdurch gegen diesen Punkt O eine Lage erhalten hat, welche der Lage der Kurve AC_2 in Taf. XII. Fig. 9. gegen den Punkt O ähnlich ist, sich nach Art der Fig. 9. eine zweite Schlingenbildung entwickeln, vermöge welcher aber der Punkt O während derselben Umwälzung nur noch Ein ferneres Mal getroffen werden kann, so dass derselbe nun im Laufe dieser Periode im Ganzen drei Mal erreicht ist. Die auf den dritten Durchschnitt folgende Kurve AC_6 in Taf. XII. Fig. 9. hat alsdann aber eine solche Lage gegen den Punkt O, dass dieselbe, um weiter in die Form der ursprünglichen Kurve AC_1 in Taf. XII. Fig. 8. zu kommen, drei ganze normale Umwälzungen machen müsste, wobei jener Punkt nicht wieder zu erreichen wäre.

Solche zwei Schlingen können auch ganz in einander fallen, indem Ein hingehender Arm der Kurve durch seine zwei Mal sich zurückwindende Fortsetzung durchschnitten wird. Taf. XII. Fig. 10. stellt dar, wie die spiralförmige Kurve AC_1 mit zwei Umgängen durch ihre positive Bewegung zwei in einander fallende Schlingen AC_3 erzeugen kann. Beide Schlingen sind über den Punkt A hereingeschritten. AC_2 sei diejenige Kurve, bei welcher die innere Schlinge die grösste durch A gehende Oeffnung besitzt. Bei dem Zusammenziehen dieser beiden Schlingen, welche sich im Allgemeinen nach einander mittelst zweier besonderer Spitzen auflösen, und bei der alsdann erfolgenden Wiederausdehnung kann jeder in der eben genannten grössten Oeffnung der inneren Schlinge liegende Punkt drei Mal getroffen werden. Die auf den dritten Durchgang folgende Kurve hat alsdann aber eine solche Lage, dass ebenso wie bei zwei neben einander liegenden Schlingen drei normale Umwälzungen dazugehören, um wieder in die ursprüngliche Form AC_1 zu kommen, wobei derselbe Punkt nicht

wieder erreicht werden kann. Ein jeder Kreuzungspunkt dieser beiden Schlingen entspricht, wenn er es sein sollte, welcher durch den Nullpunkt geht, neben dem dritten Durchgange, dem Falle, dass es innerhalb der betrachteten Bewegung drei Wurzeln der Gleichung von der Form $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_2 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$ und $r_3 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$ gibt, wovon zwei bei verschiedenen Werthen von r denselben Werth von φ gemein haben. Geht ein Spitzenpunkt durch den Nullpunkt; so sind zwei von jenen drei Wurzeln ganz gleich und man hat $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_2 e^{\varphi_2 \sqrt{-1}}$. Wenn die beiden Kreuzungspunkte jener zwei Schlingen gleichzeitig durch den Nullpunkt gehen; so hat man drei Wurzeln $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_2 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_3 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, welchen Ein und derselbe Werth von φ angehört. Fiele gleichzeitig ein Spitzenpunkt und ein Kreuzungspunkt auf den Nullpunkt; so hätte man drei Wurzeln $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_2 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, denen der Winkel φ_1 gemeinschaftlich zukäme, während ausserdem bei zweien auch noch die Model r gleich wären. Es ist auch möglich, dass sich beide Schlingen mit Einem Male in eine einzige Spitze auflösen oder dass die fraglichen beiden Spitzen zusammenfallen. Es ist ganz klar, dass der betreffende Punkt der Koordinatenebene alsdann bei jener Bewegung zwar nur ein einziges Mal erreicht werden kann, dass er aber bei dem Fortschreiten der Kurve einem dreimaligen Durchschnitte an drei besonderen Schenkeln dieser Kurve, deren Dimensionen sich auf Null reduziren, entspricht. Man hat alsdann, wenn diese Doppelspitze auf den Nullpunkt treffen sollte, drei gleiche Wurzeln $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$, $r_1 e^{\varphi_1 \sqrt{-1}}$. Umgekehrt ist es aber auch immer nothwendig, dass wenn drei gleiche Wurzeln existiren sollen, eine Doppelspitze durch den Nullpunkt gehen muss, weil sich ja hier zugleich drei Punkte der Kurve befinden müssen, für deren jeden man $\varphi = \varphi_1$ und $r = r_1$ haben muss, was einen dreimaligen Durchschnitt derselben Kurve an demselben Orte und in der Art erfordert, dass die zwischen je zwei Durchschnitten liegenden Kurvenbögen auf einen einzigen, jenem $r = r_1$ angehörigen, Punkt reduzirt sind.

Ganz allgemein ist nun klar, dass in Folge jeder einzelnen vollkommenen oder unvollkommenen Schlingenbildung während einer gewissen Reihe von Umwälzungsperioden die normale Anzahl der Durchgänge durch den Nullpunkt um Einen vermehrt werden kann, dass dann aber hierdurch Ein normaler Durchgang für die späteren Perioden unmöglich gemacht wird — und umgekehrt, dass sich für jede Suspension eines normalen Durchganges während einer ganzen Rotation Eine vollkommene Schlinge oder eine als unvollkommene Schlinge anzusehende links herumgehende Spiralwindung sich in der Kurve erzeugt oder eine rechts herumgehende Spiralwindung sich aufhebt. Da nun nach n ganzen Umwälzungen die Kurve genau wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehren muss; so leuchtet ein, dass während dieser n Umwälzungen nicht mehr und nicht weniger, als n Durchgänge durch den Nullpunkt erfolgt sein müssen, dass also die Gleichung vom $n$ten Grade stets n Wurzeln, und auch nicht mehr besitzt. Sind

hierunter m Wurzeln, welche denselben Werth von φ gemein haben; so geht Ein und dieselbe Kurve m mal durch den Nullpunkt oder es bewegt sich der gemeinschaftliche Kreuzungspunkt von $(m-1)$ Schlingen durch diesen Nullpunkt. Für m ganz gleiche Wurzeln konzentriren sich alle diese Schlingen auf einen einzigen, durch den Nullpunkt gehenden Spitzenpunkt, der dann die Bedeutung eines $m$fachen Punktes besitzt.

Es liegt nicht in der Absicht, hier alle sich auszeichnenden Spezialitäten näher zu untersuchen, da die vorstehenden allgemeinen Gesetze zur Erläuterung aller hierhergehörigen Erscheinungen ausreichen. Es muss nur noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass unter Umständen die rotirende Kurve für gewisse Werthe von φ sich in einer geraden Linie ausstrecken oder sich so darin zusammenlegen kann, dass sie mehrere Hinundhergänge darin bildet. Eine solche besondere Figur ändert Nichts an den allgemeinen Prinzipien, unter welchen die obige Kurve betrachtet ist. Ein jeder Punkt in solcher geraden Linie, wo die Kurve in direkt entgegengesetzter Richtung zurückkehrt, spielt die Rolle eines Spitzenpunktes oder einer annullirten Schlinge. Es könnten sich auch mehrere Spitzenpunkte oder annullirte Schlingen in Ein und demselben Punkte einer solchen geradlinigen Kurve vereinigen, und die endlichen Zweige dieser Schlingen können sowohl nach derselben, wie nach entgegengesetzten Seiten aus diesen Schlingen heraustreten. In welchen gegenseitigen Beziehungen die Theile einer solchen zusammengefalteten Kurve zu einander stehen, erkennt man, wenn man den Werth des zugehörigen φ um ein sehr kleines Inkrement wachsen oder abnehmen lässt, indem sich dadurch jene Beziehungen sofort in deutlicher Gestalt entwickeln. So kann sich z. B. die platt gedrückte Kurve $ADEC$ in Taf. XII. Fig. 11. bei positiver Drehung je nach der Natur der gegebenen Gleichung wie Taf. XII. Fig. 12., 13., 14. oder 15. zeigt, entwickeln. Eine Gestalt wie AC_3 wird bei fortgesetzter Bewegung immer die nächste Folge davon sein. Unmöglich würde aber immer eine Entwickelung nach Art der Taf. XII. Fig. 16. sein, indem sich zwischen die Schenkel der zweiten Spitze E_1 niemals eine vorn abgerundete Kurve legen kann, sondern sich nach Taf. XII. Fig. 12. um diese zweite Spitze eine Schlinge erzeugen müsste, wenn überhaupt $AD_1E_1C_1$ den Typus für die fernere Bewegung abgibt. Derartige Figuren kommen vorzugsweise bei den reellen Wurzeln der Gleichungen mit reellen Koeffizienten in Betracht, bei denen sich für $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ stets eine in gerader Linie sich erstreckende Kurve einstellen muss. Denkt man sich die der Taf. XII. Fig. 12. entsprechende rückgängige Bewegung der Kurve; so bilden sich die in Taf. XII. Fig. 17. angegebenen Gestalten. Es erscheint hierbei die geradlinige Kurve $ADEC$ aus Taf. XII. Fig. 11 als ein Uebergang der Kurve Ac_3 aus Taf. XII. Fig. 17. in die Kurve AC_3 aus Taf. XII. Fig. 12., wobei diese beiden Kurven symmetrische, aber in Beziehung zur geraden Linie AC entgegengesetzt liegende Formen besitzen. Bei diesem Umschlagen der Kurven Ac_3 in AC_3 wird offenbar in allen Fällen jeder zwischen A, E und jeder über D hinaus liegende Punkt der Geraden AC nur von einem einzigen, jeder zwischen E, D liegende Punkt aber von drei Schenkeln der sich bewegenden Kurve getroffen. Das Stück ED der Geraden AC, welches schon von

Ac_3 umschlungen wurde, bleibt nun auch in der Umschlingung der Kurve AC_3 liegen, wie Taf. XII. Fig. 18. darstellt.

Läge also der Nullpunkt O zwischen E und D und wäre AC die Kurve für $\varphi=0$, also ihre Richtung die der positiven reellen Axe; so gäbe es drei positive reelle Wurzeln, deren Quantitäten r verschieden wären. Läge der Nullpunkt in D; so gäbe es zwei gleiche und eine davon verschiedene grössere Wurzel. Läge derselbe in E; so gäbe es zwei gleiche und eine davon verschiedene kleinere Wurzel. Das Stück DE der Geraden AC kann sich auf einen einzigen Punkt reduziren; alsdann existiren, wenn der Nullpunkt in diesen Punkt hineinfiele, drei gleiche positive Wurzeln.

Angenommen, es handele sich in dem vorstehenden Falle um eine Gleichung dritten Grades, welche ausser diesen drei Wurzeln weiter keine haben kann. Der geradlinigen Kurve AC (Taf. XII. Fig. 18.), von welcher der Nullpunkt dreimal durchschritten wird, entspricht der Werth $\varphi=0$. Um sich zu überzeugen, dass es bei den drei nächsten Umwälzungen, wodurch $\varphi=\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$ $=2\pi$ wird, keinen weiteren Durchgang durch den Nullpunkt gibt, beginne man die Bewegung von einer Kurve, wie AC_3, welcher ein sehr kleiner Werth von φ, also $\partial\varphi$, entspricht. Diese Kurve wird nach Obigem eine Schlinge bilden, in welcher der Nullpunkt liegt. Bei fortgesetzter Vergrösserung des Winkels φ erweitert sich diese Schlinge, tritt durch den Punkt A aus, sodass alsdann die Kurve eine rechts um den Nullpunkt herumgehende Spirale mit einer Windung darstellt. Nach der ersten Umwälzung, also für $\varphi=\frac{2\pi}{3}$, ist diese Spiralwindung verschwunden; die Kurve erstreckt sich in flacher Gestalt von A nach der Seite C_3, indem der Nullpunkt noch an der rechten Seite derselben liegt. In der Mitte der zweiten Umwälzung, also für $\varphi=\pi$, streckt sich die Kurve wieder in der reellen Axe, aber von A nach der negativen Seite hin aus, sodass hiervon der rechts von A liegende Nullpunkt nicht erreicht werden kann. Am Ende der zweiten Umwälzung, also für $\varphi=\frac{4\pi}{3}$, dehnt sich die Kurve von A wieder gegen C_3 hin aus, aber nun liegt der Nullpunkt ihr zur Linken. Gegen das Ende der dritten Umdrehung bildet die Kurve eine links um den Nullpunkt gehende Spirale mit Einer Windung, welche sich, je näher φ an 2π heran kommt, in die durch Ac_3 dargestellte Schlinge zusammenzieht. Beim Uebergange von Ac_3 in die entgegengesetzte Gestalt AC_3 durch die gerade Linie AC wird nun mit Einem Schlage der Nullpunkt drei Mal getroffen.

Was die Frage anlangt, unter welchen Umständen sich die Kurve in eine gerade Linie ausstrecken kann und welche Richtung diese Linie haben wird; so bemerkt man, dass für diesen Fall, selbst wenn in jener geraden Linie mehrere Kurventheile von direkt entgegengesetzten Richtungen liegen, stets

$$\tang\beta = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial r}}{\frac{\partial f_1}{\partial r}} =$$

(36)

$$\frac{a_1\sin(\alpha_1+\varphi)+2a_2r\sin(\alpha_2+2\varphi)+3a_3r^2\sin(\alpha_3+3\varphi)+\ldots+nr^{n-1}\sin(n\varphi)}{a_1\cos(\alpha_1+\varphi)+2a_2r\cos(\alpha_2+2\varphi)+3a_3r^2\cos(\alpha_3+3\varphi)+\ldots+nr^{n-1}\cos(n\varphi)}$$

eine in Beziehung zu r konstante Grösse sein muss. Es könnten aber in der ursprünglichen Gleichung die Koeffizienten A_1, A_2.. einiger auf das bekannte folgenden Glieder null gewesen sein. Nehmen wir daher das in x^m multiplizirte Glied als das niedrigste in der gegebenen Gleichung vorkommende mit x behaftete Glied an, setzen also a_1, $a_2 \ldots a_{m-1}$ gleich null; so ergibt die vorstehende Gleichung, nachdem man Zähler und Nenner auf der rechten Seite durch r^{m-1} dividirt hat, den allgemeinen Ausdruck

$$\tang\beta = \frac{ma_m\sin(\alpha_m+m\varphi)+(m+1)a_{m+1}r\sin[\alpha_{m+1}+(m+1)\varphi]+\ldots+nr^{n-m}\sin(n\varphi)}{ma_m\cos(\alpha_m+m\varphi)+(m+1)a_{m+1}r\cos[\alpha_{m+1}+(m+1)\varphi]+\ldots+nr^{n-m}\cos(n\varphi)}.$$

Soll dieser Ausdruck in Beziehung zu r konstant sein; so muss derselbe (indem man einmal $r=0$ setzt) den Werth

$$\tang\beta = \tang(\alpha_m + m\varphi)$$

haben; es muss also allgemein

$$\beta = \alpha_m + m\varphi \quad \ldots . \quad (37)$$

sein, da, wenn man r von 0 bis ∞ wachsen lässt, sowohl der Zähler, wie der Nenner des Bruchs für $\tang\beta$ gleichzeitig gleich 0, also $\tang\beta = \frac{0}{0}$ werden kann, was anzeigt, dass für diesen Werth von r die Kurve eine Spitze besitzt, in welcher ihre Richtung in die direkt entgegengesetzte umschlägt; so müsste man eigentlich

$$\beta = \alpha_m + m\varphi + k\pi$$

setzen, worin für k eine beliebige ganze, resp. paare oder unpaare Zahl zu nehmen wäre. Man wird jedoch hiernach leicht die nachfolgenden Resultate ergänzen können, wenn man darin $\alpha_m + k\pi$ für α_m gesetzt denkt. Bezeichnet man der Kürze wegen den Inbegriff aller r enthaltenden Glieder im Zähler von $\tang\beta$ mit B und im Nenner mit C; so hat man

$$\tang\beta = \frac{m a_m \sin(\alpha_m + m\varphi) + B}{m a_m \cos(\alpha_m + m\varphi) + C}$$

$$= \tang(\alpha_m + m\varphi) + \frac{B\cos(\alpha_m + m\varphi) - C\sin(\alpha_m + m\varphi)}{\cos(\alpha_m + m\varphi)\,[m a_m \cos(\alpha_m + m\varphi) + C]}.$$

Damit nun dieser Ausdruck konstant gleich $\tang(\alpha_m + m\varphi)$ sein könne, muss jedes Glied des nach Potenzen von r geordneten Zählers

$$B\cos(\alpha_m + m\varphi) - C\sin(\alpha_m + m\varphi) =$$

$$(m+1)\, a_{m+1} \sin(\alpha_{m+1} + \varphi - \alpha_m).r$$

$$+ (m+2)\, a_{m+2} \sin(\alpha_{m+2} + 2\varphi - \alpha_m) r^2 + \ldots + n \sin[(n-m)\varphi - \alpha_m] r^{n-m}$$

gleich null sein. Dies führt zu folgenden $(n-m)$ Bedingungsgleichungen:

1) $\alpha_{m+1} + \varphi - \alpha_m = k_1 \pi$,

2) $\alpha_{m+2} + 2\varphi - \alpha_m = k_2 \pi$,

3) $\alpha_{m+3} + 3\varphi - \alpha_m = k_3 \pi$,

$\vdots$

$n-m-1$) $\alpha_{n-1} + (n-m-1)\varphi - \alpha_m = k_{n-m-1} \pi$,

$n-m$) $(n-m)\varphi - \alpha_m = k_{n-m} \pi$.

Hierin bezeichnen $k_1, k_2 \ldots\ldots k_{n-m}$ willkührliche ganze Zahlen einschliesslich der Null. Sollten noch mehrere Glieder der gegebenen Gleichung zwischen $A_m x^m$ und x^n ganz fehlen, also die zugehörigen Werthe von a, z. B. a_{m+r} gleich Null sein; so verschwindet hierdurch schon das betreffende Glied der so eben annullirten Formel und es fällt die $r$te der vorstehenden Bedingungen ganz aus. Man kann sich jedoch, wenn $a_{m+r} = 0$ ist, denken, diese $r$te Bedingung sei jederzeit realisirt. Die letzte Bedingung lässt den Werth des Winkels

$$\varphi = \frac{\alpha_m + k_{n-m}\pi}{n-m} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

erkennen, für welchen sich die Kurve in gerader Linie zusammenlegt, vorausgesetzt, dass die übrigen $(n-m-1)$ Bedingungen erfüllet seien, welche jetzt vermittelst des vorstehenden Werthes von φ zu den folgenden führen:

$$1)\qquad \underset{m+1}{\alpha}=\left(1-\frac{1}{n-m}\right)\underset{m}{\alpha}+\underset{1}{k}\,\pi-\frac{1}{n-m}\underset{n-m}{k}\,\pi,$$

$$2)\qquad \underset{m+2}{\alpha}=\left(1-\frac{2}{n-m}\right)\underset{m}{\alpha}+\underset{2}{k}\,\pi-\frac{2}{n-m}\underset{n-m}{k}\,\pi,$$

$$3)\qquad \underset{m+3}{\alpha}=\left(1-\frac{3}{n-m}\right)\underset{m}{\alpha}+\underset{3}{k}\,\pi-\frac{3}{n-m}\underset{n-m}{k}\,\pi,$$

$$\vdots$$

$$n-m-1)\qquad \underset{n-1}{\alpha}=\frac{1}{n-m}\underset{m}{\alpha}+\underset{n-m-1}{k}\,\pi-\left(1-\frac{1}{n-m}\right)\underset{n-m}{k}\,\pi.$$

Der Neigungswinkel dieser geraden Linie gegen die positive Axe ist alsdann wegen der beiden Gleichungen (37) und (38)

$$\beta=\frac{n}{n-m}\underset{m}{\alpha}+\frac{m}{n-m}\underset{n-m}{k}\,\pi \;\ldots\ldots\; (39).$$

Sollte diese Linie auch durch den Nullpunkt gehen, also mit der direkten oder indirekten Richtung von OA zusammenfallen; so müsste der vorstehende Werth von $\beta=\underset{0}{\alpha}+\underset{0}{k}\pi$ sein, also der Winkel $\underset{m}{\alpha}$ die Grösse

$$\underset{m}{\alpha}=\frac{n-m}{n}(\underset{0}{\alpha}+\underset{0}{k}\pi)-\frac{m}{n}\underset{n-m}{k}\,\pi \;\ldots\ldots\; (40)$$

besitzen. Jenachdem k eine paare oder unpaare Zahl sein kann, ist die fragliche gerade Linie von A aus direkt wie OA, oder indirekt wie AO gerichtet. Ein Durchgang der in dieser Linie liegenden eigentlichen Kurve durch den Nullpunkt, erfordert also für $\underset{0}{k}$ eine unpaare Zahl.

Wenn die gegebene Gleichung nur reelle Koeffizienten besitzt, so dass unter den Werthen der Winkel $\underset{m}{\alpha}$, $\underset{m+1}{\alpha}$ .... $\underset{n-1}{\alpha}$ nur die Grössen 0 und π, oder allgemein nur Grössen von der Form $k'\pi$ vorkommen; so sind allerdings die vorstehenden $(n-m-1)$ Bedingungen realisirt, man muss jedoch die sonst willkührliche ganze Zahl $\underset{n-m}{k}$ durchaus so wählen, dass, wenn $\underset{m}{\alpha}=k'\pi$ gesetzt wird, $k'+\underset{n-m}{k}$ irgend ein Vielfaches der Zahl $n-m$ ist. Nachdem dies geschehen, findet sich, dass auch

$$n\underset{m}{\alpha}+m\underset{n-m}{k}\,\pi=(nk'+m\underset{n-m}{k})\pi$$

ein Vielfaches von $(n-m)\pi$ ist. Daraus folgt, dass der Werth von β aus Gl. (39) ebenfalls ein Vielfaches von π ist, dass sich also die in Rede stehende geradlinige Kurve nur in der reellen Axe ausstrecken kann.

Für jede binomische Gleichung von der Form $\underset{0}{A}+x^n=0$

oder $\underset{0}{a} e^{\underset{0}{\alpha}\sqrt{-1}} + r^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = 0$, also auch für jede Gleichung ersten Grades, fallen die obigen $(n-m-1)$ Bedingnugsgleichungen hinweg oder sind als erfüllt anzusehen. Man hat hier $n=m$. Der Winkel φ bleibt ganz willkührlich, indem die Kurve für alle Werthe von φ eine gerade Linie bildet, welche sich unter dem Winkel $\beta=n\varphi$ gegen die positive Axe neigt und durch den Nullpunkt geht.

Es ist vorhin bemerkt, dass wenn die Kurve sich irgendwo auf eine gerade Linie reduzire, die dieser Reduktion unmittelbar vorangehenden und nachfolgenden Gestalten in Beziehung zu dieser geraden Linie symmetrisch seien. Dieser Satz hat nicht bloss näherungsweise, sondern in aller Strenge Gültigkeit. Um diess einzusehen, werde der Werth des Winkels φ aus Gl. (38) mit φ_1 und der von β aus Gl. (39) mit β_1 bezeichnet. Ist nun AC die Richtung der durch A gehenden reduzirten Kurve, also β_1 der Neigungswinkel CRX von AC gegen die positive reelle Axe OX; so denke man sich von irgend einem Punkte M irgend einer Kurve die Perpendikel MN auf OX und MP auf AC gefällt. Es ist bekanntlich

$$ON=f_1 \text{ und } NM=f_2.$$

Setzt man aber

$$AP=p_1 \text{ und } PM=p_2;$$

so hat man, unter Berücksichtigung, dass

$$OQ=\underset{0}{a}\cos\underset{0}{\alpha} \text{ und } QA=\underset{0}{a}\sin\underset{0}{\alpha} \text{ ist,}$$

$$p_1=f_1\cos\beta_1+f_2\sin\beta_1-\underset{0}{a}\cos(\underset{0}{\alpha}-\beta_1),$$

$$p_2=f_2\cos\beta_1-f_1\sin\beta_1-\underset{0}{a}\sin(\underset{0}{\alpha}-\beta_1);$$

oder wenn man für f_1 und f_2 ihre Werthe aus Gl. (3) substituirt und gehörig zusammenzieht,

$$p_1=\underset{1}{a}r\cos(\underset{1}{\alpha}+\varphi-\beta_1)+\underset{2}{a}r^2\cos(\underset{2}{\alpha}+2\varphi-\beta_1)$$
$$+\underset{3}{a}r^3\cos(\underset{3}{\alpha}+3\varphi-\beta_1)+\ldots+r^n\cos(n\varphi-\beta_1),$$

$$p_2=\underset{1}{a}r\sin(\underset{1}{\alpha}+\varphi-\beta_1)+\underset{2}{a}r^2\sin(\underset{2}{\alpha}+2\varphi-\beta_1)$$
$$+\underset{3}{a}r^3\sin(\underset{3}{\alpha}+3\varphi-\beta_1)+\ldots+r^n\sin(n\varphi-\beta_1).$$

In diese Gleichungen substituire man für die Veränderliche φ den Werth $\varphi_1+\psi$, worin φ_1 den bekannten Werth aus Gl. (38) hat, für welchen die Kurve in die gerade Line AC fällt, und worin ψ eine neue Veränderliche darstellt, welche späterhin denselben Effekt dadurch hervorbringt, dass sie $=0$ gesetzt wird. Durch dise Substitution wird irgend ein in den Ausdrücken von p_1 und p_2 vorkommender Winkel, wie etwa $\underset{m+r}{\alpha}+(m+r)\varphi-\beta_1$, wenn man dabei die obigen Bedingungsgleichungen und auch die Gleichungen (38) und (39) gehörig berücksichtigt,

$$\underset{m+r}{a} + (m+r)\varphi - \beta_1 = \underset{m+r}{a} + (m+r)\varphi_1 - \beta_1 + (m+r)\psi$$
$$= \underset{r}{k}\pi + (m+r)\psi.$$

Der Kosinus hiervon ist $\pm\cos[(m+r)\psi]$ und der Sinus $\pm\sin[(m+r)\psi]$, jenachdem $\underset{r}{k}$ paar oder unpaar ist. Hierdurch erhält man

$$p_1 = \pm \underset{1}{a} r\cos\psi \pm \underset{2}{a} r^2\cos(2\psi) \pm \underset{3}{a} r^3\cos(3\psi) \pm \ldots \pm r^n\cos(n\psi) \quad (41)$$

$$p_2 = \pm \underset{1}{a} r\sin\psi \pm \underset{2}{a} r^2\sin(2\psi) \pm \underset{3}{a} r^3\sin(3\psi) \pm \ldots \pm r^n\sin(n\psi) \quad (42).$$

Will man nun die Kurve bloss in solchen Lagen betrachten, welche der geraden Form AC unmittelbar vorangehen und nachfolgen; so hat man dem Winkel ψ einen unendlich kleinen Werth zu geben. Bleibt man bei den ersten Potenzen der sehr klein gedachten Grösse ψ stehen; so hat man $\cos\psi$, $\cos(2\psi)$, ... $\cos(n\psi)$ gleich 1 und $\sin\psi$, $\sin(2\psi)$, ... $\sin(n\psi)$ resp. gleich ψ, 2ψ, ... $n\psi$; also für solche Werthe

$$p_1 = \pm \underset{1}{a} r \pm \underset{2}{a} r^2 \pm \underset{3}{a} r^3 \pm \ldots \pm r^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

$$p_2 = (\pm \underset{1}{a} r \pm 2\underset{2}{a} r^2 + 3\underset{3}{a} r^3 \pm \ldots \pm nr^n)\psi \quad \ldots\ldots \quad (44).$$

Ob nun die sehr kleine Grösse ψ positiv oder negativ genommen werde, hat auf den Werth von $p_1 = AP$ gar keinen Einfluss. Der Werth von $p_2 = PM$ behält zwar für ein positives und negatives ψ dieselbe Quantität, wechselt aber das Zeichen. Hieraus ist klar, dass die der geraden Form AC unmittelbar vorangehende Kurve Ac_3 ganz symmetrisch ist, mit der unmittelbar nachfolgenden AC_3.

Bei den vorstehenden Untersuchungen ist vorausgesetzt, dass das bekannte Glied $\underset{0}{A} = \underset{0}{a}e^{\underset{0}{\alpha}\sqrt{-1}}$ der gegebenen Gleichung irgend einen von Null verschiedenen Werth habe. Um jetzt das Eigenthümliche des Falles anschaulich zu machen, wo dieses Glied dadurch verschwindet, dass seine Quantität $\underset{0}{a} = 0$ wird, gehe man von einer Gleichung, wie

$$\underset{0}{A} + \underset{m}{A} x^m \underset{m+1}{A} x^{m+1} + \ldots + \underset{n-1}{A} x^{n-1} + x^n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

aus, worin die Quantität des bekannten Gliedes $\underset{0}{A}$ unendlich klein sei. Diese Gleichung hat natürlich n Wurzeln. Wird der Werth einer solchen Wurzel in die x enthaltenden Glieder substituirt; so muss die Summe dieser Glieder dieselbe unendlich geringe Quantität, wie A_0 mit entgegengesetztem Zeichen annehmen. Hierzu ist offenbar nicht nothwendig erforderlich, dass die Quantität einer solchen Wurzel selbst unendlich klein sei; allein es wird unter den n Wurzeln immer eine gewisse Anzahl geben, deren Quantität unendlich klein ist. Dies leuchtet ein, wenn man sich in die vorstehende Gleichung für $x = re^{\varphi\sqrt{-1}}$ nur Werthe von unendlich geringer Quantität r substituirt denkt, oder die für irgend einen Werth von φ entstehenden Kurven in ihren dem

fangspunkt A und dem unendlich benachbarten Nullpunkte O zunächst liegenden Anfangstheilen betrachtet. Zu dem vorliegenden Zwecke führe man statt des Winkels φ, welcher von der Einen Kurve zu der benachbarten variirt, aber für jede einzelne Kurve konstant ist, einen neuen Winkel ψ ein, welcher mit φ durch folgende Bedingung

$$\alpha_m + m\varphi = \alpha_0 + m\psi + \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

oder

$$\varphi = \psi + \frac{\alpha_0 - \alpha_m + \pi}{m} \quad \text{oder} \quad \psi = \varphi + \frac{\alpha_m - \alpha_0 - \pi}{m}$$

verknüpft ist, wobei einer Variation des Winkels φ von 0 bis 2π eine gleichmässige Variation des Winkels ψ von $\frac{\alpha_m - \alpha_0 - \pi}{m}$ bis $2\pi + \frac{\alpha_m - \alpha_0 - \pi}{m}$ entspricht. Hierdurch erhält man aus der gegebenen Gleichung (45)

$$f_1 = a_0 \cos\alpha_0 - a_m r^m \cos(\alpha_0 + m\psi) + r^{m+1} B_1 \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

$$f_2 = a_0 \sin\alpha_0 - a_m r^m \sin(\alpha_0 + m\psi) + r^{m+1} B_2 \quad \ldots\ldots \quad (48),$$

worin die Glieder von der Höhe $(m+1)$, $(m+2) \ldots n$ der Kürze wegen nur durch ein einfaches Zeichen angedeutet sind. Insofern man für $m\psi$ nur Werthe einführt, welche sich unendlich wenig von $0, 2\pi, 4\pi \ldots$, oder für ψ Werthe, welche sich unendlich wenig von $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots \frac{(m-1)2\pi}{m}$ unterscheiden, indem man dieselben resp. mit $0 + \partial\psi, \frac{2\pi}{m} + \partial\psi, \frac{4\pi}{m} + \partial\psi \ldots \frac{(m-1)2\pi}{m} + \partial\psi$ bezeichnet, kann man mit jedem Grade von Genauigkeit $\cos(m\psi) = 1$ und $\sin(m\psi) = m\partial\psi$ setzen. Dies gibt die nur für solche Werthe gültigen Ausdrücke:

$$f_1 = a_0 \cos\alpha_0 - a_m r^m \cos\alpha_0 + m\partial\psi\, a_m r^m \sin\alpha_0 + r^{m+1} B_1,$$

$$f_2 = a_0 \sin\alpha_0 - a_m r^m \sin\alpha_0 - m\partial\psi\, a_m r^m \cos\alpha_0 + r^{m+1} B_2.$$

Der Voraussetzung gemäss ist a_0 eine unendlich kleine Grösse, nimmt man nun auch r unendlich klein, und zwar so, dass $a_m r^m = a_0$, also $r = \sqrt[m]{\frac{a_0}{a_m}}$ ist; so werden die vortsehenden Ausdrücke, wenn man darin die in B_1 und B_2 multiplizirten Glieder gegen die unendlich überwiegenden Glieder von der Höhe m vernachlässigt,

$$f_1 = m\partial\psi\, a_0 \sin\alpha_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

$$f_2 = -\, m\partial\psi\, a_0 \cos\alpha_0 \quad \ldots\ldots \quad (50).$$

Aus dem Vorstehenden erhellet, dass für $\partial\psi=0$ oder für $\psi=0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m} \ldots \frac{(m-1)\pi}{m}$ die Kurve, wenn auch nicht vollkommen durch den Nullpunkt, doch in einer solchen Nähe an demselben vorbeigehen muss, dass ihr Abstand von diesem Punkte im Vergleich zu dem Abstande $OA = A_0 = a_0 e^{\alpha_0\sqrt{-1}} = a r^m e^{\alpha_0\sqrt{-1}}$ unendlich klein ist. Für eln positives $\partial\psi$ geht dieselbe bel einem gleichen Werthe von r durch einen Punkt, welcher im Vergleich zu A in einem endlichen Abstande vom Nullpunkte in einem auf OA errichteten Perpendikel liegt. Für ein negatives $\partial\psi$ aber geht die Kurve durch einen auf entgegengesetzter Seite von OA ähnlich liegenden Punkt. Hieraus folgt, mit Bezugnahme auf die früheren Untersuchungen, dass es zwischen einem solchen positiven und negativen Werthe von $\partial\psi$, also für m Werthe von ψ, welche unendlich nahe resp. an $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m} \ldots \frac{(m-1)2\pi}{m}$ liegen, Wurzeln der Gleichung (45) gibt, deren Quantitäten nahezu den unendlich kleinen Werth $\sqrt[m]{\frac{a_0}{a_m}}$ haben. Dem Winkel φ entsprechen hierfür die m Werthe

$$\frac{\alpha_0-\alpha_m+\pi}{m}, \frac{\alpha_0-\alpha_m+3\pi}{m}, \frac{\alpha_0-\alpha_m+5\pi}{m}, \ldots \frac{\alpha_0-\alpha_m+(2m-1)\pi}{m} \quad (51).$$

Dieses Gesetz wird nun nicht im mindesten alterirt, wenn man sich das bekannte Glied A_0 der gegebenen Gleichung immer kleiner und kleiner werdend denkt. Im Augenblicke des Verschwindens, wo man die Gleichung

$$A_m x^m + A_{m+1} x^{m+1} + \ldots A_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0 \quad (52)$$

erhält, reduziren sich die unendlich kleinen Quantitäten der eben betrachteten m Wurzeln selbst auf null. Es gibt also unter den n Wurzeln dieser Gleichung m, welche gleich null sind.

Eine Gleichung von der Form (51) enthält aber insofern eine Unbestimmtheit, als man sich den Winkel α_0 des fehlenden Anfangsgliedes, welches für keinen Werth dieses Winkels, sondern nur für den annullirten Werth seiner Quantität a_0 zu verschwinden vermag, von jeder beliebigen Grösse denken kann. Hierdurch werden denn auch, nicht die Quantitäten, sondern die Winkel (51) der eben untersuchten m Wurzeln in demselben Maasse unbestimmt. Die Analogie hierzu spricht sich bei der geometrischen Darstellung darin aus, dass jetzt die beiden Punkte O und A zusammenfallen, wodurch der Nullpunkt der Anfangspunkt jeder Kurve wird, sodass es, um die vorstehenden Gesetze zu bewahrheiten, willkührlich bleibt, welchen Winkel man sich unter der Grösse α_0 denken wolle.

Alle bisherigen Untersuchungen haben wir auf die Bewegung der Kurve basirt, welche sich durch die Variation der Grösse r von 0 bis ∞ für ein konstant erhaltenes φ ergibt, indem nun auch dieses φ von 0 bis 2π variirt wurde. Dieselben Thatsachen und daneben verschiedene interessante Beziehungen stellen sich heraus, wenn man jetzt die Bewegung derjenigen Kurve betrachtet, welche sich durch die Variation der Grösse φ von 0 bis 2π für ein konstant erhaltenes r erhält, indem man nun r allmählig von 0 bis ∞ wachsen lässt.

Dass eine jede solche Kurve eine in sich geschlossene sein muss, welche dabei aber verschiedene ganze Umwindungen oder Schlingen bilden kann, leuchtet sofort ein, weil die Werthe von f_1 und f_2 für $\varphi = 2\pi$ dieselben sind, wie für $\varphi = 0$.

Für $r = 0$ reduzirt sich diese Kurve auf den Punkt A, indem man hierfür $f_1 = a_0 \cos\alpha_0$ und $f_2 = a_0 \sin\alpha_0$ hat.

Bei dem jetzt beginnenden Wachsen von r kann man diese Grösse zuvörderst so ungemein klein denken, dass alle übrigen Glieder in den Ausdrücken für f_1 und f_2 gegen das bekannte und das nächstfolgende Glied von geringster Dimension verschwinden. Ist nun x^m die niedrigste Potenz von x in der gegebenen Gleichung; so hat man für solche sehr kleine Werthe von r

$$f_1 = a_0 \cos\alpha_0 + a_m r^m \cos(\alpha_m + m\varphi) \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

$$f_2 = a_0 \sin\alpha_0 + a_m r^m \sin(\alpha_m + m\varphi) \quad \ldots\ldots \quad (54).$$

Hierdurch ist eine Kurve dargestellt, welche sich in m aufeinanderfallenden Kreisen von demselben Radius $a_m r^m$ um den Punkt A herumschlingt. Die wahre Gestalt der Kurve, unter strenger Berücksichtigung der vernachlässigten Glieder, wird eine geschlossene Spirale von m Windungen sein, welche sich nur unendlich wenig von der Kreisform entfernen. Innerhalb aller dieser Windungen liegt der Punkt A, und da der Radius dieser Windungen selbst unendlich klein ist; so liegt der Nullpunkt O nothwendig *ausserhalb* dieser ganzen Kurve.

Denkt man sich jetzt r unendlich gross; so verschwinden alle Glieder gegen das höchste x^n und man hat:

$$f_1 = r^n \cos(n\varphi) \quad f_2 = r^n \sin(n\varphi).$$

Hierdurch ist wiederum eine Spirale dargestellt, welche sich nun aber in n der Kreisform unendlich nahe kommenden Windungen um den Punkt A herumschlingt. Da der Radius r^n für diese Kreisform unendlich gross ist; so muss der Nullpunkt O *innerhalb* aller jener n Windungen liegen.

Bei dem Uebergange der ersteren unendlich kleinen kreisförmigen Spirale von m Windungen, welche den Nullpunkt O ausschliesst, in die letztere unendlich grosse kreisförmige Spirale von n Windungen, welche den Nullpunkt einschliesst, muss nun

dieser Punkt im Ganzen n Mal und auch nicht mehr Mal von der Kurve getroffen werden, was den n Wurzeln der gegebenen Gleichung entspricht.

Um dies nachzuweisen, kann man einen dem früheren ganz ähnlichen Gang einschlagen. Hierbei zeigt sich sofort, dass auch hier keine benachbarte Kurve für $r+\partial r$ weder mit der vorhergehenden für r einen korrespondirenden Punkt gemein haben, noch sich an irgend einer Stelle in der direkten Richtung ihres daselbst liegenden Elementes fortbewegen kann, dass sich also die erstgenannte Spirale in stets übereinander her laufenden Zügen erweitern muss. Hierbei können übrigens Spitzen- und Schlingenbildungen vorkommen. Diese stehen in ganz ähnlichen Beziehungen zu den unmittelbar vorangehenden und nachfolgenden Kurven wie die früher betrachteten Spitzen und Schlingen. Die Untersuchung hierüber wird wesentlich erleichtert, wenn man auf Grund der beiden Gleichungen (12) und (13) in Erwägung zieht, dass jede neue Kurve, wie etwa ... $D_1 M_1 N_1 P_1 E_1$ ... in Taf. XII. Fig. 19. oder Fig. 20. auf allen früher betrachteten Kurven, wie AC_1, AC_2, AC_3 in den Punkten M_1, N_1, P_1, welchen Ein und derselbe Werth von r angehört, normal steht. Hierbei ist die direkte Richtung des von M_1 auslaufenden Elementes $M_1 N_1$ der neuen Kurve gegen die direkte Richtung des korrespondirenden Elementes der Kurve $AM_1 C_1$ stets so, dass das letztere Element um einen rechten Winkel nach der Seite der positiven Rotirung um den Punkt M_1 gedreht erscheint. Einer Spitze der Kurve AC_2 liegt stets eine Spitze der Kurve $E_2 D_2$ direkt gegenüber, wobei die eigentlichen Spitzenpunkte von beiden genau ineinanderfallen. Wie sich früher Spitzen nur aus den links herum schwenkenden Krümmungen der Kurve AC_1 unmittelbar erzeugen konnten; so können jetzt nur rechts herum laufende Krümmungen der Kurve $E_1 D_1$ unmittelbar in Spitzen übergehen. Bei den hieraus entstehenden Spitzen hat man den wiederkehrenden Schenkel stets zur Rechten, wenn man die neuen Kurven $D_1 E_1, D_2 E_2$... stets von Ein und derselben früheren Kurve, z. B. von AC_1, also vom Punkte M_1 her in Richtung ihrer positiven Entstehung durchläuft. Jetzt geht jeder Spitze $D_2 E_2$ eine sich eng zusammenziehende Krümmung $D_1 E_1$ voran, und es folgt eine Schlinge $D_3 E_3$ nach, und es findet nie eine umgekehrte Erscheinung statt. Eine solche Schlinge erweitert sich nun bei der Bewegung der Kurve, also für immer grösser werdende r, mehr und mehr, ohne an irgend einer Stelle eine rückgängige Bewegung anzunehmen, und muss zuletzt den Ausgangspunkt A aller Kurven mit umschlingen (Taf. XII. Fig. 21). Nachdem dies geschehen, hat die Kurve eine ganze Windung um den Punkt A mehr bekommen. Das Verschwinden einer Schlinge oder ganzen Windung bei positiver Fortbewegung der neuen Kurve liegt nach den obigen Gesetzen in der Unmöglichkeit. Die Zahl derselben kann sich also nicht vermindern, sondern nur vermehren, bis diese Anzahl $=n$ geworden ist, welche den unendlich grossen Werthen von r angehört. Da eine jede dieser zusammenhängenden Schlingen oder Windungen sich zuletzt über jede Gränze hinaus erweitern muss und hierbei niemals rückwärts schreiten kann; so folgt, dass von jeder der schliesslich entstehenden n Windungen eine

jede den Nullpunkt, aber auch nur ein einziges Mal treffen muss. Hierdurch sind die n Wurzeln der Gleichung vom $n$ten Grade nachgewiesen.

Das Zusammenfallen eines Punktes der Kurve, worin sich zwei Windungen kreuzen, entspricht dem Falle, dass zwei Wurzeln vorhanden sind, welche bei verschiedenen Werthen von φ dieselbe Quantität r besitzen. Fällt ein Spitzenpunkt der neuen Kurve, welcher zugleich ein Spitzenpunkt der früheren Kurve ist, auf den Nullpunkt; so gibt es, insofern diese Spitze nur Eine auf null reduzirte Schlinge vertritt, zwei vollkommen gleiche Wurzeln.

Wenn das bekannte Glied A_0 der gegebenen Gleichung gleich null, also eine Gleichung wie (52) gegeben ist; so springt aus dem mit dem Nullpunkte zusammenfallenden Punkte A sofort für die kleinsten r eine Spirale mit m Windungen hervor. Dieser Punkt ist daher als die Reduktion von m solchen Windungen anzusehen. Es gibt also dann m Wurzeln gleich null. Die früher erwähnte Unbestimmtheit für diesen Fall, welche darin beruht, dass man nun den Winkel α_0 des bekannten Gliedes willkührlich annehmen kann, was eigentlich m Systeme von unendlich vielen Wurzeln von der Quantität null herbeiführen müsste, spricht sich jetzt darin aus, dass sofort m ganze Kreisumfänge aus dem Nullpunkte hervorgehen, und derselbe daher wie das $m$fache von unendlich vielen Kurvenpunkten zu betrachten ist.

Man findet leicht, dass sich die Spiralkurve niemals wie die früher betrachtete Kurve in einer geraden Linie ausstrecken kann, indem der Werth der goniometrischen Tangente des Neigungswinkels β' der Berührungslinie an der neuen Kurve, nämlich

$$\operatorname{tang}\beta' = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}}{\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}} = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial r}}{\frac{\partial f_2}{\partial r}} = \operatorname{cotang}\beta \;......\; (55)$$

mit Bezugnahme auf die Gl. (36) wohl für die Veränderliche r, nicht aber für die Veränderliche φ einen konstanten Werth annehmen kann. Da man es also jetzt immer mit wahrhaften Kurven zu thun hat; so sind derartige Erläuterungen, wie sie früher bei den Fällen der geradlinigen Kurven nothwendig erschienen, hier ganz überflüssig. Es werden sich demnach mittelst der Spiralkurven auch alle reellen Wurzeln der Gleichung mit reellen Koeffizienten auf eine ganz unzweideutige Weise darstellen.

Dagegen ist es jetzt möglich, dass die Spiralkurve in mehreren aufeinanderfallenden Kreislinien zusammenläuft. Wenn der vom Nullpunkte O nach dem Mittelpunkte dieser Kreislinie führende Strahl durch $ce^{\gamma\sqrt{-1}} = c\cos\gamma + c\sin\gamma.\sqrt{-1}$, also die rechtwinkligen Koordinaten des letzteren Mittelpunktes resp. durch $c\cos\gamma$ und $c\sin\gamma$ dargestellt werden; so würde der Radius R des fraglichen Kreises

$$R = \sqrt{(f_1 - c\cos\gamma)^2 + (f_2 - c\sin\gamma)^2} \quad . \; . \; . \; . \; (56)$$

sein, und wenn der erwähnte Fall überhaupt eintreten sollte, müsste

$$(f_1 - c\cos\gamma)^2 + (f_2 - c\sin\gamma)^2$$

ein Ausdruck sein, welcher fähig wäre, für einen gewissen Werth von r einen von φ ganz unabhängigen Werth anzunehmen. Entwickelt man nach geschehener Substitution der Funktionen für f_1 und f_2 aus Gl. (3) den vorstehenden Ausdruck und ordnet denselben gehörig nach der Grösse φ; so findet man leicht, dass

$$c = \underset{0}{a}, \; \gamma = \underset{0}{\alpha}, \; \underset{1}{a} = 0, \; \underset{2}{a} = 0, \; \underset{3}{a} = 0, \ldots\ldots \underset{n-1}{a} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (57)$$

die nothwendigen Bedingungen für die Möglichkeit des vorstehenden Falles sind.

Hieraus folgt, dass bei jeder binomischen Gleichung $\underset{0}{A} + x^n = 0$, oder $\underset{0}{a} e^{\underset{0}{\alpha}\sqrt{-1}} + r^n e^{n\varphi\sqrt{-1}} = 0$, also auch bei jeder Gleichung ersten Grades, aber auch nur bei einer solchen Gleichung, die in Rede stehende Kurve einen Spiralkreis um den Punkt A als Mittelpunkt bildet. Dieselbe geht sofort als ein n facher Kreis aus dem Punkte A hervor, und bleibt stets ein solcher Kreis vom Halbmesser $R = r^n$. Die früher betrachteten Kurven werden für diesen Fall bekanntlich zu lauter geraden Linien, welche von dem Mittelpunkte A jenes Kreises auslaufen.

XX.

Bestimmung des Integrals

$$\int^{\frac{1}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Von dem

Herrn Hofrath Oettinger

zu Freiburg i. B.

Bekanntlich ist ein Integral mit positivem Exponenten gleich einem Differenziale mit demselben negativen Exponenten und umgekehrt, oder

$$1)\qquad \int^{n} fx(\partial x)^{n} = \frac{\partial^{-n}}{(\partial x)^{-n}} fx,$$

$$2)\qquad \frac{\partial^{n} fx}{(\partial x)^{n}} = \int^{-n} (fx)(\partial x)^{-n}.$$

Hieraus hat man folgende Beziehungen:

$$3)\qquad \int^{m-n} fx\,(\partial x)^{m-n} = \frac{\partial^{n-m} fx}{(\partial x)^{n-m}},$$

$$4)\qquad \int^{m}\left(\frac{\partial^{n} fx}{(\partial x)^{n}}\right)(\partial x)^{m} = \frac{\partial^{n}}{(\partial x)^{n}}\left(\int^{m} fx(\partial x)^{m}\right).$$

Die Darstellungen 3) und 4) dienen zur Werthbestimmung des oben vorgelegten Integrals und zwar dadurch, dass man es auf ein Integral mit ganzem Exponenten (hier die gewöhnliche Integralform) zurückführt. Man erhält sofort folgende zwei Uebergangsformen:

5) $$\int^{\frac{1}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\int\left(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\right)\partial x=\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\left(\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}}\right).$$

Um den Werth von 5) zu bestimmen, hat man folgende Darstellungen für Differenziale mit gebrochenen Exponenten nöthig, deren Entwickelung keiner weitern Schwierigkeit unterliegt:

6) $$\frac{\partial^{\frac{p}{q}}x^{\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}=\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,x^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}}}{1^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}|1}}=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)x^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}}}{\Gamma\left(\frac{n}{m}-\frac{p}{q}+1\right)},$$

7) $$\frac{\partial^{\frac{p}{q}}x^{-\frac{n}{m}}}{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}=\frac{(-)^{\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}\,x^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}=\frac{(-)^{\frac{p}{q}}\Gamma\left(\frac{p}{q}+\frac{n}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)x^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}.$$

In diesen Darstellungen ist neben der Kramp'schen Bezeichnung der Fakultäten $1^{x|1}=1.2.3\ldots.x$ auch die von Legendre $\Gamma(x+1)=1.2.3\ldots.x$ aufgeführt, weil diese in Deutschland mehr gekannt zu sein scheint, als die Kramp'sche; obgleich die Legendre'sche dem Begriff von Fakultät in keiner Weise entspricht und sich auch zur weitern Benutzung in der Theorie der Fakultäten ganz unbrauchbar zeigt.

Behandelt man nun die erste Form in 5) nach 7), so wird

$$\frac{\partial^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(-)^{\frac{1}{2}}}{1^{-\frac{1}{2}|1}x}=\frac{\sqrt{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})x}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}.x},$$

da $1^{-\frac{1}{2}|1}=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ist.

Durch Einführung dieses Werthes in 5) entsteht

8) $$\int^{\frac{1}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\int\frac{\partial x}{x}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\lg x.$$

Aus der zweiten Form in 5) hat man nach den bekannten Regeln:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\,.$$

Wird dieser Werth in die zweite Form von 5) eingeführt und wird dann die Gleichung 6) angewendet, se entsteht

$$9)\qquad \int^{\frac{1}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=2\cdot\frac{\partial^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}=2.\,1^{\frac{1}{2}|1}.x^{0}=\frac{2.\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}=\sqrt{\pi},$$

weil $1^{\frac{1}{2}|1}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\Gamma(\frac{1}{2}+1)$ ist.

Hiernach hat man, wie aus 8) und 9) hervorgeht, durch verschiedene Behandlung des Integrals

$$\int^{\frac{1}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}$$

zwei unter sich verschiedene Werthe für dasselbe, einen imaginären in Verbindung mit Logarithmen und einen reellen.

Diese verschiedene Werthbestimmung beruht nach dem Vorliegenden darauf, dass man nach 5) zuerst differenzirt und dann integrirt und andererseits zuerst integrirt und dann differenzirt, also auf einer veränderten Ordnung und Ausführung der vorgeschriebenen Geschäfte.

Setzt man nun die hier begonnene Behandlungsweise fort, so erhält man folgende Integrale mit gebrochenen Exponenten aus 8):

$$10)\qquad \int^{\frac{3}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}(x\lg x-x),$$

$$\int^{\frac{5}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^{2}\lg x}{2}-\frac{3x}{4}\right),$$

$$\int^{\frac{7}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^{3}\lg x}{6}-\frac{11x^{3}}{36}\right),$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$\int^{\frac{2r+1}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{2r+1}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x^{r}\lg x}{1.2.3\ldots r}-\frac{C(1,2,3,\ldots r)^{r-1}x^{r}}{1.2^{2}.3^{2}\ldots r^{2}}\right).$$

Aus 9) aber erhält man:

$$11)\qquad \int^{\frac{3}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=x\sqrt{\pi},$$

$$\int^{\frac{5}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{x^{2}\sqrt{\pi}}{1.2},$$

$$\int^{\frac{7}{2}}\frac{(\partial x)^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{x^{3}\sqrt{\pi}}{1.2.3},$$

$$\vdots$$

$$\int^{\frac{2r+1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{2r+1}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{x^r \sqrt{\pi}}{1.2.3 \ldots . r}$$

Beide Darstellungen (10) und (11) sind besondere Fälle von folgenden allgemeinern:

$$12) \quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{(-)^{1-\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}-1|1}} \left(\frac{x^r \lg x}{1.2.3..r} - \frac{C(1,2,\ldots . r)^{r-1} x^r}{1.2^2.3^2 \ldots . r^2} \right),$$

$$13) \quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1} x^r}{1.2.3 \ldots r}.$$

Liouville hat das Integral $\int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}$ im Journ. d. l'école polyt. T. XIII. Cah. 21. Pg. 161 und 162 behandelt und nur die Gleichung 8) und den ersten Ausdruck von 10) gefunden. Diess kommt daher, dass er nur nach einer Ansicht die vorstehende Aufgabe untersucht hat, und zwar dadurch, dass er zuerst differenzirt und dann integrirt. Die Möglichkeit der zweiten Behandlungsweise scheint er übersehen zu haben. Das allgemeine Gesetz, das hier in 10) und 12) angegeben ist, hat er nicht entwickelt, denn er blieb bei den zwei ersten Integralausdrücken stehen. Die Ausdrücke 11), 12), und 13) finden sich in dem angeführten Werke aus dem angeregten Grunde nicht vor.

Sind nun die hier gefundenen Resultate, wie nicht zu bezweifeln ist und wie sich noch auf andere Weise darthun lässt, richtig, so werden die in 3) und 4) aufgestellten Gesetze nicht ohne alle Beschränkung hinzunehmen sein, denn es kann, wie hier vorliegt, der Fall eintreten, dass die Anwendung des in ihnen liegenden Gesetzes auf verschiedene Resultate führt. Hiedurch wird Folgendes gerechtfertigt sein.

Die Ordnung im Differenziren und Integriren ist nicht immer gleichgültig. Sie kann auf verschiedene Resultate führen. Die in 3) und 4) liegenden Gesetze sind daher mit Vorsicht zu gebrauchen.

Die Angabe der Zahlenwerthe des Ausdrucks

$$C(1, 2, 3 \ldots . r)^{r-1} = A_r$$

in der Gleichung 13) und der Fakultät $1^{r|1}$ verursacht bei etwas höhern Zahlen viele Mühe. Wir geben hierüber folgende Zusammenstellung:

$A_1 = 1$	$1^{1\|1} = 1$
$A_2 = 3$	$1^{2\|1} = 2$
$A_3 = 11$	$1^{3\|1} = 6$
$A_4 = 50$	$1^{4\|1} = 24$
$A_5 = 274$	$1^{5\|1} = 120$
$A_6 = 1764$	$1^{6\|1} = 720$
$A_7 = 13068$	$1^{7\|1} = 5040$
$A_8 = 109584$	$1^{8\|1} = 40320$
$A_9 = 1026576$	$1^{9\|1} = 362880$
$A_{10} = 10628640$	$1^{10\|1} = 3628800$
$A_{11} = 120543840$	$1^{11\|1} = 39916800$
$A_{12} = 1486442880$	$1^{12\|1} = 479001600$
$A_{13} = 19802759040$	$1^{13\|1} = 6227020800$
$A_{14} = 283465647360$	$1^{14\|1} = 87178291200$
$A_{15} = 4339163001600$	$1^{15\|1} = 1307674368000$
$A_{16} = 70734282393600$	$1^{16\|1} = 20922789888000$
$A_{17} = 1223405590579200$	$1^{17\|1} = 355687428096000$
$A_{18} = 22376988058521600$	$1^{18\|1} = 6402373705728000$
$A_{19} = 431565146817638400$	$1^{19\|1} = 121645100408832000$
$A_{20} = 8752948036761600000,$	$1^{20\|1} = 2432902008176640000.$

Diese Zahlenwerthe wurden auf zwei verschiedene Weisen berechnet und richtig befunden.

XXI.

Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Die in meiner Abhandlung „Beitrag zur Theorie der quadratischen Formen“ (Grunert Archiv XIII. pag. 105 ff.) entwickelten Resultate führen zunächst zur Auflösung dreier Hauptprobleme über die Transformabilität der quadratischen Formen, welche in den Disquisitionibus Arithmeticis nicht zur Sprache gebracht werden.

Erste Aufgabe. Sämmtliche Klassen der quadratischen Formen von bestimmter Determinante zu finden, welche in das Produkt zweier gegebenen Formen transformabel sind.

Auflösung. Man bezeichne die gegebenen Formen durch

$$f=(a,b,c),\ f'=(a',b',c');$$

ihre Determinanten durch d,d'; das grösste gemeinschaftliche Maass von a, $2b$, c sei m, und eine ähnliche Bedeutung habe m' in Bezug auf die Form f'; endlich sei D' die Determinante der gesuchten Formen, und D das grösste gemeinschaftliche Maass von $dm'm'$, $d'mm$. Soll nun die Aufgabe nicht unmöglich sein, so muss D durch D' theilbar, und der Quotient ein Quadrat sein, wesshalb wir $D=D'kk$ setzen, wo k eine positive ganze Zahl

bedeutet; dies vorausgesetzt, muss jede in das Produkt ff' transformabele Form jede beliebige aus f, f' auf dieselbe Weise zusammengesetzte Form eigentlich einschliessen, und umgekehrt (Disq. Arithm. Art. 239. 238.), und daraus ergiebt sich folgende Lösnng unserer Aufgabe.

Man suche eine beliebige aus f, f' in Bezug auf beide Formen direct zusammengesetzte Form F, welche die Determinante $D=D'kk$ haben wird, und bestimme die Klassen aller Formen F' von der Determinante D', welche F eigentlich einschliessen; die Aufgabe wird hiermit vollständig gelöst sein, wenn f, f' in der Transformation aus F' in ff' beide direct genommen werden sollen. Will man beide invers nehmen, so legt man eine aus f, f' auf eben diese Weise zusammengesetzte Form zu Grunde, und auf ähnliche Art wird man sich verhalten, wenn eine der Formen f, f' direct, die andere invers genommen werden soll.

Was aber die Aufgabe betrifft: „die Klassen aller Formen von der Determinante D' zu finden, welche die gegebene Form $F=(A,B,C)$ von der Determinante $D'kk$ eigentlich einschliessen", so habe ich deren Lösung in der am Eingange erwähnten Abhandlung gegeben. Man findet zunächst eine endliche Menge von Formen (A',B',C'), welcher alle die Form F eigentlich einschliessenden Formen eigentlich äquivalent sein müssen, und es bleibt dann bloss noch übrig, dieselben in Klassen zu bringen. Die Berechnung von A', B', C' wird nach folgenden Formeln geführt:

$$A'=\frac{A}{tt}, \quad uB'\equiv\frac{B}{t} \text{ (mod. } A'), \quad C'=\frac{B'B'-D'}{A'};$$

wo $k=tu$, t jedweden positiven Theiler von k bedeutet, dessen Quadrat A misst, der folglich wegen der Gleichung $BB-AC=D'kk$ in B aufgeht; wobei zu bemerken, dass diejenigen Zerlegungen von k in tu zu verwerfen sind, für welche B', C' keine ganzen Zahlen werden.

Beispiel.

$$f=(9,\ 3,\ 29),\ f'=(8,\ 2,\ 32),\ d=d'=-252,\ D=-252.$$

$D'=-7$ misst D, der Quotient ein Quadrat, nämlich 36, also $k=6$. Man findet $F=(4,2,64)$; für $t=1$, $u=6$ wird

$$A'=4,\ CB'\equiv 2 \text{ (mod. 4)},\ B'=1,\ 3;\ C'=2,\ 4 \text{ resp.};$$

für $t=2$, $k=3$ wird

$$A'=1,\ 3B'\equiv 1 \text{ (mod. 1)},\ B'=0,\ C'=7$$

also erhält man die drei Formen

$$(4,1,2);\ (4,3,4);\ (1,0,7);$$

welche aber nur zwei Klassen bilden, deren Repräsentanten (1,0,7); (2,1,4) sind.

Zweite Aufgabe. Zu beurtheilen, ob eine gegebene Form F' in das Produkt zweier ebenfalls gegebener Formen f, f' transformabel ist.

Auflösung. Man bestimme eine beliebige aus f, f' direct zusammengesetzte Form F, so z. B., dass beide Formen direct in die Composition eingehen, und untersuche, ob F unter F' eigentlich enthalten ist; jenachdem dies der Fall ist, oder nicht, wird F' in ff' transformabel, oder nicht transformabel sein, unter der Voraussetzung, dass f, f' beide direct in dieser Transformation zu nehmen sind. Um zu finden, ob F' auf eine andere Weise in ff' transformabel ist, wird man wieder eine aus beiden Formen auf dieselbe Weise zusammengesetzte Form zu Grunde legen.

Dritte Aufgabe. Die Form F' ist in das Produkt ff' auf bekannte Weise transformabel; man sucht sämmtliche darauf Bezug habende Transformationen aus F' in ff'.

Auflösung. Man suche eine beliebige Form F, welche aus f, f' eben so zusammengesetzt ist, wie F' in ff' transformabel, und wird dabei zugleich eine Transformation aus F in ff' kennen lernen, welche durch p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''' bezeichnet werden mag (s. m. Abh. Mémoire sur la théorie des formes quadratiques, Archiv XIII.). Bestimmt man nun alle eigentlichen Transformationen aus F' in F, deren Inbegriff durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werde (Archiv XIII. pag. 105 ff.), und macht

$$\mathfrak{p}=\alpha p+\beta q,\quad \mathfrak{p}'=\alpha p'+\beta q',\quad \mathfrak{p}''=\alpha p''+\beta q'',\quad \mathfrak{p}'''=\alpha p'''+\beta q''';$$

$$\mathfrak{q}=\gamma p+\delta q,\quad \mathfrak{q}'=\gamma p'+\delta q',\quad \mathfrak{q}''=\gamma p''+\delta q'',\quad \mathfrak{q}'''=\gamma p'''+\delta q''';$$

so wird $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'', \mathfrak{p}'''$; $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}', \mathfrak{q}'', \mathfrak{q}'''$ der Inbegriff aller der Transformationen aus F' in ff' sein, für welche f, f' auf die bekannte Art genommen werden.

Der Beweis für dieses Verfahren folgt aus den im Art. 239. der Disq. Arithm. angestellten Betrachtungen, die hier nicht wiederholt werden sollen.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die Zerlegung einer quadratischen Form F in zwei andere f, f', deren eine gegeben ist, während die andere gesucht wird, wobei alle drei Formen dieselbe Determinante haben.

1. *Lehrsatz.* Wenn die drei Formen F, f, f' dieselbe Determinante D haben, und F in das Produkt ff' durch die Substitution p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''' transformabel ist, so wird f' in das Produkt aus F und

der Entgegengesetzten von f durch die Substitution $-q', p', q''', -p'''; q, -p, -q'', p''$ transformabel sein.*)

Beweis. Es sei

$$F=(A,B,C),\quad f=(a,b,c),\quad f'=(a',b',c').$$

Da F in ff' transformabel ist, und alle drei Formen dieselbe Determinante haben, so existiren die folgenden neun Gleichungen. (Disq. Arithm. Art. 235.):

$$pq'-qp'=a,\ pq''-qp''=a',\ pq'''-qp'''=b'+b,\ p'q''-q'p''=b'-b,$$
$$p'q'''-q'p'''=c',\quad p''q'''-q''p'''=c;\quad q'q''-qq'''=A,$$
$$pq'''+qp'''-p'q''-q'p''=2B,\ p'p''-pp'''=C.$$

Nun folgt aus diesen Gleichungen:

$$q'p-qp'=a,\ q'q''-qq'''=A,\ -q'p''+qp'''=B-b,\ -p'q''+pq'''$$
$$=B+b,\ p'p''-pp'''=C,\quad q'''p''-q''p'''=c;\ pq''-qp''=a',$$
$$-q'p''-qp'''+p'q''+pq'''=2b',\quad p'q'''-q'p'''=c';$$

folglich ist (a', b', c') in das Produkt der Formen (A, B, C), $(a, -b, c)$ mittelst der im Lehrsatz gesagten Substitution transformabel (Disq. Arithm. art. 235.).

Umgekehrt, wenn (a', b', c') in $(A,B,C)\times(a,-b,c)$ transformabel ist, so wird (A, B, C) in $(a,b,c)\times(a',b',c')$ transformabel sein.

2. Es seien

$$F=(A,B,C),\quad f=(a,b,c),\quad f'=(a',b',c')$$

drei Formen von derselben Determinante D, M das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen A, $2B$, C und m, m' haben eine ähnliche Bedeutung in Bezug auf die Formen f, f'. Wenn nun F aus f, f' zusammengesetzt ist, so hat man bekanntlich $M=mm'$; ferner wird auch M gegen m' prim sein, da D, die Determinante der zusammengesetzten Form, das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen $Dm'm'$, Dmm sein muss. — Sind also F, f gegebene Formen von derselben Determinante D, und man will eine Form von eben dieser Determinante finden, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F resultirt, so muss M durch m theilbar, und der Quotient gegen m prim sein. Diese Bemerkung rechtfertigt die Beschränkung, welche wir in der nächsten Aufgabe machen werden.

*) Es wird von jetzt an nur der Hauptfall betrachtet, wo bei der Zusammensetzung oder Transformation die Formen direct genommen werden.

3. *Aufgabe.* $F=(A, B, C)$, $f=(a, b, c)$ sind zwei gegebene Formen von derselben Determinante D; M, m die grössten gemeinschaftlichen Maasse von A, $2B$, C; a, $2b$, c resp., und $\frac{M}{m}$ ist eine ganze Zahl, prim gegen m; man sucht die Klassen aller Formen f' der nämlichen Determinante D, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F resultirt.

Auflösung. Man bestimme die Klassen aller Formen $f'=(a', b', c')$ von der Determinante D, welche in das Produkt der Formen F, $(a, -b, c)$ transformabel sind (erste Aufgabe), und behalte nur diejenigen bei, für welche a', $2b'$, c' das grösste gemeinschaftliche Maass $\frac{M}{m}=m'$ haben; klassifizirt man die letzteren, so wird die Aufgabe gelöst sein.

Denn da f' in das Produkt $F\times(a, -b, c)$ transformabel ist, so muss F in $f'\times(a,b,c)=ff'$ transformabel sein (erster Lehrsatz); nun ist aber, da m' gegen m prim, die Determinante von F, nämlich D, das grösste gemeinschaftliche Maass von $Dm'm'$, Dmm, folglich F aus f, f' zusammengesetzt. — Umgekehrt, wenn f' mit f zusammengesetzt F hervorbringt, so muss f' in $F\times(a, -b, c)$ transformabel, und das gemeinschaftliche Maass von a', $2b'$, c' nothwendig gleich $\frac{M}{m}$ sein; folglich giebt es keine Klassen von Formen f', welche durch das gelehrte Verfahren nicht gefunden würden.

In Bezug auf die Anwendung dieser Regel werden noch folgende Bemerkungen von Nutzen sein.

Um die Formen f' von der Determinante D zu finden, welche in $F\times(a, -b, c)$ transformabel sind, hat man zunächst F und $(a, -b, c)$ zusammenzusetzen. Die resultirende Form, welche offenbar die Determinante Dmm haben wird, heisse $\mathfrak{F}=(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Hierauf sind die die Form $\mathfrak{F}$ eigentlich einschliessenden Formen von der Determinante D zu bestimmen. Zu dem Ende hat man, $m=tu$ gesetzt,

$$a'=\frac{\mathfrak{A}}{tt}, \quad ub'\equiv\frac{\mathfrak{B}}{t} \pmod{a'}, \quad b'b'-a'c'=D.$$

Das grösste gemeinschaftliche Maass von $\mathfrak{A}$, $2\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist bekanntlich $Mm=mmm'$, mithin sind $\mathfrak{A}$, $2\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sämmtlich durch mm

theilbar, also auch $\frac{\mathfrak{B}}{m}$ eine ganze Zahl*); hieraus ergiebt sich, dass

$$\frac{\mathfrak{A}}{tt},\ \frac{\mathfrak{B}}{tu},\ \frac{a'}{tu},\ \frac{\mathfrak{C}}{uu},\ \frac{2\mathfrak{B}}{mu}$$

ganze Zahlen sein werden, welche Zerlegung von m in tu angewandt werden möge. Nun hat man

$$b' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{m} \,(\text{mod.}\, \frac{a'}{u}),$$

folglich

$$b' = \frac{\mathfrak{B}}{m} + \varrho \frac{a'}{u},$$

wo für ϱ die Zahlen 0, 1, 2,.... $u-1$, oder überhaupt alle nach u incongruenten Werthe zu nehmen sind, und man findet

$$c' = \frac{\mathfrak{C}}{uu} + \frac{2\varrho\mathfrak{B}}{mu} + \frac{\varrho\varrho\mathfrak{A}}{mm},$$

folglich sind a', b', c' für jedwede Zerlegung von m ganze Zahlen. Die Berechnung reducirt sich somit, nachdem die Form $\mathfrak{F} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ gefunden worden, auf die folgenden Formeln:

$$m = tu,\ a' = \frac{\mathfrak{A}}{tt},\ b' = \frac{\mathfrak{B}}{m} + \varrho \frac{a'}{u},\ c' = \frac{\mathfrak{C}}{uu} + \frac{2\varrho\mathfrak{B}}{um} + \frac{\varrho\varrho\mathfrak{A}}{mu};$$

wobei zu bemerken, dass c' auch nach der Formel $c' = \frac{b'b' - D}{a'}$ gefunden wird, wenn nur a' nicht verschwindet.

Unter den auf diese Weise berechneten Formen (a', b', c'), deren Menge offenbar der Summe aller Theiler von m gleichkommt, sind diejenigen auszuwerfen, für welche das grösste gemeinschaftliche Maass von a', $2b'$, c' nicht gleich $\frac{M}{m}$ ist, um die übrig bleibenden in Klassen zu bringen.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn $m = 1$, d. h. f eine eigentlich primitive Form ist, die Form $\mathfrak{F}$ die Determinante D erhält,

---

*) $\frac{2\mathfrak{B}}{mm}$ ist eine ganze Zahl, folglich $\frac{\mathfrak{B}}{m}$ ebenfalls, wenn m ungerade; wenn aber m gerade, so hat man $\frac{2\mathfrak{B}}{mm} = \frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}mm}$, mithin $\frac{\mathfrak{B}}{m}$ wiederum eine ganze Zahl.

folglich mit f eigentlich äquivalent ist, was auf folgenden im Art. 249. der Disq. Arithm. auf anderem Wege gefundenen Satz führt: „Wenn F, f zwei Formen von derselben Determinante sind, deren letztere eigentlich primitiv, so giebt es immer Formen der nämlichen Determinante, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F resultirt; aber sie gehören alle in eine Klasse, in welcher sich auch die aus F und der Entgegengesetzten von f zusammengesetzte Form befindet.

Beispiele.

1) $F=(12, 6, 24)$, $f=(3, 0, 84)$, $D=-252$.

Hier ist $M=12$, $m=3$, also $m'=4$. Man findet

$$\mathfrak{F}=(36, -54, 144),$$

daraus

$$(a', b', c')=(4, -18, 144);\ (36, -18, 16);\ (36, -6, 8);\ (36, 6, 8).$$

Für alle diese Formen ist $m'=4$; auch gehören sie in verschiedene Klassen, deren Repräsentanten

$$(4, 2, 64);\ (8, 2, 32);\ (8, -2, 32);\ (16, 2, 16)$$

sind.

2) $F=(20, 5, -30)$, $f=(6, -1, -104)$, $D=625$.

Hier ist $M=10$, $m=2$, also $m'=5$. Man findet

$$\mathfrak{F}=(120, -70, 20),$$

daraus

$$(a', b', c')=(30, -35, 20);\ (120, -35, 5);\ (120, 25, 0).$$

Die erste und dritte dieser Formen sind zu verwerfen, also bleibt (120, −35, 5), welche mit (5, 25, 0) eigentlich äquivalent ist.

4. *Lehrsatz.* Indem die in der vorigen Aufgabe angegebenen Bedingungen beibehalten werden, so giebt es immer mindestens *eine* Klasse von Formen, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F hervorgeht.

Beweis. Wenn die Form $\mathfrak{F}=(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ nicht schon so beschaffen ist, dass $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ relative Primzahlen sind, so behaupte ich, dass man immer eine mit $\mathfrak{F}$ eigentlich äquivalente Form finden kann, für welche diese Bedingung Statt hat. Es sind, um dies darzuthun, zwei Fälle zu unterscheiden.

I. $\mathfrak{F}$ sei aus einer eigentlich primitiven Form $(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{C}^0)$ abgeleitet. In diesem Falle ist

$$\mathfrak{A}^0 = \frac{\mathfrak{A}}{Mm}, \quad \mathfrak{B}^0 = \frac{\mathfrak{B}}{Mm}, \quad \mathfrak{C}^0 = \frac{\mathfrak{C}}{Mm};$$

$$\mathfrak{B}^0\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{A}^0\mathfrak{C}^0 = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{(Mm)^2} = \frac{Dmm}{(Mm)^2} = \frac{D}{MM}.$$

Durch die eigentlich primitive Form

$$\mathfrak{A}^0xx + 2\mathfrak{B}^0xy + \mathfrak{C}^0yy$$

können nun unendlich viele Zahlen dargestellt werden, welche gegen jede gegebene Zahl prim sind (Disq. Arithm. art. 228.), und man kann annehmen, dass die Werthe von x und y, mit Hülfe deren dies geschieht, relative Primzahlen sind*); es sei also

$$\mathfrak{A}^0\alpha\alpha + 2\mathfrak{B}^0\alpha\gamma + \mathfrak{C}^0\gamma\gamma = \mathfrak{A}^{0\prime} \text{ prim gegen } \frac{2Dm}{MM},$$

$$\alpha \text{ prim gegen } \gamma;$$

durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für welche $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, wird man $(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{C}^0)$ in eine eigentlich äquivalente Form $(\mathfrak{A}^{0\prime}, \mathfrak{B}^{0\prime}, \mathfrak{C}^{0\prime})$ verwandeln, und

$$(Mm\mathfrak{A}^0, Mm\mathfrak{B}^0, Mm\mathfrak{C}^0) = \mathfrak{F}, \quad (Mm\mathfrak{A}^{0\prime}, Mm\mathfrak{B}^{0\prime}, Mm\mathfrak{C}^{0\prime}) = \mathfrak{F}'$$

werden ebenfalls eigentlich äquivalente Formen sein. Jetzt müssen

$$\frac{Mm\mathfrak{A}^{0\prime}}{Mm} = \mathfrak{A}^{0\prime}, \quad \frac{2Mm\mathfrak{B}^{0\prime}}{M} = 2m\mathfrak{B}^{0\prime}$$

relative Primzahlen sein. Denn hätten sie einen Primfactor gemein, so würde derselbe in

$$\frac{2Dm}{MM} = 2m(\mathfrak{B}^0\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{A}^0\mathfrak{C}^0) = 2m(\mathfrak{B}^{0\prime}\mathfrak{B}^{0\prime} - \mathfrak{A}^{0\prime}\mathfrak{C}^{0\prime}).$$

*) Wäre

$$\mathfrak{A}^0\alpha\alpha + 2\mathfrak{B}^0\alpha\gamma + \mathfrak{C}^0\gamma\gamma = \mathfrak{A}^{0\prime}$$

prim gegen die gegebene Zahl Z, so dass α und γ das gr. gem. Maass μ hätten, so würde, $\alpha = \mu\alpha^0$, $\gamma = \mu\gamma^0$ gesetzt,

$$\mathfrak{A}^0\alpha^0\alpha^0 + 2\mathfrak{B}^0\alpha^0\gamma^0 + \mathfrak{C}^0\gamma^0\gamma^0 = \frac{\mathfrak{A}^{0\prime}}{\mu\mu},$$

$\frac{\mathfrak{A}^{0\prime}}{\mu\mu}$ ebenfalls prim gegen Z, α^0 prim gegen γ^0 sein.

aufgehen, während $\mathfrak{A}^{0\prime}$ prim gegen $\frac{2Dm}{MM}$ genommen wurde. Also ist $\mathfrak{F}'$ eine Form von der verlangten Eigenschaft.

II. $\mathfrak{F}$ sei aus einer uneigentlich primitiven Form $(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{C}^0)$ abgeleitet. In diesem Falle ist

$$\mathfrak{A}^0 = \frac{\mathfrak{A}}{\frac{1}{2}Mm}, \quad \mathfrak{B}^0 = \frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}Mm}, \quad \mathfrak{C}^0 = \frac{\mathfrak{C}}{\frac{1}{2}Mm};$$

$$\mathfrak{B}^0\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{A}^0\mathfrak{C}^0 = \frac{4D}{MM}.$$

Durch die Form

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}^0 xx + \mathfrak{B}^0 xy + \frac{1}{2}\mathfrak{C}^0 yy$$

werden Zahlen dargestellt, welche gegen $\frac{4Dm}{MM}$ prim sind, so dass $x = \alpha$, $y = \gamma$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben; eine solche Zahl sei $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{0\prime}$. Transformirt man nun $(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \mathfrak{C}^0)$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für welche $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, in $(\mathfrak{A}^{0\prime}, \mathfrak{B}^{0\prime}, \mathfrak{C}^{0\prime})$, so sind

$$\mathfrak{F} \text{ und } (\tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{A}^{0\prime}, \ \tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{B}^{0\prime}, \ \tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{C}^{0\prime})$$

eigentlich äquivalente Formen, und

$$\frac{\frac{1}{2}Mm\mathfrak{A}^{0\prime}}{Mm} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{0\prime}, \quad \frac{Mm\mathfrak{B}^{0\prime}}{M} = m\mathfrak{B}^{0\prime}$$

relative Primzahlen, da

$$\frac{4Dm}{MM} = m(\mathfrak{B}^0\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{A}^0\mathfrak{C}^0) = m(\mathfrak{B}^{0\prime}\mathfrak{B}^{0\prime} - \mathfrak{A}^{0\prime}\mathfrak{C}^{0\prime})$$

ist. Die Form von der geforderten Eigenschaft ist also

$$(\tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{A}^{0\prime}, \ \tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{B}^{0\prime}, \ \tfrac{1}{2}Mm\mathfrak{C}^{0\prime}).$$

Da nun jede mit $\mathfrak{F}$ eigentlich äquivalente Form, ebenso wie selbst, aus f, f' zusammengesetzt ist, und in der Aufgabe 3. e beliebige aus f, f' zusammengesetzte Form zu Grunde ge-

legt werden durfte, so sei $\mathfrak{F}=(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ eine Form der Art, dass $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ keinen Faktor gemein haben.

Dies vorausgesetzt, wird unter den in 3. gefundenen Formen immer diejenige mit f zusammengesetzt F geben, welche durch die besonderen Werthe $t=m$, $u=1$, $\varrho=0$ hervorgeht, nämlich die Form $(\frac{\mathfrak{A}}{mm}, \frac{\mathfrak{B}}{m}, \mathfrak{C})$, da $\frac{\mathfrak{A}}{mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{m}$, $\mathfrak{C}$ das grösste gemeinschaftliche Maass m' haben.*)

Uebrigens ist zu bemerken, dass man solche Werthe von $x=\alpha$, $y=\gamma$, mit deren Hülfe die primitive Form

$$\mathfrak{A}^{\circ}xx+2\mathfrak{B}^{\circ}xy+\mathfrak{C}^{\circ}yy$$

einen Werth erlangt, welcher gegen eine gegebene Zahl, oder deren Hälfte prim ist, nach einer bestimmten Methode finden kann, worüber art. 228. der Disq. Arithm. zu vergleichen.

Beispiel. Ist

$$F=(120, -70, 20), \quad f=(6, -1, -104),$$

wo $D=625$, $M=10$, $m=2$, $m'=5$, so findet sich $\mathfrak{F}=(120, -70, 20)$ aus der uneigentlich primitiven Form $(12, -7, 2)$ abgeleitet; und da $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ den Factor 2 gemein haben, so ist $\mathfrak{F}$ zu transformiren. Zu dem Ende ist

$$6\alpha\alpha-7\alpha\gamma+\gamma\gamma=\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{\circ\prime}$$

prim gegen 50 zu nehmen. Dieser Bedingung genügen $\alpha=6$, $\gamma=5$; β, δ kann man resp. $=1, 1$ setzen; dadurch kommt

$$(\mathfrak{A}^{\circ\prime}, \mathfrak{B}^{\circ\prime}, \mathfrak{C}^{\circ\prime})=(62, 5, 0), \quad \mathfrak{F}'=(620, 50, 0);$$

folglich $f'=(155, 25, 0)$, wofür man die Reducirte $(5, 25, 0)$ anwenden kann.

---

*) Es ist

$$\frac{\mathfrak{A}}{mmm'}=\frac{\mathfrak{A}}{Mm}, \quad \frac{2\mathfrak{B}}{mm'}=\frac{2\mathfrak{B}}{M},$$

folglich m' das grösste gemeinschaftliche Maass von $\frac{\mathfrak{A}}{mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{m}$; und da dasselbe in $\mathfrak{C}$ aufgeht, indem $\mathfrak{C}$ durch $Mm=mmm'$ theilbar ist, so wird es auch das gr. gem. Maass von $\frac{\mathfrak{A}}{mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{m}$, $\mathfrak{C}$ sein; q. e. d.

5. Wenn man die Form $\mathfrak{F}=(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ so wählt, dass $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ keinen Faktor gemein haben, so gewährt dies den Vortheil, dass man die Menge aller derjenigen in 3. aufgestellten Formen, welche, mit f zusammengesetzt, F geben, a priori bestimmen kann. Zur Abkürzung bezeichne man den Complex aller in 3. aufgestellten Formen durch Ω, den Complex derjenigen unter ihnen, aus deren Zusammensetzung mit f die Form F resultirt, durch ω.

Ist $f'=(a', b', c')$ eine Form aus Ω, so hat man

$$\frac{a'}{m'}=\frac{\mathfrak{A}}{Mm}uu, \quad \frac{2b'}{m'}=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho\frac{\mathfrak{A}}{Mm}u,$$

$$\frac{c'}{m'}=\frac{\mathfrak{A}}{Mm}\varrho\varrho+\frac{2\mathfrak{B}}{Mm}\varrho t+\frac{\mathfrak{C}}{Mm}tt,$$

und eine solche Form wird in ω gehören, sobald diese drei Glieder keinen Faktor gemein haben.

Diese Bedingung erfordert, dass u gegen das dritte Glied prim ist, da $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ den Faktor u enthält. — Umgekehrt, wenn u gegen das dritte Glied prim, so haben die drei Glieder keinen gemeinschaftlichen Faktor. Denn hätten sie einen Primfaktor p gemein, so könnte derselbe, da er $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ und $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$ nicht zugleich messen kann, in $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$ nicht aufgehen, müsste u messen, was unmöglich. Noch wird bemerkt, dass $\frac{\mathfrak{A}}{Mm}$, u keinen Faktor gemein haben, indem u ein Theiler von $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ ist.

Setzen wir also zur Abkürzung

$$\frac{\mathfrak{A}}{Mm}=\mathfrak{A}', \quad \frac{2\mathfrak{B}}{Mm}=\mathfrak{B}', \quad \frac{\mathfrak{C}}{Mm}=\mathfrak{C}',$$

und

$$\mathfrak{A}'\varrho\varrho+\mathfrak{B}'\varrho t+\mathfrak{C}'tt=Z,$$

so ist, damit f' in den Complex ω gehöre, nothwendig und ausreichend, dass Z und u, oder, was hier gleichviel gilt, $\mathfrak{A}'Z$ und u, keinen Faktor gemein haben.

6. Die Aufgabe, ϱ der vorhergehenden Bedingung gemäss zu bestimmen, lässt sich vereinfachen, wenn man von der Gleichung

$$\mathfrak{A}'Z=\frac{1}{4}\left[(2\mathfrak{A}'\varrho+\mathfrak{B}'t)^2-\frac{4Dt^2}{M^2}\right]$$

ausgeht, wo

$$\frac{4D}{M^2}=\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'-4\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$$

ist. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn $\mathfrak{B}'t$ gerade ist, so hat man

$$\mathfrak{A}'Z=(\mathfrak{A}'\varrho+\frac{1}{2}\mathfrak{B}'t)^2-\frac{Dt^2}{M^2},$$

und findet die sämmtlichen Werthe von ϱ unter k, welche Z prim gegen u machen, nach folgender Regel, deren Grund leicht erhellt. Man bestimme alle Werthe von z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$, für welche $z^2-\frac{Dt^2}{M^2}$ prim gegen u wird, hierauf für jeden derselben eine entsprechende Zahl ϱ mittelst der Congruenz

$$\mathfrak{A}'\varrho\equiv z-\frac{1}{2}\mathfrak{B}'t \text{ (mod. } u)$$

zwischen 0 und $u-1$ incl. Der Werthe von ϱ sind also eben so viele, als der von z.

2) Wenn $\mathfrak{B}'t$ ungerade, u ungerade, so suche man alle z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$, so dass $z^2-\frac{4Dt^2}{M^2}$ prim gegen u wird, und bestimme die jedem einzelnen z entsprechende Zahl ϱ aus der Congruenz

$$2\mathfrak{A}'\varrho\equiv z-\mathfrak{B}'t \text{ (mod. } u)$$

zwischen 0 und $u-1$ incl., welche Aufgabe immer möglich und bestimmt ist. Der Werthe von ϱ sind wiederum ebenso viele als der von z.

3) Wenn $\mathfrak{B}'t$ ungerade, u gerade, so kann Z für keinen Werth von ϱ prim gegen u werden, sobald $\frac{4D}{M^2}\equiv 1$ (mod. 8.), da dann Z stets den Faktor 2 enthält. — Ist aber $\frac{4D}{M^2}\equiv 5$ (mod. 8) in welchem Falle Z für jedes ϱ ungerade wird, so bestimme man, $u=2^\mu u'$ gesetzt, wo u' ungerade, zunächst alle z zwischen $-\frac{1}{2}u'$ und $+\frac{1}{2}u'$, welche $z^2-\frac{4Dt^2}{M^2}$ prim gegen u' machen; diese Werthe seien z', z'', z''', etc., ihre Anzahl ζ. Sucht man hierauf den jedesmaligen Werth von z unter u, welcher je einem der

Werthe z', z'', z''' etc. nach dem mod. u' und je einer ungeraden Zahl unter 2^μ nach dem mod. 2^μ congruent ist, so hat man alle z unter u, für welche $\frac{1}{4}\left(z^2-\frac{4Dt^2}{M^2}\right)$ ganz und prim gegen u wird. Die Menge derselben ist $2^{\mu-1}\zeta$. Endlich wird man zu jedem z zwei Werthe von ϱ unter u mittelst der Congruenz

$$2\mathfrak{A}'\varrho \equiv z-\mathfrak{B}'t \text{ (mod. } u)$$

finden, so dass also die Gesammtmenge aller Werthe von ϱ in diesem Falle gleich $2^\mu\zeta$ ist.

7. Die drei vorhergehenden Fälle führen also nur auf **eine** Aufgabe zurück, nämlich alle Werthe von z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$ zu finden, für welche z^2-L prim gegen u wird.*) Die Auflösung derselben beruht auf dem leicht zu beweisenden Satze:

„Ist u das Produkt der Zahlen u', u'', u''' etc., welche paarweise prim gegen einander sind; bedeutet dann z' jedweden Werth von z zwischen $-\frac{1}{2}u'$ und $+\frac{1}{2}u'$, für welchen z^2-L prim gegen u' wird, z'' jedweden Werth von z zwischen $-\frac{1}{2}u''$ und $+\frac{1}{2}u''$, für welchen z^2-L prim gegen u'' wird, u. s. f., und nimmt man endlich z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$ so, dass es den Zahlen z', z'', etc. nach den Moduln u', u'', resp. congruent wird, so ist z der Inbegriff aller Werthe zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$, für welche z^2-L prim gegen u wird."

Hieraus folgt ferner: Ist ζ' die Menge der z', ζ'' die Menge der z'', ζ''' die Menge der z''' etc., so wird das Produkt $\zeta'\zeta''\zeta'''$ etc. die Menge der z sein.

Man denke sich nun statt u', u'', u''' etc. die Potenzen der Primfaktoren, in welche u aufgelöst werden kann; es sei $u'=p^\pi$. Ist $p=2$, so kann man, damit z^2-L prim gegen 2^π werde, für z nur gerade, oder nur ungerade Werthe setzen, je nachdem L resp. ungerade oder gerade ist, folglich $\zeta'=2^{\pi-1}$. Ist p ein ungerader Primfaktor, und L ein Nichtrest desselben, so darf für z jeder beliebige Werth zwischen den obigen Gränzen gesetzt werden, folglich $\zeta'=p^\pi$. Ist L durch p theilbar, so müssen alle

---

*) Im ersten Falle ist $L=\frac{Dt^2}{M^2}$, in den beiden andern $L=\frac{4Dt^2}{M^2}$, und im letzten Falle überdies u' an die Stelle von u zu setzen.

z prim gegen p sein, folglich $\zeta = p^{\pi-1}(p-1)$. Ist endlich L Rest von p (durch p nicht theilbar), so hat die Congruenz $z^2 - L \equiv 0$ (mod. p) zwei Wurzeln zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$, also $2p^{\pi-1}$ Wurzeln zwischen $-\frac{1}{2}p^{\pi}$ und $+\frac{1}{2}p^{\pi}$, folglich

$$\zeta = p^{\pi} - 2p^{\pi-1} = p^{\pi-1}(p-2).$$

Hiermit ist die Menge aller z zwischen $-\frac{1}{2}u$ und $+\frac{1}{2}u$, folglich auch die Menge aller ϱ zwischen 0 und $u-1$, für welche Z prim gegen u wird, vollkommen bestimmt.

Beispiel. Man sucht alle ϱ unter 60, für welche

$$Z = 11\varrho\varrho - 11\varrho + 9$$

prim gegen 60 wird. Hier ist

$$11Z = \frac{1}{4}[(22\varrho - 11)^2 + 275]. \quad -275 \equiv 5 \text{ (mod. 8.)};$$

also hat man den dritten Fall des vorigen Paragraphen. Die Congruenz $z^2 + 275 \equiv 0$ (mod. 3.) hat die Wurzel $z \equiv -1, +1$; 275 durch 5 theilbar, folglich $z \equiv 0$ (mod. 3.) und $\equiv -2, -1, +1, +2$ (mod. 5.) und $\equiv 1, 3$ (mod. 4.); mithin

$$z = \pm 3, \ \pm 9, \ \pm 21, \ \pm 27;$$

$22\varrho - 11 \equiv z$ (mod. 60.) giebt

$\varrho = 2, 5, 11, 14, 17, 20, 26, 29, 32, 35, 41, 44, 47, 50, 56, 59.$

8. Es sei nun $m = PQ$, wo P, Q relative Primzahlen sind. Wie leicht erhellt, findet man alle Theiler von m, wenn man jeden Theiler von P mit jedem Theiler von Q als Faktor verbindet. Die Theiler von P seien p, p', p'' etc.; die Theiler von Q: q, q', q'' etc.; ferner bezeichne man die Mengen der Formen im Complex ω, welche den Theilern p, q von m entsprechen, resp. durch ξ, η und lasse ξ', η'; ξ'', η'' etc. eine ähnliche Bedeutung haben in Bezug auf p', q'; p'', q'' etc. Die Menge aller Formen aus ω, welche durch Anwendung der Theiler qp, qp', qp'' etc. entstehen, ist offenbar $\eta(\xi + \xi' + \xi''..)$; eben so $\eta'(\xi + \xi' + \xi''..)$ die Menge aller Formen aus ω, welche durch Anwendung der Theiler $q'p, q'p', q'p''$ etc. hervorgehen u. s. w., folglich die Menge der sämmtlichen Formen in ω

$$= (\eta + \eta' + \eta''...)(\xi + \xi' + \xi''...).$$

Eine ähnliche Formel erhält man, wenn m aus mehr, als zwei Faktoren, besteht, und wir gelangen zu dem Satze:

„Es sei m das Produkt beliebig vieler Faktoren P, Q, R etc., welche paarweise prim gegen einander sind. Bezeichnet man die

Mengen der Formen aus ω, welche durch Anwendung der sämmtlichen Theiler von P, der von Q, der von R etc. resultiren, resp. durch Ξ, H, Θ etc., die Menge aller Formen in ω überhaupt durch μ, so ist $\mu = \Xi H \Theta$ etc."

9. Man denke sich jetzt unter P, Q, R.... die Potenzen der Primfaktoren, in welche m aufgelöst werden kann, so dass $P = 2^\nu$ ($\nu = 0$ gesetzt, wenn m ungerade), $Q = \mathfrak{a}^\alpha$, $R = \mathfrak{b}^\beta$,...., und unterscheide folgende Fälle.

I. F, f seien beide eigentlich primitiven Formen derivirt, in welchem Falle $\frac{D}{M^2}$, $\frac{D}{m^2}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{B}'$ ganze Zahlen sind; die Formen in ω sind ebenfalls aus eigentlichen Formen derivirt.

II. F sei aus einer uneigentlichen, f aus einer eigentlichen Form derivirt. Dann sind die Formen in ω aus uneigentlichen Formen derivirt, ferner $\frac{D}{m^2}$, $\frac{4D}{M^2}$ ganze Zahlen, die letztere congruent 1 (mod. 4), $\mathfrak{B}'$ ungerade; da ferner $\frac{4D}{m^2} = \frac{4D}{M^2} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2$, so muss $\frac{M}{m}$ gerade, also m, welches prim gegen $\frac{M}{m}$ ist, nothwendig **ungerade** sein.

III. Wenn f aus einer uneigentlichen Form abgeleitet ist, so wird Dasselbe für F gelten, weil, wenn $\frac{D}{M^2}$ eine ganze Zahl wäre, $\frac{D}{m^2} = \frac{D}{M^2} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2$ es ebenfalls sein müsste. In diesem Falle ist $\mathfrak{B}'$ ungerade, m gerade, folglich m' ungerade, und die Formen aus ω aus eigentlichen Formen abgeleitet.

Um nun H zu bestimmen, sei zuerst $u = \mathfrak{a}^\lambda$, wo $\lambda < \alpha$; $t = 2^\nu \mathfrak{a}^{\alpha-\lambda} \mathfrak{b}^\beta$... wird den Faktor $\mathfrak{a}$ enthalten, folglich $\frac{Dt^2}{M^2}$, $\frac{4Dt^2}{M^2}$ ebenfalls; in den Fällen I. und III. ist $\mathfrak{B}'t$ gerade, in II. $\mathfrak{B}'t$ ungerade, u ungerade; daher die Menge der dem Theiler $\mathfrak{a}^\lambda$ entsprechenden Formen $= \mathfrak{a}^{\lambda-1}(\mathfrak{a}-1)$ (7.) — Ist $u = \mathfrak{a}^\alpha$, so enthält t den Faktor $\mathfrak{a}$ nicht, im Falle III. $\frac{Dt^2}{M^2} = \frac{4D}{M^2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2$ Rest, oder Nichtrest, oder Vielfaches von $\mathfrak{a}$ mit $\frac{4D}{M^2}$ zugleich; daher die Menge der dem Theiler $\mathfrak{a}^\alpha$ entsprechenden Formen $= \mathfrak{a}^{\alpha-1}(\mathfrak{a}-\varepsilon)$, $\varepsilon = 0, 1, 2$ gesetzt, je nachdem $\frac{D}{M^2}$ im Falle I., $\frac{4D}{M^2}$ in den Fällen II. und III. Nichtrest, Vielfaches oder Rest von $\mathfrak{a}$ ist. Hieraus folgt:

$$H = 1 + \mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1) + \mathfrak{a}^2(\mathfrak{a}-1) + ... + \mathfrak{a}^{\alpha-2}(\mathfrak{a}-1) + \mathfrak{a}^{\alpha-1}(\mathfrak{a}-\varepsilon)$$
$$= \mathfrak{a}^{\alpha-1}(\mathfrak{a}-\varepsilon+1).$$

Um Ξ zu bestimmen, wobei nur die Fälle I. und III. in Betracht kommen, hat man in I. für jeden Theiler 2^λ die Menge der Formen $2^{\lambda-1}$, folglich

$$\Xi = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{\nu-1} = 2^\nu.$$

Im Falle III. hat man für jeden Theiler 2^λ, wo $\lambda < \nu$, ebenfalls die Menge $2^{\lambda-1}$ (da t gerade), folglich die dem Inbegriff der Theiler $1, 2, 2^2, \ldots 2^{\nu-1}$ entsprechende Menge $2^{\nu-1}$. — Dem Theiler 2^ν (für welchen $\mathfrak{B}'t$ ungerade) entsprechen keine Formen, wenn $\frac{4D}{M^2} \equiv 1$ (mod. 8.). Wenn aber $\frac{4D}{M^2} \equiv 5$ (mod. 8.), so kommt die Menge 2^ν hinzu (vergl. 6. und 7.). Es ist also im Falle III. $\Xi = 2^{\nu-1}$, oder $= 2^{\nu-1} + 2^\nu$, jenachdem $\frac{4D}{M^2} \equiv 1$ oder 5 (mod. 8.) ist.

Fasst man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Es ist μ (die Menge aller Formen in dem Complex ω)

$$= \frac{m.\mathfrak{N}.(\mathfrak{a}-\varepsilon+1)(\mathfrak{b}-\varepsilon'+1)(\mathfrak{c}-\varepsilon''+1) \text{ etc.}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \text{ etc.}};$$

wo $\mathfrak{N} = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ zu setzen, je nachdem f aus einer eigentlich primitiven Form abgeleitet, oder f aus einer uneigentlich primitiven Form abgeleitet, und ausserdem $\frac{4D}{M^2} \equiv 1$ (mod. 8.), oder f aus einer uneigentlich primitiven Form abgeleitet, und ausserdem $\frac{4D}{M^2} \equiv 5$ (mod. 8.); wo ferner $\varepsilon = 0, 1, 2$ zu setzen, je nachdem $\frac{4D}{M^2}$ Nichtrest, Vielfaches, oder Rest von $\mathfrak{a}$ ist; $\varepsilon', \varepsilon''$ u. s. w. aber ähnlichen Bestimmungen in Bezug auf $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ u. s. w. unterliegen.

Man bemerke, dass der Werth von μ bloss von den Zahlen D, m abhängig ist; denn in der vorhergehenden Regel kann man $\frac{4D}{m^2}$ an die Stelle von $\frac{4D}{M^2}$ setzen, wie aus der Gleichung $\frac{4D}{m^2} = \frac{4D}{M^2} \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2$, wo $\frac{M}{m}$ ganz und prim gegen m ist, leicht folgt.

10. Wir gehen zur Classificirung der im Complex ω enthaltenen Formen über.

Es seien

$$f' = (a', b', c');\; f'' = (a'', b'', c'')$$

zwei eigentlich äquivalente Formen in ω, deren erstere in die leztere durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ übergeht. Es erhellt,

ass, indem φ, φ' diejenigen primitiven Formen bedeuten, aus denen , f'' abgeleitet sind, φ' vermittelst der nämlichen Substitution aus entstehen wird. In den Fällen I. und III. sind φ, φ' eigentlich rimitiv, und man hat,

$$\varphi = (g,\ h,\ i),\ \varphi' = (g',\ h',\ i')$$

esetzt,

$$g = \mathfrak{A}'u^2,\ h = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho\mathfrak{A}'u,\ h^2 - gi = \frac{D}{m'^2};$$

$$g' = \mathfrak{A}'u'^2,\ h' = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho'\mathfrak{A}'u',\ h'^2 - g'i' = \frac{D}{m'^2}.$$

n Falle II. sind φ, φ' uneigentlich primitive Formen, und man hat

$$g = 2\mathfrak{A}'u^2,\ h = \frac{2\mathfrak{B}}{M} + 2\varrho\mathfrak{A}'u,\ h^2 - gi = \frac{4D}{m'^2};$$

$$g' = 2\mathfrak{A}'u'^2,\ h' = \frac{2\mathfrak{B}}{M} + 2\varrho'\mathfrak{A}'u',\ h'^2 - g'i' = \frac{4D}{m'^2}.$$

un hat man folgende Gleichungen:

1) $g' = g\alpha\alpha + 2h\alpha\gamma + i\gamma\gamma,$
2) $h' = g\alpha\beta + h(\alpha\delta + \beta\gamma) + i\gamma\delta,$
3) $1 = \alpha\delta - \beta\gamma;$

s denen leicht noch diese folgen:

4) $(h' - h)\alpha = g'\beta + i\gamma,$
5) $(h' + h)\gamma = g'\delta - g\alpha.$

as grösste gemeinschaftliche Maass von u, u' werde durch ϑ zeichnet. Da in den Fällen I. und III. ϑ in g und $2h$ aufgeht benso wie u), g, $2h$, i aber keinen Faktor gemein haben, so ist prim gegen i; da ferner ϑ in $h' - h$, g' aufgeht, so ist es nach ein Theiler von γ. Die Zahl $\mathfrak{A}'$ ist prim gegen $h' + h$ (da sie gen $\frac{2\mathfrak{B}}{M}$ prim ist), misst $(h' + h)\gamma$ nach 5), folglich auch γ. End-h ist ϑ gegen $\mathfrak{A}'$ prim (da es in $2h$ aufgeht, und $2h$, $\mathfrak{A}'$ keinen ktor gemein haben), folglich $\vartheta\mathfrak{A}'$ ein Theiler von γ. Die Zahl ist durch u, u', folglich durch deren kleinsten gemeinschaftli-en Dividuus $\frac{uu'}{\vartheta}$ theilbar.

Im Falle II. geht ϑ in g, h auf, und da hier g, h, i keinen ktor gemein haben, so ist ϑ prim gegen i, misst folglich nach die Zahl γ. Die Zahl $\mathfrak{A}'$ geht in $\frac{1}{2}(h' + h)\gamma$ auf, und ist

prim gegen $\frac{1}{2}(h'+h)$, folglich γ durch $\mathfrak{A}'$ theilbar. ϑ ist gegen $\mathfrak{A}'$ prim, also wiederum $\vartheta\mathfrak{A}'$ ein Theiler von γ. Auch ist m ein Vielfaches von $\frac{uu'}{\vartheta}$.

Fall I. Ist F aus einer eigentlich primitiven Form derivirt, so ist $\frac{D}{m'^2}$ durch m^2 theilbar, und die sich aus 1) ergebende Gleichung

$$gg'=(g\alpha+h\gamma)^2-\frac{D}{m'^2}\gamma^2$$

verwandelt sich, wenn man

$$\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'q,\ g\alpha+h\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'p,\ m=\frac{uu'}{\vartheta}\varkappa,\ \frac{D}{m'^2}=\lambda m^2$$

setzt, in die folgende:

$$\left(\frac{\vartheta p}{uu'}\right)^2-\lambda(\varkappa q)^2=1.$$

Nun kann q ebenso wenig wie γ verschwinden; denn fände das Letztere Statt, so folgte aus den Gleichungen 1) bis 3) leicht

$$g'=g,\ h'\equiv h\ (\text{mod. } g),\ \text{d. i. } \varrho'\equiv\varrho\ (\text{mod. } u),\ \varrho'=\varrho,\ h'=h;$$

folglich wären φ, φ', und auch f', f'', identische Formen, gegen die Annahme.

Bei negativer Determinante kann also, soll der vorhergehenden Gleichung genügt werden, nur $\lambda=-1$, d. h. $D=-m^2m'^2=-M^2$ sein. — Bei quadratischer Determinante ist die vorhergehende Gleichung unmöglich, da die Differenz zweier Quadrate nur 1 sein kann, wenn das kleinere verschwindet.

Fall II. Hier ist $\frac{4D}{m'^2}$ durch m^2 theilbar, also $\frac{4D}{m'^2}=\lambda m^2$, wo $\lambda\equiv 1$ (mod. 4), und

$$gg'=(g\alpha+h\gamma)^2-\frac{4D}{m'^2}\gamma^2,$$

folglich

$$\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'q,\ g\alpha+h\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'p,\ m=\frac{uu'}{\vartheta}\varkappa,\ 4=\left(\frac{\vartheta p}{uu'}\right)^2-\lambda(\varkappa q)^2.$$

Bei negativer Determinante erfordert die letzte Gleichung entweder $p=0$, oder $\left(\frac{\vartheta p}{uu'}\right)^2=1$; der erste Fall ist aber unmöglich,

weil sonst $-\lambda.(\varkappa q)^2=4$, $-\lambda=1$, λ nicht $\equiv 1$ (mod. 4) wäre; folglich

$$-\lambda.(\varkappa q)^2=3,\ \lambda=-3,\ D=-\frac{3}{4}M^2.$$

Bei quadratischer Determinante ist die obige Gleichung überhaupt unmöglich, da die Differenz zweier Quadrate nur 4 sein kann, wenn das kleinere verschwindet.

Fall III. Hier ist $\frac{4D}{m'^2}$ ebenfalls durch m^2 theilbar, $\frac{4D}{m'^2}=\lambda m^2$, $\lambda\equiv 1$ (mod. 4),

$$gg'=(g\alpha+h\gamma)^2-\frac{D}{m'^2}\gamma^2,$$

und wenn wir

$$\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'q,\quad g\alpha+h\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'p,\quad m=\frac{uu'}{\vartheta}\varkappa$$

setzen, so kommt

$$4=\left(\frac{2\vartheta p}{uu'}\right)^2-\lambda(\varkappa q)^2.$$

Bei negativer Determinante kann nur

$$\left(\frac{2\vartheta p}{uu'}\right)^2=1,\ -\lambda.(\varkappa q)^2=3,\ \lambda=-3$$

sein, folglich

$$D=-\frac{3}{4}M^2.$$

Bei quadratischer Determinante ist die vorhergehende Gleichung unmöglich. Hieraus folgt:

Die Formen in ω gehören bei quadratischer Determinante ohne Ausnahme, bei negativer Determinante mit Ausnahme der Fälle $D=-M^2$, $D=-\frac{3}{4}M^2$, sämmtlich in verschiedene Klassen, deren Anzahl folglich $=\mu$ ist (vergl. 9.).

11. Betrachtung des Ausnahmefalles $D=-M^2$.

Nach dem Vorhergehenden ist nothwendig

$$p=0,\ q^2=1,\ \varkappa=1;$$

d. h.

$$g\alpha + h\gamma = 0,\ \gamma^2 = \vartheta^2 \mathfrak{A}'^2,\ m = \frac{uu'}{\vartheta};$$

folglich

$$\gamma m = \pm \mathfrak{A}' uu'.$$

Umgekehrt, bestimmt man die relativen Primzahlen α und γ aus der Gleichung $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-h}{g}$, β und δ aus $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, macht $u' = \pm \frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' u}$, und transformirt die Form $\varphi = (g,\ h,\ i)$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in $\varphi' = (g',\ h',\ i')$, so lässt sich Folgendes schliessen·

1°. Man erhält

$$g(g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2) = -\frac{D]}{m'^2}\gamma^2 = (\gamma m)^2 = \mathfrak{A}'^2 u^2 u'^2 = g \,.\, \mathfrak{A}' u'^2;$$
$$g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2 = \mathfrak{A}' u'^2;\ g' = \mathfrak{A}' u'^2.$$

2°. Wegen $g\alpha + h\gamma = 0$ geht $\mathfrak{A}'$ in $h\gamma$, folglich in γ auf, da es gegen h prim ist, also $u' = \pm \frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' u}$ eine ganze Zahl.

3°. Es ist $\frac{m}{u'} = \pm \frac{\mathfrak{A}' u}{\gamma}$; ferner $\mathfrak{A}' u\alpha + \frac{h}{u}\gamma = 0$, $\frac{\mathfrak{A}' u}{\gamma}$ eine ganze Zahl, folglich u' Theiler von m.

4°. Es ist

$$h' = (g\alpha + h\gamma)\beta + (h\alpha + i\gamma)\delta = (h\alpha + i\gamma)\delta \equiv h (\text{mod. } \gamma \text{ oder } \mathfrak{A}'),$$
$$h \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M} (\text{mod. } \mathfrak{A}'), \text{ also } h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M} (\text{mod. } \mathfrak{A}').$$

Ferner

$$ig' = (h\alpha + i\gamma)^2 + m^2\alpha^2,\ g',\ m^2$$

durch u'^2 theilbar, also $h\alpha + i\gamma$ durch u' theilbar, mithin auch h'; und da u' auch in $\frac{\mathfrak{B}}{M}$ aufgeht, so folgt $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}$ (mod. u'). Da endlich $\mathfrak{A}'$ gegen u' prim, so kommt $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}$ (mod. $\mathfrak{A}' u'$), oder $h' = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \sigma' \mathfrak{A}' u'$.

5°. Liegt σ' innerhalb der Grenzen 0 und $u' - 1$ incl., so folgt, dass die Form φ' sich im Complex ω befindet. Ist jenes nicht der Fall, so sei ϱ' der kleinste positive Rest von σ' nach dem

mod. u', und man erhält $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho' \mathfrak{A}' u'$ (mod. g'). Bekanntlich kann man nun für β und δ andere Werthe finden, so dass h' einen beliebigen, der Zahl $\frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho' \mathfrak{A}' u'$ nach g' congruenten Werth, folglich diesen Werth selbst erlangt, und dann wird sich φ' wiederum in ω befinden,

6°. φ und φ' sind nicht identisch.

Denn wäre $g = g'$, $h = h'$, so kommt nach 10. 4) $0 = u^2\beta + i\frac{\gamma}{\mathfrak{A}'}$, aber u^2 prim gegen i, folglich $\frac{\gamma}{\mathfrak{A}'u^2}$ eine ganze Zahl; aus der Gleichung $u' = \pm \frac{\gamma m}{\mathfrak{A}'u}$ folgt aber, da $u = u'$ ist, $\frac{\gamma}{\mathfrak{A}'u^2} = \pm \frac{1}{m}$, mithin $m = 1$, welcher Fall stets ausgeschlossen wird*).

7°. Bezeichnet man den Werth des Bruchs $\frac{-h}{g}$, in den kleinsten Zahlen, durch $\frac{Z}{N}$, so ist entweder $\alpha = +Z$, $\gamma = +N$, oder $\alpha = -Z$, $\gamma = -N$.

Es verwandle sich φ in φ' durch die Substitution $+Z, Z', +N, N'$; in φ'' durch die Substitution $-Z, Z'', -N, N''$, so dass

$$ZN' - Z'N = 1, \quad -ZN'' + Z''N = 1$$

ist, und man denke sich Z', N', sowie Z'', N'', so bestimmt, dass φ', φ'' sich beide im Complex ω befinden, was nach dem Vorhergehenden möglich ist. Die Formen φ', φ'' werden identisch sein.

Bezeichnet man dieselben durch

$$(g', h', i'), \ (g'', h'', i'')^{**});$$

so hat man

$$h' = gZZ' + h(ZN' + Z'N) + iNN',$$
$$h'' = -gZZ'' + h(-ZN'' - Z''N) - iNN'',$$
$$ZN' - Z'N = -ZN'' + Z''N = 1.$$

Hieraus folgt

$$Z(h' - h'') = g'(Z' + Z'') \equiv 0 \text{ (mod. } g'),$$
$$N(h' - h'') = g'(N' + N'') \equiv 0 \text{ (mod. } g');$$

*) Ist $m = 1$, so enthält der Complex ω nur eine Form.

**) Dass die Anfangsglieder gleich werden, erhellt sogleich.

und da Z, N relative Primzahlen sind, so folgt $h'-h''\equiv 0 \pmod{g'}$. Nun ist

$$h' = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho' \mathfrak{A}' u', \quad h'' = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho'' \mathfrak{A}' u', \quad h'-h'' = \mathfrak{A}' u' (\varrho' - \varrho'');$$

folglich $\varrho'-\varrho''\equiv 0 \pmod{u'}$, daher $\varrho'=\varrho''$, indem ϱ', ϱ'' beide zwischen den Grenzen 0 und $u'-1$ liegen.

8°. Jede Form φ ist also mit einer von ihr verschiedenen Form im Complex ω eigentlich aequivalent, folglich die Anzahl der Klassen in ω gleich $\frac{1}{2}\mu$.

12. Betrachtung des Ausnahmefalls $D=-\frac{3}{4}M^2$.

Beschäftigen wir uns zuvörderst mit dem Falle II., so ist

$$\left(\frac{p\vartheta}{uu'}\right)^2 = 1, \quad q^2 = 1, \quad \varkappa = 1;$$

folglich

$$g\alpha + (h \mp m)\gamma = 0, \quad u' = \pm \frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' u}.$$

Umgekehrt, macht man $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-h \pm m}{g}$, so dass α und γ relative Primzahlen sind,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad u' = \pm \frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' u};$$

und transformirt $\varphi=(g, h, i)$ in $\varphi'=(g'\ k', i')$ durch die Substi tution α, β, γ, δ, so lässt sich Folgendes schliessen:

1°. Man erhält

$$g(g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2) = (g\alpha + h\gamma)^2 + 3m^2\gamma^2 = 4m^2\gamma^2 = 4\mathfrak{A}'^2 u^2 u'^2,$$

folglich

$$g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2 = 2\mathfrak{A}' u'^2, \quad g' = 2\mathfrak{A}' u'^2.$$

2°. Man findet leicht

$$\frac{h \mp m}{2} \equiv m \frac{\mathfrak{B}' \mp 1}{2} \pmod{\mathfrak{A}'},$$

$$\frac{\mathfrak{B}'+1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{B}'-1}{2}\equiv-1 \pmod{\mathfrak{A}'}\text{*)},$$

und daraus folgt, dass $\mathfrak{A}'$ prim gegen $\frac{h\mp m}{2}$ ist. Nun war $g\alpha+(h\mp m)\gamma=0$, d. i. $\mathfrak{A}'u^2\alpha+\frac{h\mp m}{2}\gamma=0$, folglich geht $\mathfrak{A}'$ in γ auf, und u' eine ganze Zahl**).

3⁰. Es ist $\frac{m}{u'}=\pm\frac{\mathfrak{A}'u}{\gamma}$; ferner $\mathfrak{A}'u\alpha+\frac{h\mp m}{2u}\gamma=0$ (weil h, m, u ungerade sind, so ist $\frac{h\mp m}{2u}$ ganz), folglich $\frac{\mathfrak{A}'u}{\gamma}$ eine ganze Zahl, u' Theiler von m.

4⁰. Es ist

$$h'-h=g\alpha\beta+2\beta\gamma h+i\gamma\delta,$$

i gerade (indem φ eine uneigentlich primitive Form), folglich $i\gamma$, sowie g, 2γ durch $2\mathfrak{A}'$ theilbar, also $h'-h\equiv0 \pmod{2\mathfrak{A}'}$, $h'\equiv\frac{2\mathfrak{B}}{M} \pmod{2\mathfrak{A}'}$. — Ferner $ig'=(h\alpha+i\gamma)^2+3m^2\alpha^2$, $h\alpha+i\gamma$ durch u' theilbar, also auch h', welches den Werth $\pm m\beta\gamma+\delta(h\alpha+i\gamma)$ hat. Da endlich u' als ungerade Zahl prim gegen $2\mathfrak{A}'$, so kommt $h'\equiv\frac{2\mathfrak{B}}{M} \pmod{2\mathfrak{A}'u'}$. Man kann sich daher β, δ so bestimmt denken, dass $h'=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho'\mathfrak{A}'u'$ wird, wo ϱ' innerhalb der Grenzen 0 und $u'-1$ incl. liegt.

5⁰. Ist diese Bestimmung getroffen, so ist erwiesen, dass die Form φ' sich im Complex ω befindet.

6⁰. φ und φ' sind nicht identisch, was ebenso wie im vorigen Paragraphen erwiesen wird.

7⁰. Bezeichnet man den Werth des Bruchs $\frac{-h+m}{g}$ in den kleinsten Zahlen durch $\frac{Z}{N}$, so entspricht den Werthen $\alpha=Z$, $\gamma=N$ eine Form $\varphi'=(g', h', i')$, während die Annahme $\alpha=-Z$, $\gamma=-N$ zu einer mit φ' identischen Form führt (vergl. 11. 7⁰.).

Eine zweite Form $\varphi''=(g'', h'', i'')$ erhält man, von der

---

*) Aus $\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}=Dm^2$ folgt $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'-4\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'=\frac{4D}{M^2}=-3$, und daraus diese Congruenz.

**) Man beachte, dass m, h, $\mathfrak{B}'$ ungerade sind (vergl. 9.)

Gleichung $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{-h-m}{g}$ ausgehend, und es ist zu untersuchen, ob φ', φ'' unter sich identisch sein können.

8°. φ gehe in φ', φ'' über resp. durch die Substitutionen α', β', γ', δ'; α'', β'', γ'', δ'', und es werde angenommen, dass φ', φ'' identisch sind, so dass $g'=g''$, $h'=h''$. Dann hat man wegen $g'=\frac{4\gamma'^2m^2}{g}$, $g''=\frac{4\gamma''^2m^2}{g}$ zunächst $\gamma'\mp\gamma''=0$. Aus

$$g\alpha'+h\gamma'=m\gamma',\ g\alpha''+h\gamma''=-m\gamma''$$

folgt ferner

$$g(\alpha'\mp\alpha'')+h(\gamma'\mp\gamma'')=m(\gamma'\pm\gamma''),$$

d. i.

$$g(\alpha'\mp\alpha'')=2m\gamma'\ldots[1].$$

Ferner nach 10. 5)

$$(h'+h)\gamma'=g'\delta'-g\alpha',\ (h'+h)\gamma''=g'\delta''-g\alpha'';$$

folglich

$$(h'+h)(\gamma'\mp\gamma'')=g'(\delta'\mp\delta'')-g(\alpha'\mp\alpha''),$$

d. i.

$$0=g'(\delta'\mp\delta'')-g(\alpha'\mp\alpha'')\ldots[2],$$

also nach [1] und [2]

$$g(\alpha'\mp\alpha'')=2m\gamma',$$
$$g'(\delta'\mp\delta'')=2m\gamma'.$$

Die Multiplication dieser Gleichungen giebt

$$gg'(\alpha\mp\alpha'')(\delta'\mp\delta'')=4m^2\gamma'^2=gg',$$

folglich

$$(\alpha'\mp\alpha'')(\delta'\mp\delta'')=1,\ \alpha'\mp\alpha''=\delta'\mp\delta''=\pm1;$$

also $g'=g$. Endlich nach 10. 4)

$$(h'-h)\alpha'=g\beta'+i\gamma',\ (h'-h)\alpha''=g\beta''+i\gamma'';$$

folglich durch Subtraction

$$(h'-h)(\alpha'\mp\alpha'')=g(\beta'\mp\beta''),$$

d. i.

$$\pm(h'-h)=g(\beta'\mp\beta''),$$

folglich

$$h'-h\equiv 0 \pmod{g},$$

der Faktor $\beta'\mp\beta''$ mag verschwinden, oder nicht. Nun ist

$$h'-h=2(\varrho'-\varrho)\mathfrak{A}'u,$$

also

$$\varrho'-\varrho\equiv 0 \pmod{u},\ \varrho'=\varrho.$$

Wenn also φ', φ'' identisch wären, so müssten es φ, φ' ebenfalls sein, gegen das vorher Bewiesene.

9°. Jede Form φ ist also mit zwei von ihr verschiedenen Formen φ', φ'', die auch unter sich verschieden sind, eigentlich aequivalent.

Zu demselben Resultat führt die Analyse des Falles III. Die beiden Formen φ', φ'' erhält man hier nach den Formeln

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{-h\pm\frac{1}{2}m}{g},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1,\ u'=\pm\frac{\gamma m}{\mathfrak{A}'u},\ g'=\mathfrak{A}'u'^2,$$

$$h'=g\alpha\beta+h(\alpha\delta+\beta\gamma)+i\gamma\delta,\ i'=\frac{h'^2+\frac{3}{4}m^2}{g'}.$$

Hieraus schliessen wir: In dem Falle $D=-\frac{3}{4}M^2$ ist die Anzahl der Klassen, in welche die Formen in ω zerfallen, gleich $\frac{1}{3}\mu$.

13. Die positive Determinante, welche noch übrig ist, bietet schon mehr Schwierigkeiten dar, lässt indessen eine der vorhergehenden ähnliche Analyse zu.

Erster Hauptfall. Aus den Gleichungen

$$\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'q,\ g\alpha+h\gamma=\vartheta\mathfrak{A}'p,\ m=\frac{uu'}{\vartheta}\varkappa,\ \frac{D}{m'^2}=\lambda m^2,$$

$$\left(\frac{\vartheta p}{uu'}\right)^2-\lambda(\varkappa q)^2=1$$

folgt, wenn man noch $\frac{\vartheta p}{uu'}=x$, $\varkappa q=y$ setzt,

$$xx - \lambda yy = 1,\ g\alpha + h\gamma = \frac{m\gamma x}{y},\ \mathfrak{A}' uu' y = \gamma m.$$

Umgekehrt, macht man

$$xx - \lambda yy = 1,\ \text{wo}\ \lambda = \frac{D}{M^2},\ \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{mx - hy}{gy},$$

so dass α, γ relative Primzahlen sind,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,\ u' = \frac{\gamma m}{\mathfrak{A}' uy},$$

und transformirt $\varphi = (g, h, i)$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in $\varphi' = (g', h', i')$, so lässt sich Folgendes schliessen.

I. Man findet

$$g(g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2) = (g\alpha + h\gamma)^2 - \lambda m^2\gamma^2$$

$$= \left(\frac{m\gamma}{y}\right)^2 (xx - \lambda yy) = (\mathfrak{A}' uu')^2 = g.\mathfrak{A}' u'^2,$$

folglich

$$g\alpha^2 + 2h\alpha\gamma + i\gamma^2 = \mathfrak{A}' u'^2,\ g' = \mathfrak{A}' u'^2.$$

II. Setzt man $h = nh^0$, $t = \vartheta t^0$, $y = \vartheta y^0$, wo h^0 eine ganze Zahl, ϑ das grösste gem. Maass von t und y; t^0, y^0 also relative Primzahlen sind, so kommt $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{t^0 x - h^0 y^0}{\mathfrak{A}' u y^0}$. Nun findet man leicht

$$t^0 x - h^0 y^0 \equiv (x - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}' y)\, t^0\ (\text{mod.}\ \mathfrak{A}' y^0),$$

$$(x - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}' y)(x + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}' y) + \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\vartheta^2 y^{0\,2} = 1;$$

folglich sind $t^0 x - h^0 y^0$, $\mathfrak{A}' y^0$ relative Primzahlen (Da $\mathfrak{A}'$ prim gegen m, so ist es auch prim gegen t^0, den Theiler von m). Bezeichnen wir also das grösste gem. Maass von $t^0 x - h^0 y^0$, u durch ψ, so folgt

$$t^0 x - h^0 y^0 = \pm \psi\alpha,\ \mathfrak{A}' u y^0 = \pm \psi\gamma,\ u' = \frac{\gamma t^0}{\mathfrak{A}' y^0} = \frac{u}{\psi} t^0,$$

u' eine ganze Zahl.

III. Es folgt ferner

$$\frac{m}{u'} = \frac{\mathfrak{A}'uy}{\gamma} = \vartheta\psi,$$

u' Theiler von m.

IV. Man hat

$$h' = \beta(g\alpha + h\gamma) + \delta(h\alpha + i\gamma) = \frac{m\beta\gamma x}{y} + \delta(h\alpha + i\gamma),$$

$$\frac{m\beta\gamma x}{\mathfrak{A}'y} = uu'\beta x,\ \gamma \equiv 0\ (\text{mod. } \mathfrak{A}'),\ \alpha\delta \equiv 1\ (\text{mod. } \gamma \text{ oder } \mathfrak{A}');$$

folglich

$$h' \equiv h \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}\ (\text{mod. } \mathfrak{A}').$$

Ferner

$$ig' = (h\alpha + i\gamma)^2 - \lambda m^2\alpha^2,$$

also $h\alpha + i\gamma$ durch u' theilbar; aber auch $\frac{m\beta\gamma x}{u'y} = \mathfrak{A}'u\beta x$ ganz, folglich $h' \equiv 0$ (mod. u'), ferner $\frac{\mathfrak{B}}{M} \equiv 0$ (mod. u'), folglich $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}$ (mod. u'). Nun ist $\mathfrak{A}'$ gegen u' prim, also auch $h' \equiv \frac{\mathfrak{B}}{M}$ (mod. $\mathfrak{A}'u'$). Auch kann man β, δ so bestimmen, dass $h' = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho'\mathfrak{A}'u'$ wird, und ϱ' zwischen 0 und $u' - 1$ incl. liegt.

V. Ist diese Bestimmung getroffen, so ist erwiesen, dass φ' sich im Complex ω vorfindet, welche Wurzeln der Gleichung $xx - \lambda yy = 1$ zur Berechnung dieser Form auch angewandt werden mögen.

VI. Sind φ, φ' identisch, so folgt wie in II. 6⁰., dass $\frac{\gamma}{\mathfrak{A}'u^2}$ eine ganze Zahl ist; nach dem Vorhergehenden aber, wegen $u' = u$, $\frac{\gamma}{\mathfrak{A}'u^2} = \frac{y}{m}$, folglich können φ, φ' nicht identisch sein, wenn nicht y durch m theilbar.

Umgekehrt, wenn das Letztere der Fall ist, so sind φ, φ' identische Formen.

Denn nach II. ist $u' = \frac{u}{\psi}t^0$; ferner $\frac{y}{m} = \frac{y^0}{t^0u}$, folglich $t^0 = 1$, da es prim gegen y^0, und u Theiler von y^0, daher auch ψ Theiler von y^0; nun erhellt leicht, dass ψ prim gegen y^0 ist, folglich

$\psi=1$, und $u'=u$, $g'=g$. — Man hat ferner $\gamma=\mathfrak{A}'u^2\frac{y}{m}=g\frac{y}{m}$, also nach 10. 4) $(h'-h)\alpha=g\beta+ig\frac{y}{m}$, folglich $h'-h\equiv 0\ (\text{mod.}\ g)$, da g als Theiler von γ prim gegen α ist.*)

VII. Die Gleichung $xx-\lambda yy=1$ hat unendlich viele positive Wurzeln, welche, nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet, durch x_1, y_1; x_2, y_2: x_3, y_3, u. s. w. bezeichnet werden sollen, so dass x_1, y_1 die kleinsten Werthe, aber nicht 1 und 0 sind. Aus diesen kleinsten Wurzeln findet man bekanntlich alle übrigen nach den Formeln

$$2x_\tau=(x_1+y_1\sqrt{\lambda})^\tau+(x_1-y_1\sqrt{\lambda})^\tau,$$

$$2\sqrt{\lambda}y_\tau=(x_1+y_1\sqrt{\lambda})^\tau-(x_1-y_1\sqrt{\lambda})^\tau;$$

aus denen leicht noch diese folgen:

$$x_{\tau+\tau'}=x_\tau x_{\tau'}+\lambda y_\tau y_{\tau'},$$

$$y_{\tau+\tau'}=x_\tau y_{\tau'}+y_\tau x_{\tau'}.$$

Da nun die Gleichung $XX-\lambda m^2.\ YY=1$ immer lösbar ist, so folgt, dass X, mY der Gleichung $x^2-\lambda y^2=1$ genügen; also wird in der Progression y_1, y_2, y_3, u. s. w. jedenfalls ein durch m theilbares Glied vorkommen. Ist y_e das erste Glied dieser Art, so erhellt aus der letzten der beiden vorhergehenden Formeln, wenn man darin $\tau=e$, τ' succ. $=e, 2e, 3e, \ldots$ setzt, dass $y_{2e}, y_{3e}, y_{4e}, \ldots$ sämmtlich durch m theilbar sind. — Umgekehrt ist y_τ durch m theilbar, so muss $\tau\equiv 0\ (\text{mod.}\ e)$ sein. Denn wäre dieses nicht der Fall, so sei $\tau=\varkappa e+\tau'$, wo $0<\tau'<e$; dann kommt $y_\tau=x_{\tau'}y_{\varkappa e}+y_{\tau'}x_{\varkappa e}$, folglich $y_{\tau'}x_{\varkappa e}$ durch m theilbar, aber m als Theiler von $y_{\varkappa e}$ prim gegen $x_{\varkappa e}$, mithin $y_{\tau'}\equiv 0\ (\text{mod.}\ m)$, *q. e. a.*

Wird also die Form φ' und φ mittelst der Wurzeln $\pm x_\tau$, $\pm y_\tau$ hergeleitet, so ist sie mit φ identisch, oder nicht identisch, jenachdem $\tau\equiv 0$ oder nicht $\equiv 0$ (mod. e) ist.

VIII. Bezeichnet man den Werth des Bruchs $\frac{mx-hy}{gy}$ in den kleinsten Zahlen durch $\frac{Z}{N}$, so kann $\alpha=Z$, $\gamma=N$, und auch $\alpha=-Z$, $\gamma=-N$ gesetzt werden; man wird aber nur eines dieser beiden Paare in Betracht ziehen, da die entsprechenden Formen φ', φ'' identisch werden (vergl. II. 70.).

---

*) Wenn α verschwindet, so ist $mx-hy=0$, $x-h\frac{y}{m}=0$, $\frac{y}{m}$ prim gegen x (wegen $xx-\lambda yy=1$), mithin $y=\pm m$, $x=\pm h$, m und h durch u theilbar, also $u=1$, $h=h'=\frac{\mathfrak{B}}{M}$.

Was die Wurzeln der Gleichung $xx-\lambda yy=1$ betrifft, so gehören zu jedem positiven Paar x, y drei andere Paare: $-x$, $-y$; x, $-y$; $-x$, y. Es genügt aber, bloss das erste und vierte in Betracht zu ziehen; denn das zweite entsteht aus dem ersten, das dritte aus dem vierten durch gleichzeitige Aenderung der Zeichen von x und y, was in dem Werthe des Bruchs $\frac{mx-hy}{gy}$ keine Aenderung herbeiführt.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man die aus φ mit Hülfe der Werthe x_τ, y_τ resultirende Form durch $\varphi_\tau=(g_\tau, h_\tau, i_\tau)$; die durch Anwendung der Werthe $-x_\tau$, y_τ resultirende Form durch

$$_\tau\varphi=(_\tau g\,,\ _\tau h\,,\ _\tau i)\,.$$

Die entsprechenden Werthe von α, β, γ, δ seien

$$\alpha_\tau,\ \beta_\tau,\ \gamma_\tau,\ \delta_\tau;\ _\tau\alpha,\ _\tau\beta,\ _\tau\gamma,\ _\tau\delta.$$

IX. Die Formen φ_τ, $\varphi_{\tau+e}$ werden identisch sein.

Ist nämlich ϑ das grösste gem. Maass von t und y_τ, $t=\vartheta t^0$, $y_\tau=\vartheta y^0{}_\tau$; ψ dass grösste gem. Maass von u und $t^0 x_\tau - h^0 y^0{}_\tau$, so hat man $\frac{m}{u_\tau}=\vartheta\psi$. Ebenso kommt $\frac{m}{u_{\tau+e}}=\vartheta'\psi'$, wo ϑ', ψ' eine ähnliche Bedeutung wie ϑ, ψ haben.

Nun folgt aus den Formeln in VII.

$$x_\tau y_{\tau+\tau'}-y_\tau x_{\tau+\tau'}=(x_\tau{}^2-\lambda y_\tau{}^2)y_{\tau'},$$

oder, $y'=e$ gesetzt,

$$x_\tau y_{\tau+e}-y_\tau x_{\tau+e}=y_e;$$

ϑ misst y_e, weil y_e durch m, $m=\vartheta t^0 u$ durch ϑ theilbar ist, ϑ prim gegen x_τ (da x_τ, y_τ relat. Primzahlen sind), folglich ϑ ein Theiler von $y_{\tau+e}$, also auch ein Theiler des grössten gem. Maasses von t und $y_{\tau+e}$, d. h. von ϑ'. Ebenso folgt, dass ϑ' ein Theiler von ϑ ist; mithin $\vartheta=\vartheta'$.

Setzt man ferner

$$K=t^0 x_\tau-h^0 y^0{}_\tau,\ K'=t^0 x_{\tau+e}-h^0 y^0{}_{\tau+e},$$

so kommt

$$Ky^0{}_{\tau+e}-K'y^0{}_\tau=t^0(x_\tau y^0{}_{\tau+e}-y^0{}_\tau x_{\tau+e})=\frac{t^0 y_e}{\tau}=ut^{02}\frac{y_e}{m};$$

aus dieser Gleichung folgt, dass ψ in $K'y_\tau{}^0$, mithin in K' aufgeht (da ψ offenbar prim gegen $y_\tau{}^0$ ist); daher geht ψ in ψ' auf, und da ebenso bewiesen wird, dass ψ' in ψ aufgeht, so folgt $\psi=\psi'$.

Hiermit ist erwiesen, dass $u_\tau = u_{\tau+e}$, also auch $g_\tau = g_{\tau+e}$ ist.

Um zu zeigen, dass $h_\tau \equiv h_{\tau+e}$ (mod. g_τ), benutze man die Gleichungen

$$\psi\,\alpha_\tau = t^0 x_\tau - h^0\, y_\tau{}^0, \qquad \psi\,\gamma_\tau = \mathfrak{A}' u\, y_\tau{}^0,$$

$$\psi\alpha_{\tau+e} = t^0\, x_{\tau+e} - h^0\, y^0{}_{\tau+e}, \quad \psi\gamma_{\tau+e} = \mathfrak{A}' u y^0{}_{\tau+e};$$

aus denen sich ergiebt:

$$\alpha_\tau \gamma_{\tau+e} - \gamma_\tau\, \alpha_{\tau+e} = \frac{\mathfrak{A}' u t^0\, y_e}{\vartheta\psi^2} = \frac{ut^0}{\psi} \cdot \frac{\mathfrak{A}' m}{\vartheta\psi} \cdot \frac{y_e}{m} = g_\tau \cdot \frac{y_e}{m}.$$

Nun hat man

$$(h_\tau - h)\,\alpha_\tau = g_\tau \beta_\tau + i\gamma_\tau,$$

$$(h_{\tau+e} - h)\,\alpha_{\tau+e} = g_\tau\, \beta_{\tau+e} + i\gamma_{\tau+e};$$

woraus folgt

$$(h_\tau - h_{\tau+e})\,\alpha_\tau\, \alpha_{\tau+e} = g_\tau\, (\alpha_{\tau+e}\beta_\tau - \beta_{\tau+e}\alpha_\tau) - i g_\tau \cdot \frac{y_e}{m},$$

folglich

$$(h_\tau - h_{\tau+e})\,\alpha_\tau\, \alpha_{\tau+e} \equiv 0 (\text{mod. } g_\tau).$$

Mit Hülfe der Gleichungen

$$(h_\tau + h)\,\gamma_\tau = g_\tau\, \delta_\tau - g\alpha_\tau,$$

$$(h_{\tau+e} + h)\,\gamma_{\tau+e} = g_\tau\, \delta_{\tau+e} - g\alpha_{\tau+e}$$

gelangt man auf ähnliche Art zu der Congruenz

$$(h_\tau - h_{\tau+e})\,\gamma_\tau\, \gamma_{\tau+e} \equiv 0\, (\text{mod. } g_\tau).$$

Bezeichnet man also das grösste gem. Maass von $\alpha_\tau\ \alpha_{\tau+e}$, $\gamma_\tau\ \gamma_{\tau+e}$ durch $\mathfrak{r}$, so ist auch

$$(h_\tau - h_{\tau+e})\,\mathfrak{r} \equiv 0\ (\text{mod. } g_\tau),$$

und wenn erwiesen werden kann, dass $\mathfrak{r}$ gegen g_τ prim ist, so wird folgen $h_\tau - h_{\tau+e} \equiv 0$ (mod. g_τ), und φ_τ, $\varphi_{\tau+e}$ werden identisch sein.

In der That, bezeichnet man das grösste gem. Maass von α_τ, $\gamma_{\tau+e}$ mit $\mathfrak{r}'$, das von $\alpha_{\tau+e}$, γ_τ mit $\mathfrak{r}''$, so ist ersichtlich, dass $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'\,\mathfrak{r}''$ ist.

$\mathfrak{r}'$ ist zunächst prim gegen $\mathfrak{A}'$, denn $\mathfrak{A}'$ misst γ_τ, welches prim gegen α_τ. — Man nehme ferner an, dass $\mathfrak{r}'$ und u_τ einen Primfactor p gemein haben, und ziehe folgende Gleichungen in Betracht:

$$[1]\, g_\tau = g\alpha_\tau^2 + 2h\alpha_\tau\gamma_\tau + i\gamma_\tau^2,$$

$$[2]\, u_\tau\psi = ut^0,$$

$$[3]\, h_\tau = \frac{\mathfrak{B}}{M} + \varrho'\mathfrak{A}'u_\tau,$$

$$[4]\, h_\tau + h = g\alpha_\tau\beta_\tau + 2h\alpha_\tau\delta_\tau + i\gamma_\tau\delta_\tau,$$

$$[5]\, t^0 x_{\tau+e} - h^0 y^0_{\tau+e} = \psi\alpha_{\tau+e}.$$

Nach [1] geht p in i auf, folglich, da i gegen u prim, nach [2] in t^0, folglich nach [3] in h_τ, nach [4] also in h, folglich in h^0, da $h = uh^0$, und p als in i aufgehend in u nicht aufgehen kann; nach [5] daher wird p in $\psi\alpha_{\tau+e}$ aufgehen. Dies ist unmöglich, denn p kann in $\alpha_{\tau+e}$ nicht aufgehen, weil es $\gamma_{\tau+e}$ misst, und in ψ deshalb nicht, weil ψ in u aufgeht, u aber, wie schon vorher erwiesen worden, durch p nicht theilbar ist. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{r}'$ prim gegen $\mathfrak{A}'u_\tau^2 = g_\tau$ ist. — Auf ähnliche Art zeigt man, dass $\mathfrak{r}''$ prim gegen $g_{\tau+e} = g_\tau$ ist, folglich $\mathfrak{r}'\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}$ prim gegen g_τ, q. e. d.

X. Die vorhergehende Schlüsse erleiden keine Aenderung, wenn man x_τ, $x_{\tau+e}$ mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt, während die Zeichen von y_τ, $y_{\tau+e}$ beibehalten werden, und es folgt daher, dass ${}_\tau\varphi$, ${}_{\tau+e}\varphi$ ebenfalls identische Formen sind.

XI. Nach dem Vorhergehenden ist jede aus φ abgeleitete Form mit einer der folgenden

$${}_{e-1}\varphi;\ {}_{e-2}\varphi;\ {}_{e-3}\varphi;\ \ldots\ {}_1\varphi;\ \varphi;\ \varphi_1\ \ldots\ \varphi_{e-3};\ \varphi_{e-2};\ \varphi_{e-1}$$

nothwendig identisch.

Keine der Formen

$${}_{e-1}\varphi;\ {}_{e-2}\varphi;\ \ldots\ {}_2\varphi;\ {}_1\varphi;\ \varphi_1;\ \varphi_2;\ \ldots\ \varphi_{e-2};\ \varphi_{e-1}$$

ist mit φ identisch; es fragt sich aber, ob einige unter sich identisch sein können.

Ich behaupte zunächst, dass ${}_{e-\tau}\varphi$; φ_τ, wo τ zwischen 1 und $e-1$ incl. liegt, identische Formen seien.

Nach VII. hat man $x_\tau y_{\tau'} + y_\tau x_{\tau'} = y_e$, wenn $\tau + \tau' = e$ ist.

Da diese Gleichung der in IX., von welcher die dortigen Schlüsse hauptsächlich abhingen, ganz ähnlich ist, so bleiben die Betrachtungen auch fast wörtlich dieselben, und die obige Behauptung ist erwiesen.

XII. Endlich soll gezeigt werden, dass die Formen φ_1; φ_2; φ_3; .... φ_{e-1} sämmtlich unter einander verschieden sind.

Es seien μ, μ' zwei unterschiedene Zahlen zwischen 1 und $e-1$ incl.; und es werde angenommen, dass φ_μ, $\varphi_{\mu'}$ identische Formen seien, welche aus φ resp. durch die Substitutionen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'$$

entstehen. Die entsprechenden Werthe von x, y werden durch x_μ, y_μ; $x_{\mu'}$, $y_{\mu'}$ bezeichnet.

Dies vorausgesetzt, geht φ durch die erwähnten Substitutionen (welche beide eigentlich sind) in dieselbe Form über, und man hat nach den Formeln Disq. Arithm. p. 181.:

$$\alpha' = \alpha X - (h\alpha + i\gamma)\, Y,$$

$$\beta' = \beta X - (h\beta + i\delta)\, Y,$$

$$\gamma' = \gamma X + (g\alpha + h\gamma)\, Y,$$

$$\delta' = \delta X + (g\beta + h\delta)\, Y;$$

indem X, Y Werthe bedeuten, welche der Gleichung $X^2 - \lambda m^2 Y^2 = 1$ Genüge leisten.

Substituirt man nun in der dritten Gleichung für $g\alpha + h\gamma$ seinen Werth $\frac{m\gamma x_\mu}{y_\mu}$, und beachtet $\gamma y_{\mu'} = \gamma' y_\mu$, welche Gleichung aus $g_\mu = g_{\mu'}$ folgt, so erhält man

$$y_{\mu'} = X y_\mu + m\, Y . x_\mu \ldots [1].$$

Berechnet man ferner nach der ersten und dritten Gleichung die Grösse $g\alpha' + h\gamma'$, und berücksichtigt den Werth von $g\alpha + h\gamma$ und die Gleichung $h^2 - gi = \lambda m^2$, so kommt

$$g\alpha' + h\gamma' = \frac{m\gamma' x_{\mu'}}{y_{\mu'}} = \frac{m\gamma x_\mu}{y_\mu} X + \lambda m^2 \gamma\, Y,$$

folglich

$$x_{\mu'} = X x_\mu + \lambda m\, Y . y_\mu \ldots [2].$$

Verbindet man endlich [1] und [2] mit den Gleichungen

$$y_{\mu'} = x_{\mu'-\mu} y_\mu + y_{\mu'-\mu} x_\mu,\quad x_{\mu'} = x_{\mu'-\mu} x_\mu + \lambda y_{\mu'-\mu} y_\mu;$$

so folgt

$$X = x_{\mu'-\mu},\quad m\, Y = y_{\mu'-\mu};$$

folglich $y_{\mu'-\mu}$ durch m theilbar, was unmöglich, da y_e das erste durch m theilbare Glied der Progression y_1, y_2, y_3 u. s. w. sein soll.

XIII. Aus Allem, was vorhergeht, folgt, dass jede beliebige Form φ mit $e=1$ und nicht mehr Formen, welche sowohl von φ selbst, als unter einander verschieden sind, eigentlich aequivalent ist.

14. Die Betrachtung der beiden anderen Hauptfälle ist der des ersten so ähnlich, dass es genügen wird, nur auf diejenigen Punkte aufmerksam zu machen, wo Differenzen hervortreten.

Zweiter Hauptfall. Hier ist

$$g=2\mathfrak{A}'u^2,\ h=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho\mathfrak{A}'u,\ \lambda=\frac{4D}{M^2},\ h^2-gi=\lambda m^2,$$

$$\lambda\equiv 1 \text{ (mod. 4)},$$

n ungerade, $xx-\lambda yy=4$. Der Bruch $\frac{\alpha}{\gamma}$ erhält den Werth

$$\frac{\frac{1}{2}(t^0x-h^0y^0)}{\mathfrak{A}'uy^0},$$

und man findet

$$\frac{1}{2}(t^0x-h^0y^0)\equiv\frac{1}{2}(x-\mathfrak{B}'y)t_0 \text{ (mod. } \mathfrak{A}'y^0),$$

$$\frac{1}{2}(x-\mathfrak{B}'y).\frac{1}{2}(x+\mathfrak{B}'y)+\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\theta^2y^{02}=1;$$

$\mathfrak{A}'y^0$ prim gegen $\frac{1}{2}(t^0x-h^0y^0)$, $\frac{u}{\psi}=\frac{\gamma}{\mathfrak{A}'y^0}$ eine ganze Zahl, indem ψ das grösste gemeinsch. Maass von u und $\frac{1}{2}(t^0x-h^0y^0)$ bedeutet; $u'=\frac{u}{\psi}t^0$.

Die Differenz $h'-h$ ist hier durch $2\mathfrak{A}'$ theilbar*), und u' als ungerade Zahl gegen $2\mathfrak{A}'$ prim, weshalb $h'=\frac{2\mathfrak{B}}{M}+2\varrho'\mathfrak{A}'u'$ wird.

Die Gleichung $xx-\lambda yy=4$ erfordert offenbar, dass x, y beide gerade, oder beide ungerade sind; ist sie in relativen Primzahlen nicht lösbar, so kann sie wenigstens mit Hülfe solcher Werthe, welche den Factor 2 haben, gelöst werden, da die Gleichung $xx-\lambda yy=1$ immer möglich.

Bezeichnet man die kleinsten positiven Wurzeln ($x=\pm 2$, $y=0$ ausgeschlossen) mit x_1, y_1, so sind alle übrigen positiven Wurzeln in folgenden Formeln enthalten:

---

*) Man hat hiebei zu beachten, dass g und t gerade Zahlen sind.

$$x_\tau = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1\sqrt{\lambda})^\tau + (\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\sqrt{\lambda})^\tau,$$

$$\sqrt{\lambda}y_\tau = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1\sqrt{\lambda})^\tau - (\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\sqrt{\lambda})^\tau;$$

worüber art. 200. Disq. arithm. zu vergleichen. Hieraus folgt

$$2x_{\tau+\tau'} = x_\tau x_{\tau'} + \lambda y_\tau y_{\tau'},$$

$$2y_{\tau+\tau'} = x_\tau y_{\tau'} + y_\tau x_{\tau'}.$$

Die in 13. VII. folgenden Schlüsse behalten Kraft, da m ungerade ist. Statt der Gleichung

$$x_\tau y_{\tau+e} - y_\tau x_{\tau+e} = y_e$$

in IX. kommt

$$x_\tau y_{\tau+e} - y_\tau x_{\tau+e} = 2y_e,$$

überhaupt aber bleiben die in IX. gemachten Schlüsse mit Ausnahme von geringen Modificationen dieselben.

Statt der Gleichungen in XII. hat man die folgenden:

$$2\alpha' = \alpha X - (h\alpha + i\gamma)Y,$$

$$2\beta' = \beta X - (h\beta + i\delta)Y,$$

$$2\gamma' = \gamma X + (g\alpha + h\gamma)Y,$$

$$2\delta' = \delta X + (g\beta + h\delta)Y;$$

wo X, Y Werthe bedeuten, welche der Gleichung

$$XX - \lambda m^2 . YY = 4$$

genügen.

15. Dritter Hauptfall. Die Gleichung, aus welcher α, [...] zu bestimmen, ist hier

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{mx - 2hy}{2gy},$$

ferner

$\lambda = \frac{4D}{M^2} \equiv 1$ (mod. 4.), $h^2 - gi = \frac{1}{4}\lambda m^2$, $x^2 - \lambda y^2 = 4$, $2h = $ [...]

$2t'y^0$ prim gegen $\frac{1}{2}(t^0x - h^0y^0)$, wie im vorigen Falle, ψ [...]

grösste gemeinschaftliche Maass von u und $\frac{1}{2}(t^0x - h^0y^0)$, $u' =$ [...]

Dass ψ und y^0 keinen ungeraden Factor gemein haben, erhellt sogleich. Hätten sie den Factor 2 gemein, so wäre

$$K=t^0.\frac{1}{2}x-h^0.\frac{1}{2}y^0$$

gerade; t^0 wird ungerade sein, da es prim gegen y^0, $\frac{1}{2}x$ wird ebenfalls ungerade sein, wegen der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\lambda\left(\frac{1}{2}y\right)^2=1 \text{ und } \lambda\equiv 1 \text{ (mod. 4.)},$$

folglich $t^0.\frac{1}{2}x$ ungerade. Ist nun $\frac{1}{2}y^0$ gerade, so ist K ungerade. Ist $\frac{1}{2}y^0$ aber ungerade, so muss, weil $\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\vartheta y^0$ gerade ist, ϑ gerade sein, $t=\vartheta t^0$ ebenfalls, und auch $h'=\mathfrak{B}'t+2\varrho\mathfrak{A}'$, folglich K wiederum ungerade. Es ist also ψ gegen y^0 prim.

Was über die Wurzeln der Gleichung $xx-\lambda yy=4$ in 14. gesagt worden, gilt hier ebenfalls. — Statt der am Ende in 14. betrachteten Gleichungen hat man die in 13. XII., wo dann

$$XX-\frac{1}{4}\lambda m^2Y^2=1$$

ist.

16. Die vorhergehenden Betrachtungen führen uns also zu dem schönen Satze:

Sind bei positiver, nicht quadratischer, Determinante (D) x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; etc. die nach ihrer Grösse aufsteigend geordneten positiven Werthe der Gleichung

$$xx-\frac{D}{MM}yy=1,$$

oder der Gleichung

$$xx-\frac{4D}{MM}yy=4,$$

$\frac{4D}{MM}\equiv 0$ oder $\equiv 1$ (mod. 4.), so dass x_1, y_1 die *kleinsten* Werthe mit Ausnahme von $x=1$, $y=0$; $x=2$, $y=0$ im einen oder andern Falle bedeuten; ist ferner y_e das *erste* durch m theilbare Glied in der Progression y_1, y_2, y_3, etc.; so beträgt die Anzahl der Klassen, welche mit f zusammengesetzt F geben, den $e$ten Theil von der in 9. bestimmten Anzahl aller im Complex ω enthaltenen Formen.

17. Die positiven Wurzeln der Gleichung

$$xx - \frac{D}{MM} yy = 1$$

findet man succ. nach den Formeln

$$x_2 = 2x_1 . x_1 - 1, \quad x_3 = 2x_1 . x_2 - x_1, \quad x_4 = 2x_1 . x_3 - x_2, \text{ etc.};$$

$$y_2 = 2x_1 . y_1, \quad y_3 = 2x_1 . y_2 - y_1, \quad y_4 = 2x_1 . y_3 - y_2, \text{ etc.};$$

die positiven Wurzeln der Gleichung

$$xx - \frac{4D}{MM} yy = 4$$

nach den folgenden:

$$x_2 = x_1 . x_1 - 2, \quad x_3 = x_1 . x_2 - x_1, \quad x_4 = x_1 . x_3 - x_2, \text{ etc.};$$

$$y_2 = x_1 . y_1, \quad y_3 = x_1 . y_2 - y_1, \quad y_4 = x_1 . y_3 - y_2, \text{ etc.}$$

Zu bemerken ist, dass man indessen nur die zweite Progression in Bezug auf den vorliegenden Zweck zu berechnen braucht, dass es sogar nicht auf die absoluten Werthe der Glieder $y_1, y_2, y_3 \ldots$ ankommt, sondern nur auf die Reste derselben nach dem mod. m, weshalb sich mancherlei Abkürzungen anbringen lassen.

Die Gleichung

$$xx - \frac{4D}{MM} yy = 4$$

lässt sich in allen Fällen nach der von **Gauss** entdeckten Methode (art. 198.), und, wenn $\sqrt{\frac{4D}{MM}} > 4$, auch mit Hülfe der Kettenbrüche lösen. In unserm Falle ist immer

$$\lambda = \frac{4D}{MM} \equiv 1 \text{ (mod. 4)}.$$

Ist $\lambda \equiv 1$ (mod. 8.), so ist die Gleichung $xx - \lambda yy = 4$ in relativen Primzahlen nicht lösbar; denn da x, y beide ungerade sein müssten, so wäre das erste Glied durch 8 theilbar. Ist $\lambda \equiv 5$ (mod. 8), so sind die kleinsten Wurzeln bald ungerade, bald gerade.

Wenn x_1, y_1 gerade sind, so folgt aus dem Bildungsgesetz der Progressionen $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots y_1, y_2, y_3, \ldots.$, dass **alle** Wurzeln gerade sind. Sind x_1, y_1 ungerade, so folgt ebenso, dass x_τ, y_τ gerade, wenn $\tau \equiv 0$ (mod. 3.), in allen übrigen Fällen ungerade sind.

18. Die vorhergehenden Untersuchungen stehen mit dem Verhältniss, welches die Mengen der Klassen in zwei verschiedenen Ordnungen zu einander haben, in einem merkwürdigen Zusammenhange.

Es seien O, O', O'' drei beliebige Ordnungen für dieselbe Determinante D, welche resp. die Formen

$$F=(A, B, C); \; f=(a, b, c); \; f'=(a', b', c')$$

enthalten; M sei das grösste gemeinschaftliche Maass von A, $2B$, C, und m, m' haben eine ähnliche Bedeutung in Bezug auf die Formen f, f'; auch sei $M=mm'$, und m prim gegen m'. Die Mengen der Klassen in den Ordnungen O, O'' werden respect. durch L, L″ bezeichnet. Endlich sei K' eine beliebige Klasse der Ordnung O'.

Dies vorausgesetzt, giebt es nach dem Vorhergehenden stets Klassen aus der Ordnung O'', welche mit K' zusammengesetzt eine beliebige Klasse K der Ordnung O hervorbringen; diese Klassen seien K'', K''_1, K''_2, ... K''_{r-1}, ihre Anzahl also r; den Complex derselben bezeichne man durch W.

Es sei nun K_1 eine von K verschiedene Klasse der Ordnung O, $K_1=\varphi+K$, wo φ eine eigentlich primitive Klasse bedeutet*), und W' der Complex der Klassen

$$\varphi+K'', \; \varphi+K''_1, \; \varphi+K''_2, \ldots \varphi+K''_{r-1};$$

welche offenbar sämmtlich in die Ordnung O'' gehören, und unter einander verschieden sind. Jegliche Klasse aus W' wird mit K' zusammengesetzt K_1 geben, woraus folgt, dass W, W' keine Klasse gemein haben (indem jede Klasse aus W mit K' zusammengesetzt die von K_1 verschiedene Klasse K erzeugt). — Ueberdiess muss jede Klasse, welche mit K' zusammengesetzt K_1 hervorbringt, in W' enthalten sein. Denn es sei $K_1=K'+L$, L aus der Ordnung O'', $L=\varphi+L'$, also L' ebenfalls aus der Ordnung O'', dann ist

$$K_1=\varphi+K'+L'=\varphi+K,$$

folglich $K'+L'$ mit K identisch; da also K aus der Zusammensetzung von K' mit der Klasse L' entsteht, so muss L' mit einer der Klassen K'', K''_1, ... K''_{r-1}, folglich L mit einer Klasse aus W' identisch sein.

Ist ferner K_2 eine von K, K_1 verschiedene Klasse aus O, so erhält man ebenso r neue Klassen der Ordnung O'', welche mit

---

*) Ueber die Anwendung des Additionszeichens, um die Zusammensetzung der Formen oder Klassen zu bezeichnen, s. m. Disq. Arithm. art. 249.

K' zusammengesetzt K_2 geben, und sowohl unter sich, als von den Klassen in W, W' verschieden sind.

Schliesst man so fort, bis alle Klassen in O erschöpft sind, so hat man rL Klassen aus O'' erhalten, und ausser diesen kann keine mehr übrig sein, da jede Klasse aus O'' mit K' zusammengesetzt eine Klasse aus O hervorbringt. Daher folgt $L'' = rL$.

Setzt man $M = m$, so erhält man den besondern in den Disq. arithm. Art. 253. betrachteten Fall; nämlich, wenn r die Menge der eigentlich primitiven Klassen bedeutet, welche mit einer beliebigen Klasse der Ordnung O zusammengesetzt eine beliebige Klasse derselben Ordnung hervorbringen, so beträgt die Menge aller Klassen der Ordnung O den $r$ten Theil von der Menge aller Klassen der eigentlich primitiven Ordnung. Die Zahl r kann man für jede Determinante nach dem Vorhergehenden bestimmen, folglich lässt sich die Menge der Klassen in jeder Ordnung finden, wenn man die Menge der eigentlich primitiven Klassen kennt.

Versucht man z. B. die Menge der Klassen in der uneigentlich primit. Ordnung zu bestimmen, so findet man nach 9. zunächst ($m=2$, $\mathfrak{T} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ zu setzen) $\mu = 1$ oder 3, jenachdem $D \equiv 1$ oder 5 (mod. 8) ist; daher $r = 1$ im ersten Falle. Im anderen Falle ist bei negativer Determinante $r = 3$, ausgenommen $D = -3$, wo $r = \frac{1}{3}\mu = 1$ ist. Wenn endlich $D \equiv 5$ (mod. 8.) und positiv, so hat man $e = 1, 3$, also $r = 3$, 1 resp., jenachdem die kleinsten Wurzeln der Gleichung $xx - Dyy = 4$ gerade, oder ungerade sind. Hieraus folgt:

Bezeichnet man die Menge der Klassen in der eigentlich primitiven Ordnung durch L, die in der uneigentlich primitiven Ordnung durch L′, so ist L′ = L, wenn $D \equiv 1$ (mod. 8.); oder wenn $D = -3$; oder wenn D positiv, $\equiv 5$ (mod. 8.) und die kleinsten Wurzeln der Gleichung $xx - Dyy = 4$ ungerade sind. Dagegen ist $L' = \frac{1}{3}L$ in allen übrigen Fällen.*)

19. Die Theorie der Zerlegung der quadratischen Formen, welche wir hier mitgetheilt haben, ist völlig allgemein. In den Disq. Arithm. wird nur der specielle Fall zur Sprache gebracht, wo die gegebenen Formen aus derselben Ordnung sind, und dieser wiederum auf einen noch einfachern Fall zurückgeführt (cf. art. 251). Hierauf wendet sich Gauss zur Auflösung der Aufgabe: „Die sämmtlichen eigentlich primitiven Klassen zu bestimmen, welche mit der einfachsten Form einer Ordnung zusammengesetzt, diese Form selbst geben, und findet zunächst eine endliche Menge von Formen, welche in Bezug auf diesen besondern Fall mit unseren Formen im Complex ω übereinkommen. Was endlich die Classification dieser Formen betrifft, so wird art. 256. V. gezeigt, dass sie in verschiedene Klassen gehören bei negativer und quadratischer Determinante, ausgenommen

*) Die uneigentlich primitive Ordnung existirt nur, wenn $D \equiv 1$ (mod. 4.) ist.

$$D = -m^2, \quad D = -\frac{3}{4}m^2,$$

und **ohne Beweis** angemerkt, dass im ersten dieser Ausnahmefälle immer je zwei, im andern immer je drei Formen **eine** Klasse bilden. Die positive Determinante betreffend sagt **Gauss***): „Pro casu tertio autem, ubi D est numerus positivus, non quadratus, regulam generalem pro comparanda multitudine formarum pr. primit. in V, V', V'',.... cum multitudine classium diversarum inde resultantium hucusque non habemus. Id quidem asserere possumus, hanc vel illi aequalem, vel ipsins partem aliquotam esse; quia etiam nexum singularem inter quotientem horum numerorum et valores minimos ipsorum t,u aequationi $tt-Duu=A.A$ satisfacientes deteximus, quem hic explicare nimis prolixum foret; an vero possibile sit, illum quotientem in omnibus casibus ex sola inspectione numerorum D, A cognoscere, de hac re nihil certi pronunciare possumus."

Der unbekannte Quotient, von welchem hier die Rede, ist die im Vorhergehenden mit e bezeichnete Zahl, deren Bestimmung lediglich darauf zurückkommt, das erste durch m theilbare Glied der Progression y_1, y_2, y_3,... zu ermitteln. Es scheint, als wenn **Gauss** mit dem Ausdruck „nexus singularis" diese Beziehung der Zahl e zu den Wurzeln der Gleichung $xx-\lambda yy=1$, oder $xx-\lambda yy=4$ nicht gemeint haben kann; denn sonst würde er nicht gesagt haben: „regulam generalem non habemus."

20. Da man bei den vorhergehenden Untersuchungen die kleinsten Wurzeln der Gleichung $xx-Dyy=4$ kennen muss, und dieselbe in der Zahlentheorie überhaupt von mannichfachem Nutzen sein kann, so mag darüber noch einiges beigebracht werden, wobei wir auch die Gleichung $xx-Dyy=-4$ berücksichtigen.**)

Die Gleichung $xx-Dyy=\pm 4$ gestattet zunächst eine Reduction auf die einfachere Gleichung $xx-D'yy=\pm 1$, für welche bereits Tafeln vorhanden sind, in folgenden Fällen.

Wenn $D\equiv 0$ (mod. 4.), und t, u alle Werthe der Gleichung

$$tt-\frac{1}{4}D.uu=\pm 1$$

bedeuten, so sind $x=2t$, $y=u$ alle Werthe der Gleichung

$$xx-Dyy=\pm 4.$$

In den Fällen $D\equiv 2$ oder 3 (mod. 4.), $D\equiv 1$ (mod. 8.) können x und y nur beide gerade sein, und $x=2t$, $y=2u$ sind alle Werthe der Gleichung

*) pag. 398.
**) D ist positiv und nicht quadratisch.

$$xx - Dyy = \pm 4,$$

wenn t, u alle Werthe der Gleichung

$$tt - Duu = \pm 1$$

bedeuten.

Es bleibt also nur der Fall $D \equiv 5$ (mod. 8.) übrig. Alle Determinanten D von der Form $8n+5$ zerfallen in zwei Klassen. In die eine gehören diejenigen, für welche die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$xx - Dyy = \pm 4$$

doppelt so gross als die kleinsten Werthe der Gleichung

$$tt - Duu = \pm 1$$

sind (wenn die letztere Gleichung für das untere Zeichen überhaupt lösbar ist); in der andern Klasse sind diejenigen Determinanten, für welche die Gleichung

$$xx - Dyy = \pm 4$$

in relativen Primzahlen lösbar ist. Zwischen 5 und 1005 giebt es 126 Werthe $D = 8n+5$, von denen die folgenden 32 von der ersten Art sind: 37, 101, 141, 189, 197, 269, 325, 333, 349, 373, 381, 389, 397, 405, 485, 557, 573, 677, 701, 709, 757, 781, 813, 829, 877, 885, 901, 909, 925, 933, 973, 997.

Um zu entscheiden, ob die Gleichung

$$xx - Dyy = \pm 4$$

in relativen Primzahlen lösbar ist, oder nicht, verwandelt man $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch. Findet sich kein vollständiger Quotient mit dem Nenner 4, so ist die Gleichung nach einem bekannten Theorem, vorausgesetzt, dass $D > 16$, in relativen Primzahlen nicht lösbar. Findet sich der Nenner 4, so merke man Folgendes:

1) Wenn die ungeraden Werthe x, y die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

befriedigen, so ist

$$(xx+2)^2 - D(xy)^2 == +4,$$

wo $xx+2$, xy ebenfalls ungerade sind, d. h. wenn die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

in relativen Primzahlen lösbar, so ist auch

$$XX - DYY = +4$$

in relativen Primzahlen lösbar.

2) Sind x, y die kleinsten positiven Werthe der ersten Gleichung, so wird behauptet, dass $X = xx + 2$, $Y = xy$ die kleinsten positiven Werthe der anderen Gleichung sein werden.

Wäre dies nicht der Fall, so bezeichne man die kleinsten (positiven) Werthe der Gleichung

$$tt - Duu = +4$$

durch t, u, so dass also $t < X$, $u < Y$ ist. Die Multiplication der Gleichungen

$$xx - Dyy = -4,$$
$$tt - Duu = +4$$

giebt

$$\left(\frac{tx - Duy}{2}\right)^2 - D\left(\frac{ty - ux}{2}\right)^2 = -4,$$

wo $\frac{tx - Duy}{2}$, $\frac{ty - ux}{2}$ ganze Zahlen sein werden, da x und y, ebenso t und u, beide gerade, oder beide ungerade sind. Die Zahl $\frac{1}{2}(ty - ux)$ ist positiv, da $\frac{t}{u}$ offenbar $> \frac{x}{y}$. Die andere Zahl $\frac{1}{2}(tx - Duy)$ anlangend, nehme man zuvörderst an, dass $y > u$ sei. Demnach folgt durch Multiplication der Gleichungen

$$xx = Dyy - 4, \quad tt = Duu + 4, \quad (tx)^2 - (Duy)^2 = 4(Dyy - Duu - 4),$$

welcher Werth positiv sein muss, indem $yy - uu > \frac{4}{D}$ ist, folglich $tx - Duy > 0$. Setzen wir also

$$\frac{1}{2}(tx - Duy) = T, \quad \frac{1}{2}(ty - ux) = U;$$

so sind T, U positive Zahlen, welche der Gleichung

$$TT - DUU = -4$$

genügen, mithin nicht kleiner sein können als x, y resp. Nun erhält man mit Hülfe der vorhergehenden Relationen aus der Gleichung

$$tt - Duu = +4, \quad 2x = Tt + DUu, \quad 2y = Tu + Ut,$$

folglich

$$2y \geqq xu + yt, \quad (2-t)y \geqq xu,$$

und dies ist unmöglich, da die Werthe $t=2$, $u=0$ ausgeschlossen sind, und t nicht kleiner als 2 sein kann.

Hieraus folgt $u \geqq y$, $t > x$. Nachdem dies bewiesen worden, hat man

$$(Duy)^2 - (tx)^2 = 4(Duu - Dyy + 4),$$

folglich

$$Duy - tx > 0, \quad T = \frac{1}{2}(Duy - tx), \quad U = \frac{1}{2}(ty - ux)$$

positive ganze Zahlen, welche die Gleichung

$$TT - DUU = -4$$

befriedigen, also nicht kleiner sein können als x, y resp. Es folgt ferner

$$2t = Tx + DUy,$$

$$2u = Ty + Ux;$$

mithin

$$2t \geqq xx + Dyy, \quad 2u \geqq xy + yx,$$

d. h. $t \geqq xx + 2$, $u \geqq xy$, was der obigen Annahme widerspricht. Wir schliessen also, dass $X = xx + 2$, $Y = xy$ die kleinsten Werthe der Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

sind.

3) Vorausgesetzt, dass in der Entwickelung von $\sqrt{D}$ ein vollständiger Quotient mit dem Nenner 4 vorkommt, setze man dieselbe soweit fort, bis dieser Nenner zum erstenmal erscheint, und berechne den vorletzten Näherungsbruch $\frac{p}{q}$. Es lässt sich sogleich erkennen, ob $pp - Dqq = +4$, oder $pp - Dqq = -4$ ist. Trifft der erste Fall ein, so sind $x = p$, $y = q$ die kleinsten positiven Werthe der Gleichung

$$xx - Dyy = +4,$$

und man kann sicher schliessen, dass die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

in ungeraden Zahlen nicht lösbar ist; denn wäre dies der Fall, so müssten ihre kleinsten Wurzeln p', q' offenbar $>$ als resp. p, q sein, was wegen $p = p'p' + 2$, $q = p'q'$ (vergl. 2)) unmöglich ist. — Findet sich aber $pp - Dqq = -4$, so sind $x = p$, $y = q$ die kleinsten (positiven) Werthe der Gleichung

$$xx - Dyy = -4;$$

die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

ist dann ebenfalls in relativen Primzahlen lösbar, und $x = pp + 2$, $y = pq$ ihre kleinsten Wurzeln.

Nach diesen Principien ist die dieser Abhandlung beigefügte Tafel berechnet. Man findet in der ersten Columne alle Zahlen D von der Form $8n + 5$ zwischen 5 und 1005 mit Ausnahme der 32 vorhin aufgestellten Werthe, für welche keine Auflösung in ungeraden Zahlen möglich ist. In der zweiten Columne stehen die kleinsten positiven Wurzeln, welche sich auf die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

beziehen, sobald D mit dem Zeichen * versehen ist, in den übrigen Fällen der Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

genügen.

4) Mehrerer Vollständigkeit wegen bemerke ich noch Folgendes. Wenn die Determinante das Zeichen * nicht führt, die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

also in relativen Primzahlen nicht lösbar ist, so lässt die Gleichung

$$tt - Duu = -1$$

keine Auflösung zu, ist also $xx - Dyy = -4$ überhaupt nicht lösbar. Denn die Multiplication der Gleichungen

$$xx - Dyy = +4, \quad tt - Duu = -1$$

gäbe

$$(tx + Duy)^2 - D(ty + ux)^2 = -4,$$

wo $tx + Duy$, $ty + ux$ offenbar ungerade Zahlen wären, welche der Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

nach der Voraussetzung nicht genügen können. — Wenn die Determinante das Zeichen * führt, die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

also in relativen Primzahlen lösbar ist, so lässt die Gleichung

$$tt - Duu = -1$$

Auflösungen zu, ist die vorhergehende Gleichung also auch in geraden Zahlen lösbar.

Um das letztere zu erweisen, bemerke ich zuvörderst, dass in der Entwickelung von $\sqrt{D}$ der Nenner 4 höchstens in zwei vollständigen Quotienten vorkommen kann. In der That, es sei $\frac{\sqrt{D}+J}{4}$ ein vollständiger Quotient, welchem $\frac{\sqrt{D}+J^0}{N^0}$ vorhergeht; dann ist bekanntlich

$$4N^0 = D - JJ, \quad \sqrt{D} - 4 < J < \sqrt{D},$$

daher, wenn wir die grösste in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl durch a bezeichnen, J gleich einer der Zahlen $a-3$, $a-2$, $a-1$, a; von diesen vier Werthen werden aber nur zwei so beschaffen sein, dass $D - JJ$ durch 4 theilbar ist, wie es nach der ersten Gleichung sein soll, nämlich die Werthe $J = a$, $a-2$, oder die Werthe $J = a-1$, $a-3$, jenachdem a ungerade, oder gerade ist, folglich können in einer Periode (welche nicht zwei identische vollständige Quotienten enthalten kann) nicht mehr als zwei vollständige Quotienten mit dem Nenner 4 vorkommen.

Wäre nun die Gleichung

$$tt - Duu = -1$$

nicht lösbar, so müsste die Periode des Kettenbruchs von $\sqrt{D}$ bekanntlich geradgliedrig sein, und wenn wir die auf einander folgenden vollständigen Quotienten mit dem Nenner 4 in der unendlichen Entwickelung von $\sqrt{D}$ durch

$$\frac{\sqrt{D}+J}{4}, \ \frac{\sqrt{D}+J'}{4}; \ \frac{\sqrt{D}+J''}{4}, \ \frac{\sqrt{D}+J'''}{4}, \text{ etc.}$$

bezeichnen, so erhellt leicht, dass die denselben vorangehenden Näherungsbrüche sämmtlich die Gleichung

$$xx - Dyy = -4$$

lösen würden, woraus folgt, dass die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

in relativen Primzahlen nicht lösbar wäre, gegen 1).

5) Ist die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

in relativen Primzahlen lösbar, sind x, y die kleinsten Wurzeln, und macht man

$$x'' = xx - 2,\ y'' = xy;\quad x''' = xx'' - x,\ y''' = xy'' - y;$$

so sind (17.) x''', y''' die kleinsten geraden Wurzeln dieser Gleichung, folglich $\frac{1}{2}x'''$, $\frac{1}{2}y'''$ die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$XX - DYY = +1.$$

Man findet

$$x''' = x^3 - 3x,\quad y''' = Dy^3 + 3y.$$

Wenn also die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

in ungeraden Zahlen lösbar ist, so müssen die kleinsten Wurzeln den cubischen Gleichungen

$$x^3 - 3x - 2X = 0,$$

$$Dy^3 + 3y - 2Y = 0$$

genügen, wo X, Y die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$XX - DYY = 1$$

bedeuten. Die cardanische Formel giebt folgende Werthe:

$$x = \sqrt[3]{(X + Y\sqrt{D})} + \sqrt[3]{(X - Y\sqrt{D})},$$

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{Y}{D} + \frac{X}{D}\sqrt{\frac{1}{D}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{Y}{D} - \frac{X}{D}\sqrt{\frac{1}{D}}\right)};$$

welche unter einer irrationalen Form erscheinen. Dieses Umstandes wegen hat man x und y durch eine andere Betrachtung auszumitteln.

Die Gleichung

$$x^3 - 3x - 2X = 0$$

hat nur eine reelle Wurzel, von der wir schon wissen, dass sie eine ganze Zahl sein muss. Die Funktion $x^3 - 3x - 2X$ wird negativ für $x = \sqrt[3]{2X}$. Ich behaupte ferner, dass sie für $x = \sqrt[3]{2X} + 1$ positiv wird. Für diesen Werth findet man nämlich

$$x^3 - 3x - 2X = 3(\sqrt[3]{2X})^2 - 2,$$

welcher Ausdruck positiv ist. Setzen wir also $\sqrt[3]{2X}=a-\varepsilon$, wo ε einen positiven ächten Bruch bedeutet, so liegt x zwischen $a-\varepsilon$ und $a-\varepsilon+1$, folglich $x=a$.

Die andere Gleichung betreffend, wird die Funktion

$$f(y)=Dy^3+3y-2Y$$

positiv für $y=\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}$. Für $y=\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}-1$ wird sie negativ; denn für diesen Werth kommt

$$f(y)=-D-3(\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}-1)(D\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}-1),$$

welcher Ausdruck negativ ist, sobald $\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}-1$ positiv. Ist aber $\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}-1$ negativ, d. h. der angenommene Werth von y negativ, so erhellet von selbst, dass $Dy^3+3y-2Y<0$ ist. Die Funktion

$$Dy^3+3y-2Y$$

muss also zwischen den Werthen

$$y=\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}, \quad y=\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}-1$$

verschwinden; und wenn wir $\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}=b+\varepsilon$ setzen, wo ε ein positiver ächter Bruch, so erhellet, dass $y=b$ sein muss.

Daher folgt: Wenn die Gleichung

$$xx-Dyy=+4$$

in relativen Primzahlen lösbar ist, so findet man ihre kleinsten Wurzeln x, y, indem man für x die nächste ganze Zahl an $\sqrt[3]{2X}$ über dieser Grösse, für y die nächste ganze Zahl an $\sqrt[3]{\frac{2Y}{D}}$ unter dieser Grösse nimmt, wo X, Y die kleinsten Werthe der Gleichung

$$XX-DYY=+1$$

bedeuten.

6) Umgekehrt, wenn die Wurzeln der kubischen Gleichungen

$$x^3-3x-2X=0, \quad Dy^3+3y-2Y=0$$

beide ganze Zahlen sind, so ist die Gleichung

$$xx - Dyy = +4$$

in relativen Primzahlen lösbar.

Denn berechnet man den Ausdruck $xx - Dyy$ mit Hülfe der in 5) gefundenen Werthe von x und y, so erhält man $xx - Dyy = +4$, beachtend, dass $XX - DYY = +1$ ist.

Eine ähnliche Beziehung findet zwischen den kleinsten Wurzeln der Gleichungen

$$xx - Dyy = -4, \quad XX - DYY = -1$$

statt, deren Auffindung wir dem Leser überlassen.

Da nun Legendre eine Tafel der kleinsten Werthe der Gleichung

$$xx - Dyy = 1,$$

oder der Gleichung

$$xx - Dyy = -1$$

gegeben hat, so würde sich die Berechnung unserer Tafel nach dem vorhergehenden Theorem auf eine blosse Kubikwurzelausziehung reduciren. Da ich aber erst nach der Berechnung der Tafel auf diese Methode verfiel, so blieb nur übrig, nach derselben die schon berechnete Tafel zu revidiren, was mit möglichster Sorgfalt geschehen ist.*)

Z. B. Die Gleichung

$$XX - 501\,YY = +1$$

hat die kleinsten Wurzeln

$X = 11242731902975$, $Y = 502288218432$ (Legendre's Tafel).

Nun ist

$$\sqrt[3]{2X} = 28224 + \ldots, \quad \frac{2Y}{D} = 2005142628 + \ldots, \quad \sqrt[3]{\frac{2Y}{D}} = 1261 + \ldots;$$

folglich $x = 28225$, $y = 1261$ die kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$xx - 501yy = 4.$$

*) Mit Hülfe von Kubiktafeln lassen sich selbst aus sehr grossen Zahlen die Kubikwurzeln mit Leichtigkeit ausziehen.

Tafel

der kleinsten Wurzeln der Gleichung $xx-Dyy=\pm 4$ für die Werthe von $D=8n+5$ zwischen 5 und 1005, bei welchen die Gleichung in relativen Primzahlen lösbar ist.

D	*x*;*y*	*D*	*x*;*y*	*D*	*x*;*y*
*5	1;1	133	173;15	*277	2613;157
*13	3;1	*149	61;5	285	17;1
21	5;1	*157	213;17	*293	17;1
*29	5;1	165	13;1	301	22745;1311
45	7;1	*173	13;1	309	5045;287
*53	7;1	*181	1305;97	*317	89;5
*61	39;5	205	43;3	341	277;15
69	25;3	213	73;5	357	19;1
77	9;1	221	15;1	*365	19;1
*85	9;1	*229	15;1	413	61;3
93	29;3	237	77;5	*421	444939;21685
*109	261;25	245	47;3	429	145;7
117	11;1	253	1861;117	437	21;1
*125	11;1	261	727;45	*445	21;1

D	$x;y$	D	$x;y$
453	149;7	589	4359377;179625
*461	365;17	597	9749;399
469	65;3	605	123;5
477	2599;119	*613	98763;3989
*493	111;5	621	25;1
501	28225;1261	*629	25;1
*509	925;41	637	14159;561
517	10573;465	645	127;5
525	23;1	*653	1661;65
*533	23;1	*661	1789539;69605
*541	1396425;60037	669	305285;11803
549	1523;65	*685	759;29
*565	309;13	693	79;3
581	6725;279	717	241;9
725	27;1	893	2301;77
*733	27;1	917	1181;39
741	245;9	*941	1135;37
749	12945;473	*949	32685;1061
765	83;3	957	31;1
*773	139;5	*965	31;1
789	31825;1133	981	68123;2175

D	x;y	D	x:y
*797	367;13	989	103245;3283
805	1447;51	1005	1807;57
*821	16189;565		
837	29;1		
*845	29;1		
*853	27483;941		
861	1027;35		
869	49377;1675		

Finis.

XXII.

Miscellen.

In einem älteren englischen Schifffahrtslehrbuche, nämlich in The complete Navigator. By Andrew Mackay. London. 1804., finde ich folgenden Beweis des bekannten trigonometrischen Satzes, dass die Summe zweier Seiten eines ebenen Dreiecks sich zu deren Differenz verhält, wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zu der Tangente der halben Differenz dieser Winkel, der wenigstens mir neu gewesen ist, und, weil er wohl auch noch manchem anderen Leser dieser Zeitschrift unbekannt sein dürfte, deshalb hier mitgetheilt werden soll.

In Taf. XI. Fig. 11. sei ABC das gegebene Dreieck, und von den beiden Seiten AB und AC sei AB die grössere. Man verlängere AC über A hinaus und mache $AD=AB$, ziehe BD, mache $AE=AC$, und ziehe CE, welche, verlängert, BD in F schneidet. Nun ist die Summe der gleichen Winkel ACE und AEC der Summe der beiden Winkel ACB und ABC gleich, also ist

$$\angle DCF=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC),$$

und daher

$$\angle BCF=\angle ACB-\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC),$$

d. i.

$$\angle BCF=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle ABC):$$

Nun ist aber

$$\angle BEF = \angle AEC = \angle DCF,$$

$$\angle EBF = \angle CDF.$$

Also sind die Dreiecke *CDF* und *BEF* einander ähnlich, und es ist folglich auch

$$\angle CFD = \angle CFB,$$

d. h. *CF* steht auf *BD* senkrecht. Wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke *CDF* und *BEF* ist aber

$$CD : BE = DF : BF,$$

oder nach der Construction

$$AB + AC : AB - AC = \frac{DF}{CF} : \frac{BF}{CF},$$

d. i.

$$AB + AC : AB - AC = \operatorname{tang} DCF : \operatorname{tang} BCF,$$

also nach dem Obigen:

$$AB + AC : AB - AC$$

$$= \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC),$$

welches der zu beweisende Satz ist.

Mir scheint diese Beweisart sehr einfach zu sein, und ist deshalb von mir hier mitgetheilt worden. G.

LVII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik.

In dem Journal des Savants. Février. 1850. findet sich ein Aufsatz des trefflichen hochbejahrten Biot, der in so hohem Grade interessant ist, dass ich nicht unterlassen darf, diese Nummer des Literar. Berichts zu benutzen, denselben den Lesern des Archivs ganz mitzutheilen, und bin versichert, mir dadurch einigen Dank zu verdienen.

G.

Une anecdote relative a M. Laplace.

Lu à l'Académie française, dans sa séance particulière du 5 février 1850, par M. J. B. Biot.

Messieurs,

Quand un homme d'ordre s'apprête à partir pour un grand voyage, il met ses affaires en règle, et prend soin d'acquitter toutes les dettes qu'il peut avoir contractées. Voilà pourquoi je vais vous raconter comment, il y a quelques cinquante ans, un de nos savants les plus illustres accueillit et encouragea un jeune débutant, qui était venu lui montrer ses premiers essais.

Ce jeune débutant, c'était moi, ne vous déplaise. Notez, pour excuser l'épithète, que ceci remonte au mois de bru-

maire an VIII de la République française, 1re édition. Quelques mois plus tard, on me fit l'insigne honneur de me nommer associé de l'Institut national; mais, à cette date, et surtout à l'époque un peu antérieure où mon récit commence, je me trouvais complétement inconnu. J'étais alors un tout petit professeur de mathématiques, à l'École centrale de Beauvais. Sorti nouvellement de l'École polytechnique, j'avais beaucoup de zèle et peu de science. Dans ce temps-là, on ne demandait guère aux jeunes gens que de l'ardeur. J'étais passionné pour la géométrie et pour beaucoup de choses. La fortune, plutôt que la raison, me préserva de céder à des goûts trop divers. Fixé, dès lors, par les noeuds les plus doux, à l'intérieur de la famille qui m'avait adopté, heureux du présent, comptant sur l'avenir, je ne songeais qu'à suivre, avec délices, les penchants de mon esprit vers toutes sortes d'études scientifiques; et à faire, par plaisir, ce que l'intérêt de ma carrière m'aurait prescrit comme un devoir. J'avais surtout une ambition démesurée de pénétrer dans les hautes régions des mathématiques, où l'on découvre les lois du ciel. Mais ces grandes théories, encore éparses dans les collections académiques, n'étaient presque abordables que pour le petit nombre d'hommes supérieurs qui avaient concouru à les établir; et s'y lancer sans guide, sur leurs traces, c'était une entreprise où l'on avait toute chance de s'égarer pendant bien du temps avant de les rejoindre. Je savais que M. Laplace travaillait à réunir ce magnifique ensemble de découvertes, dans l'ouvrage qu'il a très-justement appelé: *la Mécanique céleste*. Le premier volume était sous presse; les autres suivraient, à de bien longs intervalles, au gré de mes désirs. Une démarche, qui pouvait paraître fort risquée, m'ouvrit un accès privilégié dans ce sanctuaire du génie. J'osai écrire directement à l'illustre auteur, pour le prier de permettre que son libraire m'envoyât les feuilles de son livre, à mesure qu'elles s'imprimaient. M. Laplace me répondit, avec autant de cérémonie que si j'eusse été un savant véritable. Toutefois, en fin de compte, il écartait ma demande, ne voulant pas, disait-il, que son ouvrage fût présenté au public avant d'être terminé, afin qu'on le jugeât d'après son ensemble. Ce déclinatoire poli, était sans doute très-obligeant dans ses formes. Mais, au fond, il accommodait mal mon affaire. Je ne voulus pas l'accepter sans appel. Je récrivis immédiatement à M. Laplace, pour lui représenter qu'il me faisait beaucoup plus d'honneur que je n'en méritais, et que je n'en désirais. Je ne suis pas, lui disais-je, du public qui juge, mais du public qui étudie. J'ajoutais que, voulant suivre et refaire tous les calculs en entier pour mon instru-

ction, je pourrais, s'il se rendait à ma prière, découvrir et signaler les fautes d'impression qui s'y seraient glissées. Ma respectueuse insistance désarma sa réserve. Il m'envoya toutes les feuilles déjà imprimées, en y joignant une lettre charmante, cette fois nullement cérémonieuse, mais remplie des plus vifs et des plus précieux encouragements. Je n'ai pas besoin de dire avec quelle ardeur je dévorai ce trésor. Je pouvais bien m'appliquer la maxime: *violenti rapiunt illud.* Depuis, chaque fois que j'allais à Paris, j'apportais mon travail de révision typographique, et je le présentais personnellement à M. Laplace. Il l'accueillait toujours avec bonté, l'examinait, le discutait; et cela me donnait l'occasion de lui soumettre les difficultés qui arrêtaient trop souvent ma faiblesse. Sa condescendance à les lever était sans bornes. Mais lui-même ne pouvait pas toujours le faire, sans y donner une attention quelquefois assez longue. Cela arrivait d'ordinaire aux endroits, où, pour s'épargner des détails d'exposition trop étendus, il avait employé la formule expéditive: *il est aisé de voir.* La chose, en effet, avait paru, dans le moment, très-claire à ses yeux. Mais elle ne l'était pas toujours, même pour lui, à quelque temps de là. Alors, si vous lui en demandiez l'explication, il la cherchait patiemment, par diverses voies, pour son compte comme pour le vôtre; et c'était là, sans doute, le plus instructif des commentaires. Une fois, je le vis passer ainsi près d'une heure, à tâcher de ressaisir la chaîne de raisonnements qu'il avait cachée sous ce mystérieux symbole: *il est aisé de voir.* On doit dire, à sa décharge, que s'il avait voulu être complétement explicite, son ouvrage aurait dû avoir huit ou dix volumes in-4° au lieu de cinq; et peut-être, n'aurait-il pas vécu assez de temps pour l'achever.

Tout le monde comprendra le prix que devaient avoir pour un jeune homme ces communications familières et intimes, avec un génie si puissant et si étendu. Mais ce que l'on ne saurait bien se figurer, à moins d'en avoir été l'objet, ce sont les sentiments de délicatesse affectueuse, et comme paternelle, dont il les accompagnait. Ceci m'amène naturellement à l'anecdote que j'ai voulu raconter. Car elle en offre un exemple aussi parfait que rare.

Peu de temps après qu'il m'eut été permis de l'approcher, j'eus la bonne fortune de faire un pas, qui me sembla nouveau et imprévu, dans une partie des mathématiques, où l'on était à peine entré jusqu'alors. J'avais remarqué, dans les commentaires de Pétersbourg, une classe de questions géométriques fort

singulières, qu'Euler avait traitées par des méthodes indirectes, dans un mémoire intitulé: *De insigni promotione methodi tangentium inversae.* Il s'était proposé aussi une question de ce genre, encore plus difficile, sur laquelle il était revenu à plusieurs reprises dans les *Acta eruditorum*, en la résolvant chaque fois par des voies différentes, mais toujours indirectement. La singularité de ces problèmes consistait en ce qu'il fallait découvrir la nature d'une courbe, d'après certaines relations assignées, dont les caractères géométriques étaient d'ordres dissemblables: les unes devant avoir lieu entre des points infiniment voisins, les autres entre des points distants, séparés, par des différences finies et données, d'abscisses. Or, la première classe de conditions, relative aux points voisins, étant considérée isolément, sous le point de vue abstrait, dépend du calcul différentiel ordinaire: la deuxième, relative aux points distants, dépend d'un autre genre de calcul, qui s'adapte spécialement aux différences finies. L'idée me vint que, pour bien faire, il fallait écrire d'abord l'énoncé complet du problème dans le langage analytique, en appliquant à chacune de ses parties leurs symboles propres. Cela conduirait à un genre d'équations, dit, *aux différences mêlées*, peu étudié jusqu'alors, qui exprimerait ainsi, avec une entière généralité, l'ensemble des conditions mixtes auxquelles on devrait satisfaire; après quoi, on n'aurait plus qu'à se tirer, comme on pourrait, de ce dernier pas. La réalisation de cette idée surpassa mes espérances. Toutes les questions de ce genre, qui avaient été traitées indirectement par Euler, et par d'autres géomètres, étant exprimées ainsi en symboles généraux, se résolvaient sans difficulté, comme par enchantement. Lorsque j'eus trouvé cette clef qui les ouvrait, j'apportai mon travail à Paris, et j'en parlai à M. Laplace. Il m'écouta avec une attention, qui me sembla mêlée de quelque surprise. Il me questionna sur la nature de mon procédé, sur les détails de mes solutions. Quand il m'eut examiné sur tous ces points, „Cela me paraît fort bien, „dit-il, venez demain matin m'apporter votre mémoire. Je „serai bien aise de le voir.“ On comprend que je fus exact au rendez-vous. Il parcourut fort attentivement tout mon manuscrit; l'exposé de la méthode, les applications, les considérations ultérieures que j'y avais annexées. Puis, il me dit: „Voilà un très-bon travail; vous avez pris la véritable „voie qu'il faut suivre pour résoudre directement ce genre „de questions. Mais les aperçus que vous présentez, à la „fin, sont trop éloignés. N'allez pas au delà des résultats „que vous avez obtenus. Vous rencontreriez probablement „des difficultés plus sérieuses que vous ne paraissez le

„croire; et l'état actuel de l'analyse pourrait bien ne pas „vous fournir les moyens de les surmonter.“ Après m'être défendu quelque temps, car jamais il ne lui est arrivé d'interdire aux jeunes gens qui l'approchaient la liberté d'une respectueuse controverse, je cédai à ses conseils, et je rayai toute cette fin hasardeuse. „Comme cela, me dit-il, le reste „sera fort bien. Présentez demain votre mémoire à la classe „(on appelait alors ainsi l'Académie): et, après la séance, „vous reviendrez dîner avec moi. Maintenant, allons déjeuner.“ Ici, je ne craindrai pas de placer un tableau d'intérieur, qui le fera voir tel qu'il était, tel qu'il fut toujours, dans la simplicité de ses rapports avec les jeunes gens qui avaient le bonheur de l'approcher, et qui, devenus des hommes, sont restés groupés autour de lui pendant sa longue carrière, comme autant d'enfants adoptifs de sa pensée. C'était dans ces instants de loisir, après son travail du matin, qu'il aimait le plus habituellement à nous recevoir. Le déjeuner était d'une simplicité pythagorique: du lait, du café, des fruits. On servait dans l'appartement de Mme Laplace, laquelle, alors jeune et belle, nous accueillait tous indistinctement, avec la bonté d'une mère, qui aurait pu être notre soeur. Là, on pouvait causer de science avec lui pendant des heures. Sa conversation bienveillante se portait tour à tour, sur les sujets de nos études, sur le progrès des travaux que nous avions commencés, sur ceux qu'il désirait nous voir entreprendre. Il s'occupait aussi des particularités qui concernaient notre avenir; s'informait des opportunités qui pouvaient nous être favorables; et nous y servait si activement, que nous n'avions pas besoin d'y songer nous-mêmes. En retour de tout cela, il ne nous demandait que du zèle, des efforts, et la passion du travail. Voilà ce que nous avons tous vu de lui. Mais le trait que je vais vous raconter, vous fera mieux connaître encore, ce qu'il a été pour nous.

Le lendemain du jour où je lui avais présenté mon mémoire, je me rendis de bonne heure à l'Académie, où, avec la permission du président, je me mis à tracer, sur le grand tableau noir, les figures et les formules que je voulais exposer. Monge, arrivé un des premiers, m'aperçut, s'approcha de moi, et me parla de mon travail. Je compris que M. Laplace l'avait prévenu. A l'École polytechnique, j'avais été un des élèves auxquels il témoignait le plus d'affection; et je savais, combien le succès que j'espérais lui causerait de plaisir. On est heureux d'avoir de pareils maîtres! Quand la parole me fut accordée, tous les géomètres, c'était alors l'usage, vinrent s'asseoir autour du tableau. Le général Bonaparte, récemment revenu d'Égypte, assistait ce jour-là à

la séance, comme membre de la section de mécanique. Il vint avec les autres; soit de lui-même, à titre de mathématicien, dont il se faisait fort; ou, parce que Monge l'amena, pour lui faire les honneurs d'un travail issu de sa chère École polytechnique; à quoi le général répondit: „Je reconnais bien cela aux figures.“ Je pensai qu'il était bien habile de les reconnaître, puisque, hormis M. Laplace, personne encore ne les avait vues. Mais, préoccupé comme je l'étais, de toute autre chose que de sa gloire militaire, et de son importance politique, sa présence ne me troubla pas le moins du monde. J'aurais eu bien plus peur de M. Lagrange, si l'approbation antérieure de M. Laplace ne m'avait donné toute sécurité. J'exposai donc très-librement, et je crois aussi très-clairement, la nature, le but, les résultats de mes recherches. Tout le monde me félicita sur leur originalité. On me donna pour commissaires les *citoyens* Laplace, Bonaparte, et Lacroix. La séance finie, j'accompagnai M. Laplace rue Christine, où il demeurait alors. Dans le chemin, il me témoigna son contentement de la netteté avec laquelle j'avais présenté mes démonstrations, et aussi, de ce que, suivant son conseil, je ne me fusse pas hasardé au delà. Nous arrivons. Après que j'eus salué madame Laplace: „Venez, me dit il, un moment dans mon cabinet; „j'ai quelque chose à vous faire voir.“ Je le suivis. Nous étant assis, et moi prêt à l'écouter, il sort une clef de sa poche, ouvre une petite armoire placée à droite de sa cheminée, je la vois encore...; puis il en tire un cahier de papier jauni par les années, où il me montre tous mes problèmes, les problèmes d'Euler, traités et résolus par cette méthode, dont je croyais m'être le premier avisé. Il l'avait trouvée aussi depuis longtemps; mais il s'était arrêté devant ce même obstacle qu'il m'avait signalé. Espérant le surmonter plus tard, il n'avait rien dit de tout cela à personne, pas même à moi, quand j'étais venu lui apporter son propre travail comme une nouveauté. Je ne puis peindre ce que j'éprouvai alors. C'était un mélange, de joie à voir que je m'étais rencontré avec lui; peut-être aussi de quelque regret à me savoir prévenu; mais surtout, d'une profonde et infinie reconnaissance pour un trait si noble et si touchant. Cette découverte, la première que j'eusse faite, était tout pour moi. Elle était sans doute peu pour lui, qui en avait fait tant d'autres, et de si considérables, dans toutes les parties des mathématiques abstraites, comme dans leurs plus sublimes applications. Mais l'abnégation scientifique est difficile et rare, même en de petites choses. Et puis! cette délicatesse à ne me vouloir découvrir ce mystère qu'après le succès, le succès public, auquel il m'avait conduit comme

par la main, ne se servant de ce qu'il avait vu que pour me détourner des écueils où mon inexpérience allait m'engager! M'eût-il montré ce papier avant la séance, il ne m'était plus possible de présenter mon travail, sachant que le sien existait auparavant. La distance de lui à moi, ne m'aurait permis que le silence. Et s'il avait exigé que je profitasse du secret qu'il avait gardé, quel embarras n'aurais-je pas dû éprouver, quand j'aurais lu ce mémoire, ayant la conscience que je n'étais que l'écho d'un autre esprit! Mais sa réserve me laissait toute la force que son approbation m'avait donnée. Paraîtrai-je trop présomptueux, si je me persuade, que tous ces raffinements de bonté, n'auraient pas pu lui être suggérés par un intérêt seulement abstrait, et scientifique, mais qu'ils ont dû lui être inspirés aussi, par un sentiment personnel d'affection? Au reste, en récompense de sa noble conduite, je me figure qu'il devait éprouver un vif plaisir, et une jouissance bien pure, à m'entendre, grâce à lui, débiter en pleine assurance, à la satisfaction de mon savant auditoire, ces nouveaux calculs dont je me croyais l'inventeur, et qu'il aurait pu m'enlever d'un seul mot. Aurait-il été aussi généreux pour un rival? Aurait-il même été alors, toujours juste? C'est ce que je n'ai nullement ici à examiner. Il fut tout cela pour moi et pour bien d'autres, qui commençaient aussi leur carrière. Je n'ai rien de plus à dire, ni à voir. Son influence sur le progrès des sciences physiques et mathématiques a été immense. Depuis cinquante ans, presque tous ceux qui les ont cultivées, se sont instruits dans ses ouvrages, éclairés par ses découvertes, appuyés sur ses travaux. Mais nous, aujourd'hui en bien petit nombre, qui l'avons connu intimement, et qui avons pu nous inspirer de son esprit et de ses conseils, ajoutons encore, à ces titres glorieux, le souvenir de l'affabilité, de la bonté, qu'il nous a montrées. Efforçons-nous de rendre, à ceux qui vont nous suivre, ce ce qu'il fit pour nous; et imitons, s'il se peut, à leur égard, cette noble abnégation, dont je viens de vous rapporter un si bel exemple. Voilà Messieurs, le trait que j'ai voulu vous raconter. M. Laplace a été votre collègue dans cette Académie. Vous connaissiez son grand génie dans les sciences; vous aviez apprécié l'élévation de son talent comme écrivain. Je viens de vous le montrer sous un aspect nouveau, avec des qualités peut-être plus rares. En rendant cet hommage à sa mémoire je lui désobéis. Car il m'avait imposé un silence absolu sur ce qu'il avait fait pour moi, dans cette rencontre. Le rapport académique, auquel il prit part, n'en porte aucune trace; et il ne me permit pas d'y faire la moindre

allusion quand je publiai mon travail[1]). Mais un intervalle d'un demi-siècle amène fatalement la prescription de tous les engagements humains; et je suis convaincu que vous m'absoudrez unanimement d'avoir manqué aujourd'hui à celui-là, pour acquitter la seule dette que le temps ne doive pas éteindre, celle de la reconnaissance.

BIOT.

---

1) Recueil des mémoires présentés à la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut national par divers savants étrangers, t. 1, p. 296, date de la présentation, 8 brumaire an VIII. Le rapport, rédigé par M. Lacroix, au nom de la commission, fut lu à la classe le 21 du même mois, trois jours après la grande révolution politique, qui avait porté le général Bonaparte au consulat. Il vint encore à cette séance, et y assista aussi tranquillement que s'il n'avait pas eu d'autre affaire en tête. L'original du rapport existe dans les archives de l'Académie, signé par lui et par les deux autres commissaires Laplace et Lacroix.

LVIII.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Georg Freiherrn von Vega, Vorlesungen über die Mathematik. Erster Band. Rechenkunst und Algebra. Siebente Auflage. Nochmals durchgesehen, verbessert und vermehrt von Wilhelm Matzka, ö. o. Professor der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag. 1850. 8. 3 Thlr.

Es ist sehr erfreulich, die nachhaltige Wirksamkeit eines schon vor so langer Zeit, wie die Vega'schen Vorlesungen, erschienenen Werks zu sehen. Wie viele Offiziere des k. k. Artillerie-Corps mögen wohl schon diesem Werke ihre mathematische Bildung verdanken! Der Herr Herausgeber verdient gewiss allen Dank, dass er sich der neuen Bearbeitung dieses verdienstlichen Werkes mit so viel Umsicht unterzogen hat. Die meisten Zusätze scheint die Lehre von den Gleichungen erhalten zu haben, und namentlich ist es sehr verdienstlich, dass der Herr Herausgeber das Wichtigste von Fourier's Vervollkommnung der Newton'schen Annäherungsmethode an die irrationalen Wurzeln der Zahlengleichungen ohne Differenzialrechnung und ohne geometrische Betrachtungen dargestellt hat. Möge das Werk in seiner neuen wirklich vervollkommneten Gestalt noch lange zur Verbreitung gründlichen mathematischen Wissens fortwirken!

Elementarlehre von den Logarithmen, auf einen neuen, verständlicheren und umfassenderen Begriff dieser Hilfszahlen gegründet, blos die Kenntniss der gewöhnlichsten Zifferrechnungen voraussetzend, ohne

Algebra gemeinfasslich zergliedert von Wilhelm Matzka, Professor der Mathematik. Vorzugsweise bestimmt zur Verbreitung dieser im Zifferrechnen so vielseitig nützlichen Lehre im Kreise der praktischen Rechner, in Untergymnasien, Real-, Gewerbs- und Bürgerschulen. Prag. 1850. 8.

Es ist gewiss immer, namentlich aber in jetziger Zeit, höchst verdienstlich, die Ergebnisse und Hülfsmittel der strengen und höheren Wissenschaft einem grösseren Kreise von Gebildeten zugänglich zu machen, überhaupt in das Leben einzuführen. Wie grosse Vortheile und Erleichterungen die Logarithmen bei der Ausführung der verschiedenartigsten Rechnungen darbieten, weiss jeder Mathematiker; wer aber einen Blick in das praktische Leben gethan hat, weiss auch, dass diese Lehre bei Weitem noch nicht allgemein genug verbreitet ist, dass die von ihr dargebotenen Vortheile, ausser von den eigentlichen Mathematikern, noch lange nicht allgemein genug anerkannt sind und benutzt werden. Die Lehre von den Logarithmen möglichst allgemein in das praktische Leben einzuführen, ist der Hauptzweck der vorliegenden Schrift. Sogenannte praktische Anleitungen zur Logarithmenrechnung giebt es schon genug, mit denen aber die vorliegende Schrift keineswegs in eine Kategorie gestellt werden darf, indem dem Herrn Vf. vielmehr daran lag, neben einer wahrhaft praktischen Anleitung zur Ausführung der betreffenden Rechnungen, namentlich auch durch eine einfache völlig naturgemässe Darstellung der Theorie der Logarithmen ein wirkliches inneres Verständniss derselben herbeizuführen, wobei er von dem gewiss völlig richtigen Gesichtspunkte ausging, dass nur erst durch ein solches inneres Verständniss der Theorie der wahren Praxis der Weg gebahnt werde. Wir würden es uns nicht versagen, mehr über dieses gewiss recht sehr verdienstliche Schriftchen zu sagen, wenn wir uns nicht in der glücklichen Lage befänden, die Leser des Archivs auf eine in dem vorliegenden Hefte dieser Zeitschrift, welchem diese Nummer des literarischen Berichts zur Begleitung dient, abgedruckte streng wissenschaftliche Abhandlung Nr. III. desselben Herrn Vfs. über die Logarithmen verweisen zu können. Was in dieser vorzüglichen Abhandlung streng wissenschaftlich entwickelt worden ist, bildet in mehr allgemein verständlicher Darstellung wenigstens zum Theil auch den Inhalt der vorliegenden Schrift, und namentlich ist es die im Archiv. Thl. XV. Heft II. S. 150. gegebene Definition der Logarithmen, von welcher der Herr Vf. auch in der vorliegenden Schrift seinen Auslauf nimmt. Wir sind der Meinung, dass diese Definition in vorliegender Schrift sehr geschickt zu einer möglichst allgemein verständlichen Entwickelung der Theorie der Logarithmen benutzt worden ist, und was die mehr praktische von vollständiger Sachkenntniss deutlich zeugende Anleitung zur Logarithmenrechnung betrifft, so wird gewiss Niemand über irgend einen dabei in Frage kommenden Fall hier vergeblich Belehrung suchen. Wir empfehlen daher diese Schrift allen denen, welchen es daran liegt, sich eine gehörig theoretisch begründete Kenntniss der Lehre von den Logarithmen zunächst Behufs praktischer Zwecke zu verschaffen, ohne andere mathematische Kenntnisse als die Kenntniss der gewöhnlichen

Rechenkunst zu besitzen, besonders aber auch allen Lehrern an den auf dem Titel genannten Lehranstalten, aus vollkommenster Ueberzeugung zu sorgfälltigster Beachtung.

Trigonometrie.

Compendium der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von F. Schaub, Adjunct der k. k. Sternwarte zu Wien. Mit einer Figurentafel. Wien. 1849. 8.

Eine kurze, recht deutliche Darstellung der beiden Trigonometrieen. Die meisten Aufgaben sind zweckmässig durch numerische Beispiele erläutert, was Anerkennung verdient, da jeden Lehrer gewiss die Erfahrung gelehrt hat, dass Anfänger, wenn sie auch die theoretischen Lehren der Trigonometrie und auch die Lehre von den Logarithmen gut im Kopfe haben, doch schon dadurch keineswegs befähigt sind, eine trigonometrische Rechnung zweckmässig und mit einer gewissen Eleganz zu führen. Für solche, die praktische Anwendungen der Trigouometrie zu machen beabsichtigen, wird namentlich auch der vierte Abschnitt: Relationen zwischen kleinen Aenderungen der Bestimmungsstücke eines Dreiecks, lehrreich sein. Von diesen Relationen wird zum Schluss auch eine Anwendung auf die Fehler bei der Bestimmung des Stundenwinkels aus Polhöhe, Polardistanz und Zenithdistanz eines Gestirns gemacht.

Geodäsie.

Handbuch der niedern Geodäsie nebst einem Anhange über die Elemente der Markscheidekunst. Zum Gebrauche für technische Lehranstalten, so wie für das Selbststudium bearbeitet von Friedrich Hartner, Professor der höhern Mathematik und praktischen Geometrie am steierm. ständ. Joanneum zu Gratz. Wien. 1850. 8.

Wenn uns auch von diesem neuen Handbuche der niedern Geodäsie bis jetzt nur die erste Lieferung vorliegt, so haben wir uns doch schon aus dieser Lieferung von dem gediegenen Inhalte desselben überzeugt. Die Darstellung ist im höchsten Grade deutlich und leicht verständlich, die gegebene Anleitung überall eine wahrhaft praktische, und stets ist auf die neueren Erfindungen und die mehrfachen neueren Verbesserungen der gebräuchlichen Instru-

mente gebührend Rücksicht genommen. Besonders hat uns der schon in dieser ersten Lieferung deutlich hervortretende systematische, sehr sorgfältig von dem Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortschreitende Gang in der Beschreibung und Beurtheilung der Instrumente angesprochen, und auch die nothwendigsten optischen Hülfslehren fehlen, wie billig, nicht. Auch nicht sehr allgemein gebräuchliche Instrumente, wie z. B. die verschiedenen, bis jetzt bekannten Distanzmesser, sind deutlich beschrieben und ihrem praktischen Werthe nach richtig gewürdigt. Die aus der Teubners'chen Officin in Leipzig hervorgegangene äussere Ausstattung ist in jeder Beziehung vortrefflich. Wenn wir nun auch späterhin, wenn erst die sämmtlichen Lieferungen erschienen sind, noch weiter auf dieses Buch zurückkommen werden, so haben wir es doch für unsere Pflicht gehalten, dasselbe schon jetzt allen Geometern und allen Lehrern an den Unterrichtsanstalten, wo die Geodäsie einen besondern Theil des Unterrichts ausmacht, zur Beachtung zu empfehlen.

Kurzgefasstes Lehrbuch der Geodäsie oder Vermessungskunde von Heinrich Westberg, Lehrer an der Kreisschule zu Mitau. Mit 14 Figurentafeln. Mitau 1850. 8. 15 Ngr.

Dieses kleine Buch enthält eine deutliche Anleitung zu den einfachsten Arbeiten der Feldmesskunst und des Nivellirens. Es werden darin nur die gewöhnlichen geometrischen Elementarkenntnisse vorausgesetzt, trigonometrische Rechnungen nicht zu Hülfe genommen, also Alles, selbst auch die Resultate der Höhenmessungen, nur auf geometrische Constructionen mit Lineal, Zirkel und verjüngtem Maassstabe zurückgeführt. Von Instrumenten sind beschrieben und zu gebrauchen gelehrt der Messtisch nebst Zubehör, das halbkreisförmige Astrolabium und die Boussole. Besonders als Grundlage für den Unterricht in der Feldmesskunst auf landwirthschaftlichen Lehranstalten scheint dieses Büchlein wohl geeignet zu sein. Nur hätten wir gewünscht, dass bei dem Nivelliren ausser der gewöhnlichen Kanalwage doch auch ein Nivellirinstrument mit Fernrohr beschrieben und zu berichtigen und zu gebrauchen gelehrt worden wäre, weil man namentlich bei dem für die Landwirthschaft jetzt so höchst wichtigen Bau der Rieselwiesen doch mit jenem sehr mangelhaften Instrumente nicht ganz ausreichen möchte, und in der That auch bei den genaueren Arbeiten dieser Art jetzt meistens schon der Nivellirinstrumente mit Fernröhren fast allgemein sich bedient, denen man zu diesem Zwecke übrigens eine möglichst einfache und der zu erreichenden beabsichtigten Genauigkeit entsprechende Einrichtung giebt.

Mechanik.

Die Theorie der bifilaren Aufhängung von Franz Dietzel, Lehrer der Mathematik. Einladungsschrift zur öffentlichen Prüfung der Königl. Gewerbschule und Baugewerkschule zu Zittau am 21. und 22. März 1850. Zittau 1850. 8.

Der Herr Vf. hat in diesem Programm die Theorie der sogenannten bifilaren Aufhängung im Allgemeinen, ohne Rücksicht auf eine besondere Anwendung vollständig entwickelt, und wir müssen sagen, dass wir diese allen, welche von der bifilaren Aufhängung Anwendungen zu machen beabsichtigen, sehr zu empfehlende Schrift mit grossem Interesse gelesen haben. Die Vollständigkeit der Behandlung wird man aus der folgenden kurzen Inhaltsangabe von selbst ersehen: Einleitung. Die bifilare Aufhängung. Bestimmung der Gleichgewichtslage. Bestimmung des Drehungsmoments und der Schwingungsdauer der bifilaren Aufhängung. Correction I, wenn die Fäden ungleiche Spannung haben. Correction II, wenn die Fäden ungleich lang sind. Correction III, die Berücksichtigung der Elasticität der Fäden oder Drähte. Correction IV, Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Bestimmung der Schwingungsdauer, wenn die Schwingungsbogen einen endlichen Werth haben. Bestimmung des Trägheitsmomentes nicht homogener Körper mit Hilfe der bifilaren Aufhängung. Besonders dieser letzte Abschnitt, aber auch noch vieles Andere in dieser verdienstlichen Schrift, ist auch im Allgemeinen für die Statik und Mechanik von Interesse.

Optik.

Als Beilage ist der Nr. 719. der Astronomischen Nachrichten ein Auszug aus einer in der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig am 12. Juni 1850 gelesenen interessanten Abhandlung des Herrn Professor Anger zu Danzig beigegeben worden, welche den Titel führt: „Zur Theorie der Perspective für krumme Bildflächen mit besonderer Berücksichtigung einer genauen Construction der Panoramen. Wir halten es für unsere Pflicht, die Leser des Archivs auf diese einfache und genaue Construction der Panoramen aufmerksam zu machen, und sehen dem Erscheinen der vollständigen Abhandlung mit Verlangen entgegen.

Astronomie.

Storia celeste del R. Osservatorio di Palermo dal 1792 al 1813. Parte seconda 1803—1813. Tomo ottavo 1807—1810. Vienna. 1849. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte und o. ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 31. Theil. Neuer Folge 11r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1807 bis 1810. Wien 1849. 4. (M. vergl. Litterar. Ber. Nr. XLIX. S. 685.)

Der Zweck dieses höchst verdienstlichen Werks ist aus unsern Anzeigen der früheren Bände in diesen literarischen Berichten bekannt. Wir können daher nur auch jetzt wieder unsere Freude darüber ausdrücken, dass dasselbe seiner Beendigung mit so schnellen Schritten entgegen eilet, da ja jetzt nur noch drei Jahrgänge der Piazzi'schen Beobachtungen zurück sind, und wünschen den Herren Herausgebern von Herzen Glück zu diesen ausgezeichneten Erfolgen. Da mit dem vorliegenden Bande zugleich auch der gleich nachher angezeigte 33ste Theil der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien erschienen ist, so werden die Piazzi'schen Beobachtungen wahrscheinlich mit dem 9ten Theile (Theil 32 der Annalen) geschlossen werden.

Annalen der k. k. Strernwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte etc. etc. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 33ster Theil. Neuer Folge 13ter Band. Wien. 1849. 4.

Der Inhalt dieses Theils der Annalen ist nicht bloss astronomisch, sondern von mehrfachem allgemeinen Interesse, wie die folgende Angabe desselben von selbst zeigen wird.

Heft I. und III. Trigonometrische Vermessungen im Kirchenstaate und in Toscana, ausgeführt von dem Ingenieur Johann Marieni, unter der Direction des k. k. militärisch-geographischen Institutes in den Jahren 1841, 1842 und 1843. — In einem Vorworte zu diesen Heften sind nach einigen historischen Bemerkungen über die früheren in Italien ausgeführten Messungen von Boscovich und Maire, Moynet, Oriani, Reggio, Cesaris, von Zach, Inghirami, und dem neapolitanischen General Visconti, die Instrumente angegeben, welcher sich Herr Marieni bei seinen Messungen bediente, und die Formeln zusammengestellt, nach denen die Berechnung der Breiten, Längen und Azimuthe und der Höhen über der Meeresfläche geführt wurde. Die Messung ward auf die im Jahre 1788 von den Mailänder Astromen Oriani, Reggio und Cesaris auf der Ebene von Gallarate und Soma längs

des Ticino gemessene Basis gegründet, diese Basis dabei nach Carlini's Angabe zu 9999, 245 Metres angenommen, und vermittelst des additiven Logarithmen 9,7220213, der im k. k. militärisch-geographischen Institute zur Verwandlung der Meter in Klaftern gebraucht wird, in Wiener Klaftern verwandelt. Die an den gemessenen Winkeln anzubringenden Correctionen waren immer sehr klein. Ein schönes und für Jeden, der solche Messungen auszuführen beabsichtigt, sehr instructives „Uebersichts-Skelett trigonometrischer Vermessungen in Italien" ist beigegeben. Astronomische Ortsbestimmungen von Bologna, Florenz, Neapel, Padua, Pisa, Rimini, Ripatransone, S. Salvatore, Venedig, und lehrreiche Vergleichungen derselben mit den auf trigonometrischem Wege erhaltenen, ferner die Längen verschiedener Meridianbögen, Höhen über der Meeresfläche u. s. w. sind gleichfalls beigefügt und ein Relations-Auszug des Ingenieurs Marieni über die trigonometrischen Arbeiten, die von demselben in den Jahren 1841, 1842 und 1843 im Kirchenstaate und in Toscana ausgeführt worden sind, bildet den Schluss der in vielen Beziehungen wichtigen und interessanten Arbeit.

Heft II. Resultate funfzehnjähriger an der k. k. Sternwarte zu Wien angestellter Hygrometer-Beobachtungen, zusammengestellt von Dr. C. Jelinek.

Heft III. Cometen-Beobachtungen an der Wiener Sternwarte, reducirt von Dr. C. Jelinek und C. Hornstein.

Wir würden namentlich über die letztere sehr verdienstliche Arbeit hier mehr sagen, wenn dieselbe nicht schon besonders in dem Literar. Ber. Nr. LIII. S. 739. von uns angezeigt worden wäre, worauf wir daher uns zu verweisen erlauben.

In dem Augenblicke, wo wir diese Anzeige schliessen, geht uns die höchst erfreuliche Nachricht zu, dass in Wien zu dem Bau einer neuen Sternwarte geschritten werden soll. Wenn der österreichische Staat neben so vielen andern grossen wissenschaftlichen Unternehmungen, auf die schon früher in diesen Literarischen Berichten öfters gebührend hingewiesen worden ist, in einer so bewegten Zeit, wie die unsrige ist, auch noch zu dem Bau einer grossartigen, allen jetzigen Anforderungen der Wissenschaft entsprechenden Sternwarte schreitet: so muss derselbe in der That grosse innere Kräfte besitzen, und einen Eifer haben, die Wissenschaft zu einem grossartigen neuen Aufschwunge zu bringen, der namentlich in der jetzigen Zeit mit Recht in Erstaunen setzt, und die wärmste Anerkennung aller wahren Verehrer der Wissenschaften lebhaft in Anspruch nimmt.

Tellurium und Lunarium, construirt von Gustav Grimm, zu beziehen durch jede Buchhandlung von Hermann Kanitz in Gera.

Dieses nur 18 Rtlr. kostende, sauber gearbeitete Tellurium und Lunarium scheint, so viel sich für jetzt nach dem uns vor-

liegenden Prospectus urtheilen lässt, seines niedrigen Preises und seiner im Ganzen zweckmässigen Einrichtung wegen, zu verdienen, Lehranstalten zur Anschaffung empfohlen zu werden.

Physik.

Anfangsgründe der Physik für den Unterricht in den obern Klassen der Gymnasien und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht, von Karl Koppe, Professor und Oberlehrer am Gymnasium zu Soest. Mit 195 in den Text eingedruckten Holzschnitten und einer Karte. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Essen. 1850. 8.

Die 1847 und 1848 erschienene erste Auflage dieses Buchs ist im Literar. Ber. Nr. XL. S. 579. und Nr. XLIV. S. 627. von uns angezeigt worden. Wir freuen uns, unsere damalige Empfehlung, welche wir jetzt wiederholen, durch das baldige Erscheinen dieser neuen Auflage bestätigt zu sehen, welche mit Recht den Namen einer verbesserten und vermehrten verdient. Rücksichtlich der äusseren Einrichtung unterscheidet sich diese neue Auflage von der älteren nur dadurch, dass die zwei Theile dieser letzteren jetzt in einem Theile vereinigt worden sind, was dem Herrn Vf. doch zweckmässig geschienen haben muss. Möge das Buch auch in seiner neuen Gestalt fortfahren, dem so wichtigen Studium der Physik in einem möglichst grossen Kreise immer mehr Liebhaber zu gewinnen!

LIX.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Gesetze in den höheren Zahlengleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten. Von Simon Spitzer. Mit einem Vorworte von Dr. Leopold Carl Schulz von Strassnitzki, Prof. der Math. am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Wien. 1849. 4⁰.

Diese Abhandlung des Herrn Simon Spitzer, welcher schon früher eine im Literar. Ber. Nr. LII. S. 717. angezeigte sehr verdienstliche Arbeit über die Gleichungen lieferte, hat im Allgemeinen den Zweck, die bekannten Ideen von Gauss über die imaginären Grössen in der Theorie der Gleichungen, namentlich bei deren Auflösung, zur Anwendung und Geltung zu bringen. Herr Prof. Dr. Schulz von Strassnitzki hat die vorliegende neue Abhandlung mit einem Vorworte begleitet, welches wir in vielen Beziehungen für so lehrreich halten, dass wir uns nicht versagen können, dasselbe unsern Lesern, so weit es ohne Figuren verständlich ist, im Folgenden ganz mitzutheilen, weil es zugleich den sichersten Maassstab für die sehr verdienstlichen Leistungen des Herrn Simon Spitzer abgiebt. Herr Professor Dr. Schulz von Strassnitzki spricht sich nämlich in diesem Vorworte folgendermassen aus:

„Gauss hat die reelle und anschauliche Bedeutung der imaginären Ausdrücke, und ihre Zulässigkeit in der Rechnung in den Göttinger Anzeigen Stück 64 vom Jahre 1831 nachgewiesen; allein dieser grossartige Gedanke Gauss's spielte in der Wissenschaft bloss die Rolle eines geistreichen Einfalls, ohne dass von ihm weiter greifende Anwendungen, namentlich in

der Geometrie gemacht wurden. Der von ihm vorgeschlagene Namen laterale (seitliche) Grösse statt des unpassenden imaginäre ist noch wenig durchgedrungen.

So wie Descartes die negativen Wurzeln einer Gleichung, von ihm noch falsche Wurzeln genannt, zuerst geometrisch erläutert, und dadurch einer umfassendern Gestaltung der Geometrie den Weg gebahnt, so sind wir auch der Meinung, dass die Gauss'sche Anschauungsweise der sogenannten imaginären Grössen durch das Gesammtgebiet der Mathematik durchgeführt, nicht nur lichtvolle Klarheit in die bisherigen Kenntnisse bringen wird, sondern sehen auch umfassenderen Erweiterungen der Wissenschaft entgegen. In dem Vorworte zu Hrn. Spitzer's Methode, die imaginären Wurzeln einer numerischen Gleichung zu finden, habe ich gezeigt, wie man imaginäre Werthe angeben kann, die in eine Gleichung mit durchgängig reellen Coefficienten substituirt, reelle Resultate geben. Auf diesen Gedanken fussend, hat es Herr Spitzer unternommen, die geometrische Bedeutung dieser reellen Resultate zu ermitteln, und so gelang ihm die geometrische Construction der imaginären Wurzeln einer numerischen Gleichung; wodurch sich neuerdings mit voller Evidenz ergibt, dass die lateralen (seitlichen) Grössen — bisher imaginär genannt — nicht leere Zeichenformen sind, sondern dass sie in die Wissenschaft vollkommen eingebürgert zu werden verdienen.

Descartes nimmt zur geometrischen Deutung einer algebraischen Function $f(x)$, die Werthe der unbekannten x als Abscissen, und die daraus sich ergebenden Resultate der Substitution als Ordinaten an, wodurch das geometrische Bild der Function $f(x)$ eine ebene Krumme wird, und die Punkte, wo die Abscissenaxe diese Krumme schneidet, die positiven und negativen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ geben, weil in diesen Punkten $y=f(x)$ gleich Null wird. — Spitzer nimmt zur geometrischen Veranschaulichung der Function $f(x+y\sqrt{-1})$ als Constructionsfeld die Ebene der xy und zwar so, dass die x auf die Achse der x und senkrecht darauf die Werthe der y verzeichnet werden, ganz im Sinne Gauss's; die reellen Resultate, falls sich solche ergeben, werden in der Richtung der z angebracht. Das geometrische Bild, welches dadurch entsteht, gibt nicht nur die ebene Curve des Descartes, nämlich für die Werthe, wo $y=0$ ist, sondern auch mehrere damit verbundene krumme Linien von doppelter Krümmung, und durch den Platz, wo diese Krummen die Ebene der xy schneiden, erhalten die imaginären Wurzeln ihre geometrische Interpretation. Es sei u eine Function von x mit reellen Coefficienten, setzen wir statt x, $x+y\sqrt{-1}$, so dass:

$$u=f(x+y\sqrt{-1}),$$

so hat man:

$$u=f(x)-y^2.\frac{f_2(x)}{2!}+y^4.\frac{f_4(x)}{4!}- \text{ u. s. w.}$$

$$+ y\sqrt{-1}\{f_1(x) - y^2.\frac{f_3(x)}{3!} + y^4\frac{f_5(x)}{5!} - \text{u. s. w.}\}.$$

Da wir nur die reellen Werthe von u in Betrachtung ziehen wollen, und selbe z nennen, so haben wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$z = f(x) - y^2.\frac{f_2(x)}{2!} + y^4.\frac{f_4(x)}{4!} - \text{u. s. w.},$$

$$y\{f_1(x) - y^2.\frac{f_3(x)}{3!} + y^4.\frac{f_5(x)}{5!} - \text{u. s. w.}\} = 0.$$

Eine Auflösung liegt auf der Hand, nämlich

$$z = f(x),\ y = 0;$$

das ist nun die ebene Curve nach der Verzeichnung Descartes, welche die positiven und negativen Wurzeln durch ihre Durchschnitte mit der Achse der x darbietet. Das System der andern Curven ergibt sich aus den Gleichungen:

$$z = f(x) - y^2.\frac{f_2(x)}{2!} + y^4.\frac{f_4(x)}{4!} - \text{u. s. w.},$$

$$f_1(x) - y^2.\frac{f_3(x)}{3!} + y^4.\frac{f_5(x)}{5!} - \text{u. s. w.} = 0;$$

die wir kurz durch

$$z = \varphi(x,\ y);\ \psi(x,\ y) = 0$$

darstellen wollen, wobei, wie man leicht sieht, der höchste Exponent von y in $\psi(x, y) = 0$ stets gerade, und um zwei oder wenigstens um einen Grad niederer ist, als der höchste Exponent von x in der Gleichung $f(x) = 0$.

Wenn wir nun nach einander dem x in der Gleichung $\psi(x, y) = 0$ verschiedene willkührliche Werthe geben, und den dieser Gleichung entsprechenden Werth von y bestimmen, und diese Werthe von x und y in die Gleichung $z = \varphi(x, y)$ substituiren; so hat man einen Punkt dieses Curvensystems. Es sei so m ein willkührlicher Werth von x, und die Gleichung $\psi(m, y) = 0$ gebe für y die Werthe $a, b, c, d, \ldots$ so erhält man für z die Werthe

$$\varphi(m,\ a);\ \varphi(m,\ b);\ \varphi(m,\ c);\ \varphi(m,\ d); \ldots\ldots;$$

geben wir nun dem x einen von m sehr wenig verschiedenen Werth m', so werden die Werthe von y aus der Gleichung $\psi(m', y) = 0$ von den Werthen $a, b, c, d, \ldots$ nur wenig verschieden sein. Es seien dieselben $a', b', c', d', \ldots$ und daher die resultirenden Werthe von z:

$$\varphi(m',\ a');\ \varphi(m',\ b');\ \varphi(m',\ c');\ \ldots\ldots$$

Ist eben so m'' von m' nur sehr wenig verschieden, so werden die Wurzeln der Gleichung $\psi(m'', y)=0$, d. i. a'', b'', c'', d'',... von a', b', c', d',.... ebenfalls nur wenig sich unterscheiden, welche uns für z die Resultate

$$\varphi(m'', a''); \ \varphi(m'', b''); \ \varphi(m'', c''); \ . \ . \ . \ .$$

geben.

Je näher nun m, m', m'', folglich auch

$$a, a', a'', \ldots b, b', b'', \ldots c, c', c'', \ldots,$$

an einander liegen, um so mehr bilden

$$\varphi(m, a), \ \varphi(m', a'), \ \varphi(m'', a''), \ . \ . \ .$$

eine stätige Reihe von Punkten einer Curve, eben so

$$\varphi(m, b), \quad \varphi(m', b'), \quad \varphi(m'', b''), \ . \ . \ .$$

und ebenso

$$\varphi(m, c), \quad \varphi(m', c'), \quad \varphi(m'', c''), \ . \ . \ . \ .$$

Diese Curven im Allgemeinen von doppelter Krümmung wollen wir **conjugirte Curven** nennen.

Es sei z. B. die Gleichung

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \text{ oder } (x-1)(x-2)(x-3)=0;$$

setzet man hier statt x, $x+y\sqrt{-1}$, so hat man:

$$u=f(x+y\sqrt{-1})=f(x)-\frac{1}{2}f_2(x).y^2+\{f_1(x)-\frac{1}{6}f_3(x)y^2\}y\sqrt{-1}.$$

Damit nun u reell werde, muss der Factor des zweiten Gliedes sich auf Null reduciren, und man hat:

$$z=f(x)-\frac{1}{2}f_2(x).y^2; \ f_1(x)-\frac{1}{6}f_3(x)y^2=0,$$

d. h.

$$z=x^3-6x^2+11x-6-(3x-6)y^2; \ 3x^2-12x+11-y^2=0,$$

woraus:

$$y^2=3x^2-12x+11; \ z=-(8x^3-48x^2+94x-60)$$

als Gleichungen der **conjugirten Curven**, während die Gleichungen der Hauptcurve $y=0$ und $z=x^3-6x^2+11x-6$ sind.

Die Projection auf die Ebene xy wird durch $y^2=3x^2-12x+11$ gegeben, welche, wie man sieht, die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Centrum $x=2$, $y=0$, und die Scheitel derselben

$$x=2-\frac{1}{\sqrt{3}},\ z=\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ und } x=2+\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ und } z=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

zu ihren Coordinaten haben. Diese zwei Scheitel treffen mit dem Maximum- oder Minimumpunkt der Hauptcurve zusammen."

„Als zweites Beispiel diene uns die Gleichung

$$x^4-6x^3+18x^2-30x+25=0,$$

welche die vier imaginären Wurzeln $1\pm2\sqrt{-1}$ und $2\pm\sqrt{-1}$ hat. Man hat:

$$z=x^4-6x^3+18x^2-30x+25-(6x^2-18x+18)y^2+y^4,$$

$$4x^3-18x^2+36x-30-(4x-6)y^2=0.$$

Man erhält hier

$$\text{für } x=1;\ y=\pm2;\ z=0$$

$$\text{für } x=2,\ y=\pm1;\ z=0."$$

Herr Prof Dr. Schulz von Strassnitzki erläutert nun die beiden vorhergehenden Beispiele sehr deutlich und lehrreich durch zwei vollständig ausgeführte Constructionen, und leitet daraus die Eigenschaften der beiden als Beispiele gebrauchten Gleichungen rücksicksichtlich ihrer reellen und imaginären, gleichen oder ungleichen, Wurzeln ab, wobei wir nur bedauern müssen, dass wir diese Constructionen hier den Lesern des Archivs nicht mittheilen können, weil den Literarischen Berichten Figuren nicht beigegeben werden können, und fährt dann auf folgende Art fort:

„Herr Spitzer hat vorstehende Betrachtungen zunächst zur Grenzenbestimmung der imaginären Wurzeln benutzt, wodurch die Berechnung derselben wesentlich erleichtert wird: er erläutert ferner die Fälle, in welchen eine Function durch imaginäre Werthe einen Maximum- oder Minimumwerth erreicht. Zum Schlusse dehnt er seine Betrachtungen und Methoden auch auf die Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten aus. Hoffentlich werden die Mathematiker das hier Dargebrachte ihrer Aufmerksamkeit nicht für unwürdig halten, und die hier entwickelten Gedanken zur weitern Durchführung in der Wissenschaft bringen."

Die nun folgende Arbeit des Herrn S. Spitzer zerfällt in die folgenden Abschnitte:

1. Bestimmung der Grenzen der reellen und imaginären Wurzeln einer Zahlengleichung höheren Grades. — 2. Betrachtungen

über die imaginären Maximum- und Minimumwerthe einer Function. — 3. Aufsuchung der reellen und imaginären Wurzeln höherer numerischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten. — Note über die imaginären Maxima- und Minimawerthe einer Function.

Alle hier gegebenen Betrachtungen zeichnen sich durch eine vorzügliche Klarheit aus, welche durch die stets beigegebenen, mit grosser Mühe vollständig ausgerechneten Beispiele noch sehr erhöhet wird, so dass wir diese Abhandlung allen Lesern des Archivs dringend zur Beachtung empfehlen.

Herr S. Spitzer schliesst seine Arbeit mit den bescheidenen Worten: „Sollte irgend Gutes dieser Aufsatz enthalten, so gebührt der Dank hierfür einzig und allein meinem Lehrer Herrn Prof. Schulz. Er war es, der mich stets in dieser Wissenschaft leitetete, und mit seinem Rathe unterstützte. Ohne ihn hätte ich diese Arbeit wohl nie zu Stande gebracht."

Vergleichen wir demnach den Anfang und das Ende dieser vorzüglichen Schrift, so haben wir das höchst erfreuliche Bild eines ausgezeichneten Lehrers und trefflichen Schülers vor uns, von denen jeder die Verdienste des andern auf das Freudigste und Innigste anzuerkennen sich bestrebt, ein Beispiel der Anerkennung gegenseitigen Werthes, das in unserer Zeit nicht eben sehr häufig ist.

Der vorhergehenden Abhandlung hat Herr S. Spitzer sehr bald eine zweite folgen lassen, unter dem Titel:

Skizzen aus dem Gebiete der höheren Gleichungen. Von Simon Spitzer, Assistenten der Elementar- und Höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute. Wien. 1850. 4.

die sich den beiden vorhergehenden in würdiger Weise anreihet, und von der er selbst sagt, dass er in derselben Manches allgemeiner, Manches strenger aufgefasst habe, als in den früheren Aufsätzen, und dass zugleich manches Neue von ihm beigefügt worden sei. Bei der Ausdehnung, welche diese Anzeige schon erhalten hat, müssen wir uns leider mit der folgenden blossen Angabe des Hauptinhaltes begnügen:

1. Geometrisches Bild der binomischen Gleichungen $z=u^n-1$. — 2. Geometrischer Ort der symmetrischen Functionen der Wurzeln. — 3. Erweiterung der Theorie des Grössten und Kleinsten: *a.* Bei Gleichungen mit Einer Unbekannten. *b.* Bei Systemen von Gleichungen mit zwei Unbekannten. *c.* Bei Systemen von mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Den Schluss dieses Abschnitts bilden Betrachtungen specieller Fälle bei zwei Gleichungen höheren Grades.

Mögen diese beiden Abhandlungen die Beachtung, welche sie gewiss recht sehr verdienen, so allgemein wie möglich recht bald finden, und zu weitern Untersuchungen über die fraglichen wichtigen Gegenstände reichliche Veranlassung geben!

Astronomie.

Populäre Astronomie. Von Dr. J. H. Mädler, Kais.-Russischem Staatsrathe u. s. w. Vierte, völlig umgearbeitete Auflage. Nebst einem Atlas, 20 Tafeln enthaltend. Berlin. 1849. 8.

Ein Buch, welches in einer vierten Auflage vorliegt, muss sich wohl die Gunst des Publikums in vorzüglichem Grade erworben haben, und ein Urtheil darüber zu fällen, ist kaum noch an der Zeit. Wir verkennen auch die Vorzüge dieses Werkes keineswegs, und sind selbst der Meinung, dass dasselbe in gewisser Rücksicht für den Mann von Fach, der die Wissenschaft schon kennt, fast noch mehr Werth hat als für den blossen Liebhaber, weil es eine Menge werthvoller Zusammenstellungen über die Topographie des Planetensystems der Sonne, die Kometen, die Fixsterne, die Nebelflecke, die Doppelsterne u. s. w. enthält, die man bis auf die neueste Zeit herab kaum in irgend einem anderen Werke von ähnlicher Tendenz in gleicher Vollständigkeit finden dürfte, so dass auch uns selbst das Buch in dieser Beziehung manche dankenswerthe Belehrung gewährt hat und öfters von uns zu Rathe gezogen worden ist. Wenn wir aber auf die eigentlich wissenschaftliche Behandlung sehen, so müssen wir freilich offen bekennen, dass wir bei derselben eine auf dem Wege der Beobachtung den Leser nach und nach zu einer vollständigen Kenntniss des grossen Weltgebäudes führende Darstellung, welche so treu als möglich dem historischen Entwicklungsgange der Astronomie folgt, so gut wie ganz vermisst haben. Wir glauben, dass es namentlich in einem populären Werke bei der Darstellung keiner Wissenschaft so zweckmässig ist, sich dem historischen Entwickelungsgange derselben möglichst eng anzuschliessen, als gerade in der Astronomie, und sind der Meinung, dass auch eine solche Darstellung sich nur allein für ein populäres astronomisches Werk eigne. Denn was hilft die Angabe aller einzelnen Erklärungen und Gesetze, ohne dass man auf einem im eigentlichen Sinne heuristischen Wege zu denselben zu gelangen sucht; ohne eine solche heuristische Darstellung sinkt der formelle Nutzen für den Leser, der doch gewiss immer auch sehr hoch anzuschlagen ist, auf Null herab, und die Wissenschaft wird mehr eine blosse Sammlung von Notizen. Sollten wir ein Muster für eine solche Darstellungsweise angeben, so ist dies freilich in gewisser Rücksicht Sache des Geschmacks, wir aber, von unserm Standpunkte aus, wüssten in der That kein uns mehr zusagendes Buch anzugeben, als die zweite*) Ausgabe von Biot's Astronomie physique, in der

*) Die neueste, jetzt schon bis zu vier starken Bänden angewachsene, dritte Ausgabe, die der treffliche hochbejahrte Verfasser noch nicht zu Ende geführt hat, dürfte mehr den Bedürfnissen der Männer vom Fach entsprechen, schon ihres grossen Umfanges wegen, da ja schon die Theorie der optischen Instrumente fast zwei ganze Theile füllt.

wir immer eine wahrhaft populäre, nur ein äusserst geringes Maass mathematischer Vorkenntnisse in Anspruch nehmende, dabei zugleich durch die Sprache höchst ansprechende Darstellung gefunden haben, und möchten sehr wünschen, dass einmal ein in diesem Biot'schen Geiste verfasstes, bis zu den neuesten Entdekkungen fortgeführtes populäres Werk erscheinen möchte.

Solche Formeln wie im vorliegenden Werke aus der Theorie der Planetenbewegung auf S. 100. ff., ohne allen Beweis, ohne alle Deduction angeführt, und selbst durch numerische Beispiele zu gebrauchen gelehrt worden sind, helfen dem Manne von Fach gar nichts, und dem gewöhnlichen Liebhaber oder Dilettanten sind sie natürlich böhmische Dörfer. Ungeachtet aller Achtung vor den Verdiensten des Herrn Verfassers können wir daher in diesem Werke doch keine ganz gleichmässige Darstellung erkennen, die den Leser unter Voraussetzung der allereinfachsten Lehren der Geometrie und allenfalls noch der Trigonometrie auf heuristischem Wege und an dem Faden der historischen Entwikkelung zu einer möglichst vollständigen Kenntniss des grossen Weltgebäudes führt, und ihm ein Staunen abnöthigt über die Grösse und Stärke des menschlichen Geistes, der — und in der That doch meistens auf ziemlich einfache Weise, wenn man nicht bis in die tiefsten Tiefen hinabzusteigen beabsichtigt — Mittel und Wege fand, in die Geheimnisse des Weltalls einzudringen, und bei aller scheinbaren Unregelmässigkeit der sichtbaren Bewegungen der Weltkörper die streng gesetzmässige Ordnung deutlich zu erkennen, welche der grosse Urheber desselben mit so grosser Weisheit darin einführte. Absichtlich kehren wir aber nochmals zu dem Eingange dieser Anzeige zurück, und erkennen wiederholt gern an, dass dieses Werk in Bezug auf die Topographie des Himmels sehr werthvolle Zusammenstellungen enthält, die man in einem anderen ähnlichen Buche schwerlich in gleicher, bis auf die neuesten Zeiten herabreichender Vollständigkeit finden dürfte.

Abriss der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung von Dr. A. Sawitsch, Professor der Astronomie an der Kaiserichen Universität zu St. Petersburg. Aus dem Russischen übersetzt von Dr. W. C. Götze. Mit mehreren im Originalwerke nicht vorhandenen vom Herrn Verfasser nachgelieferten Zusätzen und Erweiterungen. Erster Band. Hamburg. 1850. 8.

Schriften über praktische Astronomie besitzen wir namentlich im Deutschen, nur wenige. Denn ausser dem älteren Werke von Rössler und dem neueren von Jahn wüsste ich in der deutschen Literatur kein Werk, welches diesem wichtigen Gegenstande ausschliesslich gewidmet wäre, wenn auch freilich in vielen astronomischen Schriften treffliche Anleitungen zu astronomischen Beobachtungen und Rechnungen enthalten sind, vor allen in den Königsberger Beobachtungen, in Bohnenberger's wenn auch älterer, doch immer noch klassischer Anleitung zur geo-

graphischen Ortsbestimmung vorzüglich mittelst des Spiegel-Sextanten, in Rümker's Handbuch der Schifffahrtskunde, in den verschiedenen astronomischen Zeitschriften, u. s. w. Aber ein Werk, welches, hauptsächlich in Bezug auf geographische Ortsbestimmung, die neuere Beobachtungskunst in ziemlicher Vollständigkeit lehrte, besitzen wir nicht, und diesem Bedürfnisse hilft, glauben wir, das bis jetzt in seinem ersten Bande uns vorliegende Werk des Herrn Professor Sawitsch in ausgezeichneter Weise ab. Der Herr Verfasser hat sich, ohne Weitschweifigkeit, grosser Deutlichkeit und möglichster Einfachheit in der Darstellung befleissigt, auch eine möglichst geringe Anzahl von Vorkenntnissen vorausgesetzt, indem die Trigonometrie und die leichtesten Lehren der Differentialrechnung zum vollständigen Verständniss dieses Werks fast allein hinreichen, namentlich auch der Gebrauch der analytischen Geometrie bei der Bestimmung der Fehler der Instrumente u. s. w. fast ganz ausgeschlossen worden ist, was wir bei einem Werke von der Tendenz des vorliegenden nur billigen können; die beschriebenen und zu berichtigen gelehrten Instrumente sind fast nur die jetzt mit Recht und zum grossen Nutzen der Wissenschaft so weit und allgemein verbreiteten transportablen Instrumente, von denen auch immer sehr deutliche Abbildungen gegeben worden sind; die Formeln sind nicht etwa, wie in manchen anderen eine praktische Richtung verfolgenden Werken, bloss angegeben, sondern immer mit hinreichender Vollständigkeit vollständig abgeleitet, wodurch natürlich die eigentlich wissenschaftliche Gestalt des Buchs sehr gewonnen hat und dasselbe von dem Herrn Verfasser zu einem wahren Lehrbuche gemacht worden ist, in welchem man selten über einen Gegenstand, in dem auf dem Titel und durch die ganze Tendenz des Buchs vorgezeichneten Kreise, vergebens Rath und Belehrung suchen wird; alle behandelten Aufgaben sind durch numerische Beispiele deutlich erläutert; übrigens trägt das Werk ganz den Stempel der Eigenthümlichkeit, und Herr Professor Sawitsch hat auch manche ganz neue Methoden beigefügt, wie man, um nur Eines zu erwähnen, z. B. aus dem Anhange zum dritten Abschnitte: „über eine etwas veränderte Anwendung der Bessel'schen Methode zur Bestimmung der Polhöhe durch das Durchgangs-Instrument, nebst einem Beispiele“ sehen kann. Kurz wir sind der Meinung, dass Herr Professor Sawitsch durch Herausgabe dieses in vielen Beziehungen ausgezeichneten Werks namentlich um alle die, welche aus Neigung oder Beruf geographische Ortsbestimmungen zu machen sich anschicken wollen, ein wahres Verdienst erworben hat, und danken ihm in deren Namen hier aufrichtigst dafür. Gleichen Dank verdient aber auch der Herr Uebersetzer für die Verpflanzung dieses Werks auf deutschen Boden, weil dasselbe sonst gewiss vielen deutschen Beobachtern ganz unbekannt geblieben sein würde. Da wir der russischen Sprache ganz unkundig sind, und auch das Originalwerk nicht vor uns liegen haben, so können wir freilich ein eigentliches Urtheil über die Uebersetzung nicht aussprechen; aber so viel können wir aus vollkommenster Ueberzeugung versichern, dass dieselbe sich ganz wie ein Originalwerk lies't, und fügen daher nur noch hinzu, dass auch Herr Professor Sawitsch selbst die Uebersetzung genau durchgegangen und laut der Vorrede über dieselbe das

Urtheil gefällt hat: „dass überall der Sinn des Russischen Originales treu und scharf wiedergegeben sei“ was ja bei der Uebersetzung eines mathematischen Werkes eigentlich Alles ist, was man verlangen kann. Ausserdem hat die Uebersetzung durch manche Zusätze des Herrn Verfassers wirkliche Vorzüge vor dem Originale. Bei einem Werke wie das vorliegende, halten wir uns zu einer etwas genaueren, als dies sonst in diesen literarischen Berichten zu geschehen pflegt, Angabe seines Inhaltes verpflichtet, die wir im Folgenden uns zu geben erlauben:

S. 1. *Einleitung.* Diese 73 Seiten starke Einleitung enthält aus der theoretischen Astronomie alles dasjenige, was zum Verständniss der verschiedenen praktischen Operationen nothwendig ist, also die wichtigsten allgemeinen astronomischen Begriffe; die Lehre von der Zeit; die Lehre von den Constanten, welche bei der Reduction des scheinbaren Orts eines Gestirns auf seinen mittlern Ort angewandt werden; die Lehre von der astronomischen Strahlenbrechung, von der Parallaxe, die Theorie des astronomischen Fernrohrs, die Theorie des Niveaus, immer mit bestimmter Rücksicht auf das Praktische, worunter auch selbst geübte praktische Astronomen manches für sie Lehrreiche finden werden. — S. 74. *Erster Abschnitt.* Beschreibung und Gebrauch der Instrumente. Die in diesem Abschnitte beschriebenen und in jeder Beziehung vollständig theoretisch behandelten Instrumente sind das Durchgangs-Instrument, der astronomische Theodolit und das Universal-Instrument. Die Theorie dieser Instrumente ist so vollständig gegeben, dass kein Umstand, den die neuere Beobachtungskunst zu berücksichtigen für nöthig gefunden hat, unberücksichtigt geblieben ist. Ausserdem enthält dieser Abschnitt sehr schöne Belehrungen über die Fehler der Gradtheilungen der Instrumente und den Gebrauch und die Behandlung der astronomischen Uhren. — S. 243. *Zweiter Abschnitt.* Bestimmung der Breite und der Zeit durch die Messung von Zenithdistanzen. Bestimmung der Breite aus Circummeridian - Höhen. Bestimmung der Breite durch den Polarstern. Zeitbestimmung aus Zenithdistanzen. Zeit- und Breitenbestimmung, wenn beide unbekannt sind. Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen. Ausserdem enthält dieser Abschnitt noch viele höchst lehrreiche und, wenn durch die Beobachtungen möglichst genaue Resultate erzielt werden sollen, höchst wichtige allgemeine Betrachtungen. — *Dritter Abschnitt.* Zeit- und Breiten-Bestimmung mittelst des Durchgangs-Instruments. Allgemeine Theorie des Durchgangs-Instruments. Zeit-Bestimmung durch Beobachtungen am Durchgangs-Instrumente: 1. Wenn das Instrument im Meridian aufgestellt ist. 2. Im Vertikale des Polarsterns. Allgemeine Bemerkungen über die verschiedenen Methoden zur Zeitbestimmung. Bessel'sche Methode die Polhöhe durch das Durchgangs-Instrument zu bestimmen. Praktische dabei zu befolgende Regeln und Beispiele. Anhang zur Bessel'schen Methode vom Verfasser mit einem Beispiele. *Vierter Abschnitt.* Von der Bestimmung des Azimuths eines gegebenen irdischen Gegenstandes. Be-

stimmung der Zeit und des Azimuths aus den gemessenen Azimuth-Unterschieden von Gestirnen. Ueber den Einfluss der täglichen Aberration auf die verschiedenen Polar-Coordinaten der Gestirne.

Wir sehen dem Erscheinen des zweiten Theils dieses Werks, welcher u. A. auch die Gauss'sche Methode zur Berechnung der Sonnenfinsternisse enthalten wird, mit grossem Verlangen entgegen, und werden dann sogleich über denselben Bericht erstatten. Mögen die Leser des Archivs die grössere Ausführlichkeit der vorhergehenden Anzeige, als sonst in diesen literarischen Berichten gewöhnlich ist, mit der Wichtigkeit des vorliegenden, reiche Belehrung gewährenden Werks, durch dessen Herausgabe der gelehrte Herr Verfasser sich jedenfalls ein grosses Verdienst erworben hat, und das gewiss wesentlich dazu beitragen wird, dass wir bald noch mehr genaue geographische Ortsbestimmungen erhalten werden, als dies bis jetzt schon der Fall ist, entschuldigen. Wir haben es zugleich für unsere Pflicht gehalten, durch die obige ausführlichere Anzeige zu einer möglichst baldigen weiten Verbreitung und Bekanntwerdung dieses verdienstlichen Werks das Unsrige nach Kräften beizutragen.

Nautik.

Handbuch der Schiffahrts-Kunde mit einer Sammlung von Seemanns-Tafeln, zwei Seekarten, zwei Sternkarten und einer magnetischen Karte. Im Auftrage der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse verfasst von C. Rümker, Director der Sternwarte und Navigations-Schule zu Hamburg u. s. w. Fünfte mit stereotypirten Tafeln versehene Auflage. Hamburg. 1850. 8.

Wir freuen uns ungemein, das von uns im Literarischen Ber. Nr. XXII. S. 340. über die im Jahre 1844 erschienene vierte Auflage dieses ausgezeichneten Handbuchs ausgesprochene vortheilhafte Urtheil durch das so baldige Erscheinen der vorliegenden fünften Auflage so vollkommen bestätigt zu sehen. Zugleich ist uns das so baldige Erscheinen dieser neuen Auflage ein sehr erfreulicher Beweis, dass die wissenschaftliche Beschäftigung mit den nautischen Wissenschaften immer mehr Theilnahme findet und an Verbreitung gewinnt. Natürlich gilt von dieser neuen Auflage alles das, was wir a. a. O. über die vierte Auflage gesagt haben, und wir wüssten jener Anzeige in

der That jetzt nichts weiter hinzuzufügen, als die folgende kurze Anzeige der Verbesserungen und Vermehrungen der fünften Auflage. Seite 293—296 sind die zahlreichen auf Hamburger Schiffen angestellten magnetischen Beobachtungen aufgenommen worden, und der Herr Vf. findet in diesen Beobachtungen den Beweis, dass sein in der Vorrede zur vierten Auflage ausgesprochener Wunsch, ein Observations-Buch auf Schiffen eingeführt zu sehen, wenigstens theilweise in Erfüllung gegangen sei. Unter den Verbesserungen weiset der Herr Vf. vorzugsweise auf den S. 258. von ihm gemachten Vorschlag hin, statt der wahren Distanz, die wahre Rectascension des Monds aus der beobachteten Distanz zu berechnen, weil, abgesehen von der dadurch in der Ephemeride ersparten Seitenzahl, die Veränderung der schon von Stunde zu Stunde im Nautical Almanac angegebenen Rectascension des Mondes der Zeit-Aenderung mehr proportional ist, als es die der kleinen Distanzen des Mondes von ausserhalb seiner Bahn gelegenen Fixsternen sind. Dass die nautischen Tafeln ihrem grösseren Theile nach stereotypirt worden sind, ist gewiss auch ein Vorzug der neuen Ausgabe vor der älteren.

Möge dieses verdienstliche Buch fortfahren, gründliche nautische Kenntnisse so allgemein wie möglich unter dem betreffenden Publikum zu verbreiten.

Berichtigung.

In dem vorhergehenden Literarischen Berichte Nr. LVIII. müssen die Seitenzahlen 286. 287, 288, u. s. w. 292 heissen: 786, 787, 788, u. s. w. 792, was man gefälligst zu verbessern bittet.

LX.

Literarischer Bericht.

Geometrie.

Grenz-Bestimmungen bei Vergleichungen von Kreisen, welche von demselben Dreieck abhängig sind, sowohl unter sich als auch mit dem Dreieck selbst von Dr. D. E. L. Lehmus, Professor der Mathematik an der Königl. Artillerie- und Ingenieurschule u. s. w. zu Berlin. Leipzig. 1851. 8°. 10 Sgr.

Dieses Schriftchen enthält acht Aufgaben, die wir angehenden Mathematikern zur Uebung empfehlen. Wir wollen, um diese Aufgaben im Allgemeinen einigermassen zu charakterisiren, die erste und die siebente angeben, indem wir bemerken, dass α, β, γ die Winkel des Dreiecks bezeichnen, wobei die α gegenüberstehende Seite stets als Längeneinheit angenommen ist. Wegen der übrigen Aufgaben erlauben wir uns die Leser auf das empfehlungswerthe Schriftchen selbst zu verweisen. *Erste Aufgabe.* Der Inhalt des um ein Dreieck beschriebenen Kreises soll sich zu dem in dasselbe eingeschriebenen Kreise wie $n^2:1$ verhalten. Zu bestimmen: I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und n. II. Die Grenzen für n. III. Die Relation zwischen α und n, wenn $\gamma = 90^0$ sein soll. IV. Die Gleichung zwischen γ und n für's gleichschenklige Dreieck, also für $\alpha = \beta$. V. Die Abhängigkeit der Werthe von α und n von einander, wenn überhaupt entsprechende Dreiecke existiren sollen.

VI. Numerische Beispiele. — *Siebente Aufgabe.* Die Summe der Flächenräume der vier die Seiten desselben Dreiecks tangentirenden Kreise und der des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises soll einer gegebenen Zahl $p = m\pi$ gleich werden. Zu bestimmen: I. Die Gleichung zwischen α, β, γ und m. II. Die Grenzen für m. III. Die Vergleichung zwischen α und m, wenn $\gamma = 90^0$ sein soll. IV. Die Vergleichung zwischen γ und m, wenn $\alpha = \beta$ werden soll. V. Für welche Relation zwischen α und m überhaupt aus I. einem Dreieck entsprechende Werthe für β sich ergeben können. VI. Numerische Beispiele. — Man sieht schon aus diesen beiden Aufgaben, dass diese kleine Schrift, wenn auch im Ganzen nur acht Aufgaben, doch, wenn dieselben, wie es in der Schrift selbst sehr zweckmässig geschehen ist, weiter zergliedert werden, einen ziemlich reichen Stoff von Uebungen darbietet. Es macht uns Freude, aus dieser Schrift zu sehen, dass der geehrte hochbejahrte Herr Verfasser immer noch rüstig fortfährt, ausser durch mündlichen Unterricht, auch durch Schriften den Lernenden sich nützlich zu machen.

Nautik.

Cours complet à l'usage des officiers de la marine marchande, par Levret ainé, Professeur d'Hydrographie de première classe au Havre. Première Partie. Arithmétique. Paris. 1849. 8. — Deuxième Partie. Géométrie. Paris. 1850. 8. — Troisième Partie. Navigation. Paris. 1850. 8. Alle drei Theile 4 Thlr. 10 Sgr.

Die beiden ersten Theile dieses Werks enthalten die gewöhnlichen Elemente der Arithmetik, der ebenen Geometrie, der Stereometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie, ohne dass dabei auf die besondere Anwendung dieser Wissenschaften in der Nautik irgend Rücksicht genommen worden wäre, was doch namentlich z. B. in der Stereometrie hätte hin und wieder der Fall sein können, in Bezug auf näherungsweise Inhaltsberechnungen u. dergl. Der dritte Theil enthält die „Navigation" wie die Franzosen sagen, d. h. die Steuermannskunde (Pilotage). Die erste Abtheilung enthält einen „Précis de Physique", worin wir in ziemlich bunter Weise das Parallelogramm der Kräfte, die allgemeine Attraction, die Centrifugalkraft, das Princip des Archimedes, das Barometer, die Pumpen, etwas von der Wärme mit Einschluss des Thermometers, die Magnetnadel, die Gesetze der Reflexion und Refraction, die astronomische Strah-

lenbrechung, und in Verbindung mit dem Vorhergehenden die nautischen Instrumente (Sextant, Spiegelkreis, Vernier, Compass) und die Dampfmaschine finden. Aber über die für den Seemann so wichtigen Elemente der Statik, über den Schwerpunkt, über die einfachen Maschinen u. s. w. kommt in diesem „Précis de Physique“ gar nichts vor, was gewiss nicht gebilligt werden kann, wenn der Verfasser einmal die Grundlehren der Physik in sein Werk aufnehmen wollte, wovon wir uns Gelegenheit zu nehmen erlauben, das in höchst eleganter ganz elementarer Weise verfasste Werkchen des berühmten Monge: „Traité élémentaire de Statique à l'usage des écoles de la marine par Gaspard Monge. Cinquième édition. Revue par M. Hachette. Paris 1810. 8. hier wieder in Erinnerung zu bringen, da es zu unserm grössten Bedauern fast vergessen zu sein scheint. Auf den „Précis de Physique“ folgt ein „Précis d'Astronomie“ der uns auch nicht mehr als der „Précis de Physique“ befriedigt hat, und dann kommt auf pag. 92. bis pag. 232. die eigentliche „Navigation“ oder „Astronomie nautique“. Wir glauben uns einer ausführlichen Inhaltsanzeige dieser Abtheilung enthalten und mit der allgemeinen Bemerkung begnügen zu können, dass in derselben die gewöhnlichen Lehren der Steuermannskunde in einer ziemlich guten Ordnung und in deutlicher und einfacher Darstellung enthalten und überall durch zweckmässige Beispiele erläutert worden sind, so dass wir diese Abtheilung dem Seemanne, der nichts Neues, sondern bloss das Gewöhnlichste seiner Wissenschaft und Kunst sucht, wohl empfehlen können, bemerken jedoch, dass über die Aufnahme von Küsten u. dergl. gar nichts in diesem Werke enthalten ist. Der im Literar. Ber. Nr. LI. S. 708. kurz angezeigte Traité élémentaire de navigation à l'usage des officiers de la marine militaire et de la marine du commerce par V. Caillet. T. I. II. Brest. 1848. 1846. 8. enthält alles dem Seemann zu wissen Nöthige weit vollständiger und in wissenschaftlicherer Darstellung als das vorliegende Werk, und wir erkennen dessen Vorzüge vor manchen anderen, namentlich französischen Werken desto mehr, je mehr und je länger wir uns desselben bei eigenen Studien bedienen, weshalb wir die Liebhaber der Nautik hier nochmals auf denselben uns aufmerksam zu machen erlauben, weil wir insbesondere a. a. O. uns nur mit einer ganz kurzen Anzeige begnügen mussten.

Preisaufgabe

der Königlich Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen

für 1851.

Commentatione doctissima de eclipsibus, quam anno 1842 edidit Besselius*), autor celeberrimus ostendit, aequationem calculo horum phaenomenum aptissimam obtineri, si memineris, contactum apparentem duorum corporum coelestium inaequaliter a terra distantium necessario requirere, ut oculus observatoris in puncto aliquo superficiei conicae situs sit, ambo corpora involventis, eodemque opere problemata diversa ad theoriam eclipsium pertinentia copiose tractavit, sed ita tamen, ut contactus interiores solis et lunae nec non eclipses solis, quae efficiuntur planetis inferioribus, modo generaliter attigerit, et brevitatis causa nonnulla praeterierit, quae calculo horum phaenomenum contractionem haud spernendam afferre posse videantur. Quod cum ita sit, desideratur:

> ut auxilio aequationis, quam opere commemorato exhibuit Besselius, eruantur formulae computationi eclipsium annularium nec non transituum planetarum inferiorum per discum solarem idoneae, et illustretur usus formularum inventarum exemplis apte electis.

Commentationes notandae erunt non nomine scriptoris, sed tessera aliqua, adjiciendaque charta obsignata eadem tessera notata, quae scriptoris nomen ordinem domiciliumque indicet.

Commentationes intra exitum mensis Augusti 1851 Christiano Oersted, qui Societati ab epistolis est, transmissae esse debebunt.

---

*) Astronomische Untersuchungen von F. W. Bessel. Zweiter Band. Königsberg. 1842. 4°. (Nr. X. Analyse der Finsternisse.) G.

Kann deutsch verfasst werden.

Preis 50 Ducaten.

Fig. 1.

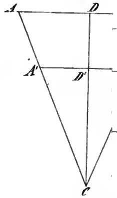
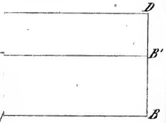


Fig. 3.



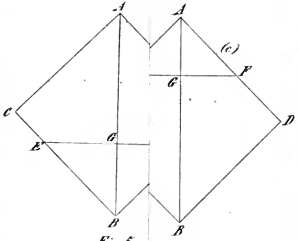
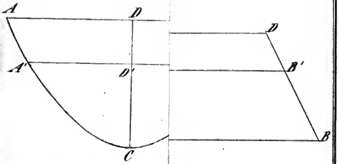
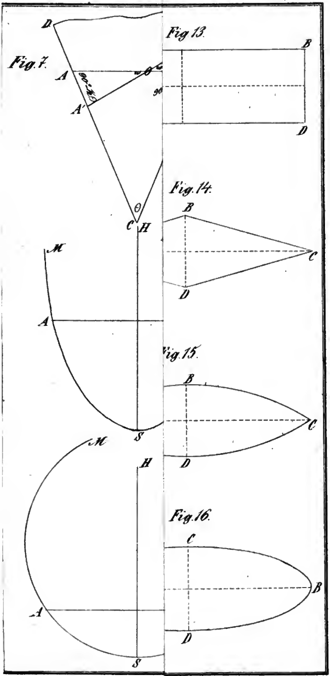
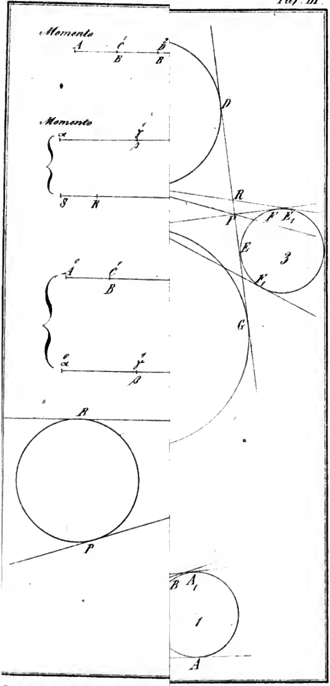


Fig. 5.




Fig. 7.
D
A
A'
C
θ
H
M
A
S
Fig 13.
B
D
Fig. 14.
B
C
D
Fig. 15.
B
C
D
M
H
A
S
Fig. 16.
C
B
D


Momente
Momente
3
1

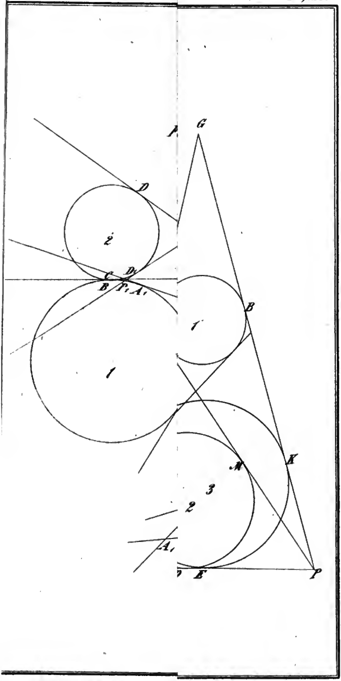
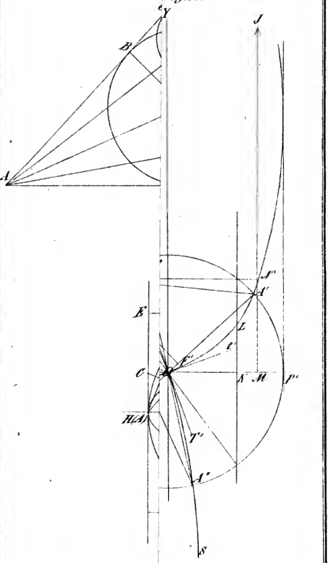

G
D
2
C
B
1'
1
M
K
3
2
E
P

Fig. 10.



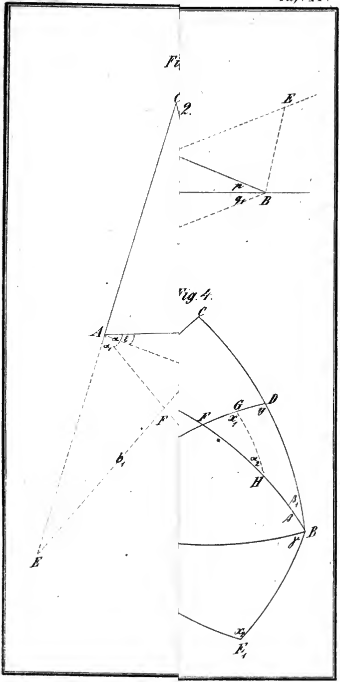

Fi
2.
E
p
q
B
Fig. 4.
C
A
α
ε
α₁
F
b₁
E
G
D
F
x₁
y
α₂
H
β₁
β
B
γ
x₂
F₁

Fig. 2.

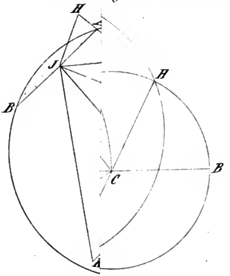
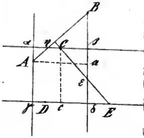
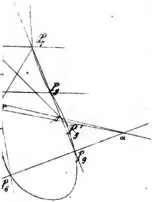


Fig. 3.





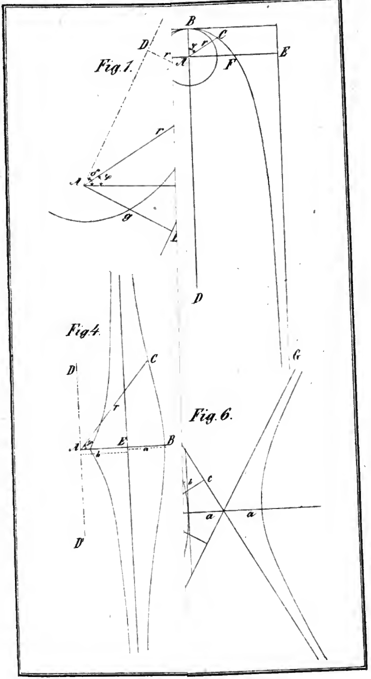
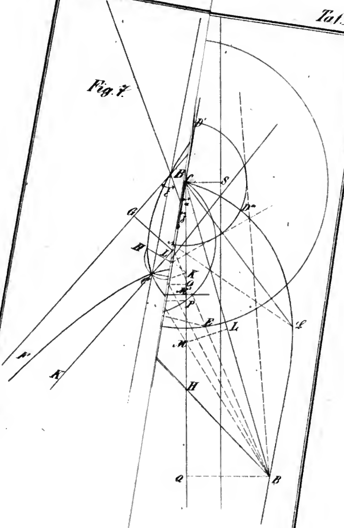
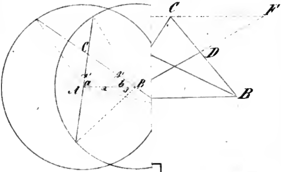

Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 6.

Fig. 7.



Zu Fig. 2.



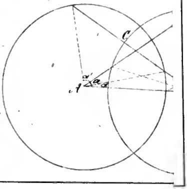


Fig. 3.

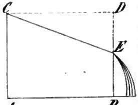


Fig. 4.

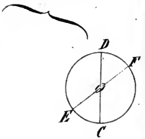
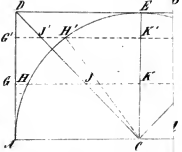
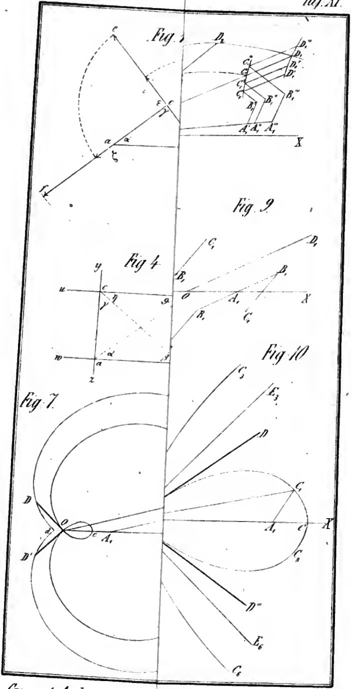
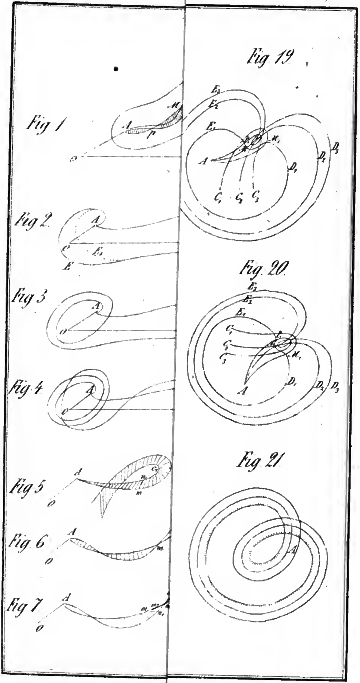


Fig. 1.




Fig. 9
Fig 4
Fig 10
Fig 7
X


Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig. 6
Fig 7
Fig 19
Fig. 20
Fig 21